华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

45

PEARSON

Introduction to Topology

Pure and Applied

拓扑学基础及应用

(美) Colin Adams 威廉姆斯学院 Robert Franzosa 缅因大学 著

沈以淡 等译

机械工业出版社
China Machine Press

拓扑学基础及应用

本书分为两部分，前七章作为第一部分，介绍了拓扑学这门重要的、充满魅力的课程的基本内容；后七章作为第二部分，论述了拓扑学的概念在各领域的作用和意义，这些领域包括数字图像处理、遗传工程、地理信息系统、机器人学、医学（心脏搏动模型）、生物化学、化学、经济学、化学图论、电子线路设计和宇宙学等。

本书特点

- 在展开内容时，先提供一个简短的、引人入胜的背景知识介绍，为引进有关的概念作铺垫，并激发读者学习和以后进一步钻研的兴趣。
- 提供了许多例子和插图，并用生动的语言深入浅出地阐述了这门通常被认为是很抽象的、很艰深的、望而生畏的数学课程。
- 注重启发学生的思维，有利于科学独创性的培养。
- 除了反映拓扑学广泛应用的动态外，还为数学教学改革提供了范例。

作者简介

Colin Adams 1983年于美国威斯康星大学麦迪逊分校获得博士学位，现为美国威廉姆斯学院数学系Thomas T. Read教授。其研究领域包括纽结理论及其应用、双曲3维流形等，已经发表了40多篇有关此领域的论文。

Robert Franzosa 1984年于美国威斯康星大学麦迪逊分校获得博士学位，现为美国缅因大学数学系教授。其研究领域包括动力系统、拓扑学在地理信息系统中的应用，已经发表了多篇有关此领域的论文。他于2003年获得了缅因大学总统杰出教育奖。

Introduction to Topology

Pure and Applied

PEARSON

www.pearsonhighered.com

投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68995259, 68995264
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

华章网站 http://www.hzbook.com

网上购书：www.china-pub.com

封面设计·杨宇梅

上架指导：数学

ISBN 978-7-111-28809-1

9 787111 288091

定价：59.00 元

华章数学译丛

O189
Y018

45

Introduction to Topology
Pure and Applied

拓扑学基础及应用

(美) Colin Adams 威廉姆斯学院 Robert Franzosa 缅因大学 著
沈以淡 等译

机械工业出版社
China Machine Press

本书通过大量例子和插图，用生动的语言深入浅出地阐述了拓扑学这门重要的、充满魅力的数学课程. 本书分为两部分，前七章作为第一部分，介绍了拓扑学这门课程的基本内容；后七章作为第二部分，论述了拓扑学的概念在其他数学领域、科学以及工程方面的作用和意义.

本书作为拓扑学的入门课程，适用于对拓扑学及其应用感兴趣的各专业本科生与研究生.

Simplified Chinese edition copyright © 2010 by Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

Original English language title: *Introduction to Topology: Pure and Applied* (ISBN 978-0-13-184869-6) by Colin Adams and Robert Franzosa, Copyright © 2008.

All rights reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall.

本书封面贴有 Pearson Education（培生教育出版集团）激光防伪标签，无标签者不得销售.

封底无防伪标均为盗版

版权所有，侵权必究

本书法律顾问　北京市展达律师事务所

本书版权登记号：图字：01-2008-1790

图书在版编目（CIP）数据

拓扑学基础及应用/（美）亚当斯（Adams，C.）等著；沈以淡等译. —北京：机械工业出版社，2010.2

（华章数学译丛）

书名原文：Introduction to Topology: Pure and Applied

ISBN 978-7-111-28809-1

Ⅰ.拓… Ⅱ.①亚… ②沈… Ⅲ.拓扑 Ⅳ.O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 192990 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

责任编辑：迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷

2010 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm・20.75 印张

标准书号：ISBN 978-7-111-28809-1

定价：59.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：（010）88378991；88361066

购书热线：（010）68326294；88379649；68995259

投稿热线：（010）88379604

读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

众所周知，拓扑学（与分析学和代数学一起）是现代基础数学的三个关键领域之一．近几十年来，拓扑学在经历朝抽象方面发展的阶段后，又在诸多应用领域得到了广泛的发展．本书就是为了适应这一趋势而推出的．

本书适用于对拓扑学及其应用感兴趣的各专业本科生与研究生，当然还有教师和专业人员．这些专业领域包括数字图像处理、遗传工程、地理信息系统、机器人学、医学（心脏搏动模型）、生物化学、化学、经济学、化学图论、电子线路设计和宇宙学等．对于数学专业的本科生、研究生和教师，本书也是很好的教材或教学参考书．此外，关注数学教学改革的各界人士，也能从本书得到有益的启示．

本书可以分为两大部分，前七章作为第一部分，是介绍拓扑学基础的核心部分，后七章是第二部分，其中的拓扑学论题的结论大都来自前七章的结论．

作者在展开内容时，无论是理论还是应用方面，都先提供一个简短的、引人入胜的背景知识的介绍，为引进有关的概念作铺垫，并激发读者学习和以后进一步钻研的兴趣．为了减轻读者的负担，除了核心部分，作者还设法让本书所讨论的论题彼此独立．在“前言”中，列表给出了这些论题之间的关系．借助这个表，读者就可以采用最合理的途径，尽快地实现自己的目标．

对应用感兴趣的读者，可以按照“前言”中列表的提示选学有关的章节，为解决相关领域的问题，尽快奠定必要的拓扑学的基础．

由于“不懂拓扑学就不懂现代数学”的观念逐步深入人心，因此拓扑学课程已开始列入大学数学类专业的教学计划．而本书理论与应用并重，把它作为基础数学与应用数学专业本科生或其他专业研究生拓扑学课程的教材，是很合适的．在本书中，作者采用拓扑学的工具对代数学基本定理和若尔当曲线定理作出证明．这两个定理在数学专业的课程中一般是不给出证明的．当然，对专攻拓扑学领域的学生来说，本书对有关理论的阐述深度是不够的，有待进一步扩展．此外，译者认为，本书缺乏对拓扑学整个学科的系统性的综述，这算是它的美中不足之处．不过有心的读者不妨自己进行综合、概括，必定大有裨益．

译者向读者推荐本书，理由很简单，作者将人们通常认为很抽象、很艰深、望而生畏的一门数学课程用生动的语言深入浅出地阐述出来．它还提供了许多例子和插图，便于读者理解抽象的概念和理论．因此，只要有一定微积分基础的读者，都能通过本书掌握拓扑学的基本理论和方法．

作者还针对读者对课程的不同需要，对内容作出精心的安排并提出建议．课程的实施除了可以采取各种通常的形式外，还可以采取讨论班的形式进行，这样，读者在获取知识的同时，还能增长解决问题的能力．

译者还向关心数学教学改革的人士推荐本书．本书很有独创性，除了反映拓扑学广泛应

用的动态外，还为数学教学改革提供了范例. 作者尊重教学规律，注重启发学生的思维，有利于科学独创性的培养. 现在，科教兴国的观念日益深入人心，重视教育的呼声持续不断. 数学工作者为此也作出了努力，但是实际状况并不理想. 仅以微积分教材为例，全国出版的各类微积分课本不下千种，不仅内容千篇一律，而且教学思想也显得有些陈旧，所举的例子很多是不切合实际的，有创意的教材屈指可数，与社会的需要很不适应. 如果没有独创性的教学思想和教材，学生独创性思维的培养就无从谈起了，希望本书能为我国数学教材的改革提供有益的借鉴，译者渴望独创性的数学教材在华夏大地不断涌现.

译者作为从事数学教学工作 40 年的老数学工作者，有幸比读者早欣赏到本书的风采，再次郑重向诸位推荐此书，愿与大家一起分享好书给人们带来的愉悦.

承蒙机械工业出版社华章公司计算机编辑部主任及责任编辑的关注，使译者在本书定稿前收到从网上下载的原作者提供的勘误表，确保了本译著的质量，对此表示谢意. 译者提及此事，是希望国内出版界本着对读者负责的精神，发扬勇于纠正错误的风气，利用网络发布等形式，为读者提供高质量的精神食粮.

除封面署名之外，参与本书翻译的还有王季华、姚德源、肖伯骥、沈佳、仇晓林等人. 本书涉及的应用学科门类广泛，由于知识面的局限，在有关拓扑学和应用学科的术语等方面的表述上，难免有不当之处，请读者不吝指正，在此预致谢意.

沈以淡

2010 年 3 月 15 日

前　言

通常认为，拓扑学（与分析学和代数学一起）是现代基础数学的三个关键领域之一．在拓扑学的早期发展中，它的一些结果主要是受现实世界问题研究的推动而产生的．然后，在 20 世纪上半叶，拓扑学的奠基性工作确立以后，它的重点开始转向抽象．过去几十年来，拓扑学在诸如经济学、工程、化学、医学和宇宙学等形形色色的领域中的应用都有了长足的发展．

本书的目标在于以下两个方面：

- 介绍拓扑学这门重要的、充满魅力的课程．
- 论述拓扑学的概念在其他数学领域、科学以及工程上的作用和意义．

通过本书，读者将了解点集拓扑的基础知识，并进一步被引向诸如纽结、流形、动力系统、不动点和拓扑图等课题．此外，读者还将了解在一些应用领域中如何运用拓扑学的一些结果，范围包括从化学中的原子到宇宙学中的天体．

目标读者

阅读本书需要具备最基本的数学素养．对于已成功修完一门基础数学方面的入门课程的学生来说，应该已具备了足够的数学背景知识．在第 0 章，我们提供了本书所需的集合、关系、函数、实数轴和欧几里得空间等背景材料的概述．已经修过微积分系列课程并掌握了本书第 0 章的内容，且在数学上有一定素养的学生，就已充分作好了选修本课程的准备．我们认为，本书作为拓扑学的入门课程，适用于本科生一学期或两学期的教学，也可以作为研究生的入门课程．

如何使用本书

点集拓扑的核心介绍可以在本书以下章节找到：1.1～1.3，2.1～2.3，3.1～3.4，4.1，4.2，5.1，5.3，6.1～6.4，7.1～7.3．

对采用本书作为教材的任何课程，我们推荐把以上这些章节列入课程的核心部分，因为本书其余大部分材料都来自这些章节的许多结论．

除了这些核心部分，我们试图使本书的其余论题彼此独立．在后面的表中，给出了这些论题之间的关系．

对本书核心部分之外的每个拓扑学论题以及每个应用，我们都提供了简短的、有意义的、引人入胜的介绍，希望以此激发读者的兴趣，并为后续研究埋下伏笔．

对于一学期的拓扑学入门课程，应该包括第 1～7 章的核心部分，以及其余章节的几个附加课题．随后的课程安排可以采取各种形式，既可以继续学习本书的全部附加课题和应用，也可以采取讨论班的形式进行．在讨论班上，可以让学生对附加的课题和应用进行探讨，并发表对这些问题的看法．在每次讨论班上，在拓扑学的应用方面应选取一个关注点，主要选自本书提供的素材．我们还认为，这些附加的课题和应用有助于学生的独立研究，并为优等生或教师的进一步探索提供有益的介绍性材料．

章节之间的关系

本书的使用可以有许多方式．不过，我们仍然推荐把第 1～7 章的核心部分作为点集拓扑

的一个引论. 下表给出了本节各论题之间的关系，以帮助读者或教师挑出所需的、核心部分以外的课题，并选择合适的学习顺序. 关于此表，应注意以下几个要点：

- 与核心材料所对应的章节号，加圈予以标注.
- 没有提供第 1～7 章之间的相互关系，仅给出其中每一章各节之间的相互关系.
- 对第 8～14 章的附加课题来说，第 1～7 章的核心材料是不可或缺的，但是，第 1～7 章非核心的节中没有第 8～14 章所需的材料（除了几个习题中参考了所需的材料外）. 因此，在此表中，未告知第 8～14 章如何依赖于第 1～7 章.
- 提供了第 8～14 章之间以及每一章各节之间的依赖关系.

第 1 章：拓扑空间	(1.1) → (1.2) → (1.3) → 1.4
第 2 章：内部、闭包与边界	(2.1) → (2.2) → (2.3) → 2.4
第 3 章：构建新的拓扑空间	(3.1) → (3.2) → (3.3) → (3.4) → 3.5
第 4 章：连续函数与同胚	(4.1) → (4.2) → 4.3
第 5 章：度量空间	(5.1) → 5.2 (5.1) → (5.3) (5.1) → 5.4
第 6 章：连通性	(6.1) → (6.2) → (6.3) → (6.4) → 6.5
第 7 章：紧致性	(7.1) → (7.2) → (7.3) → 7.4 (7.3) → 7.5
第 8 章：动力系统与混沌 • 本章与其他章的论题无关.	8.1 → 8.2 → 8.3 → 8.4 8.3 → 8.5
第 9 章：同伦与度理论 • 定理 9.14 的证明要用到 4.1 节和 7.3 节的补充练习中所建立的蒂茨延拓定理.	9.1 → 9.2 → 9.3 9.2 → 9.4 9.2 → 9.5 9.2 → 9.6
第 10 章：不动点定理及其应用 • 10.1 节中布劳威尔不动点定理的证明要用到 9.2 节中的非收缩定理.	9.2 → 10.1 10.1 → 10.2 10.1 → 10.3 → 10.4
第 11 章：嵌入 • 在 11.1 节中对亚历山大角状球面的讨论，涉及 9.5 节中所给出的单连通性. 对于这个例子来说，并不需要对单连通性进行充分阐述，能直观地理解 9.5 节中的定义和相关结果就足够了. • 在 11.2 节中对若尔当曲线定理的证明，需要用到 9.2 节中的非收缩定理和定理 9.14，以及 10.1 节中的布劳威尔不动点定理. 请注意，正如在第 9 章已提过的，定理 9.14 的证明要用到蒂茨延拓定理.	9.2 → 10.1 → 11.2 11.1 → 11.2 11.1 → 11.3
第 12 章：纽结 • 本章与其他章的论题无关.	12.1 → 12.2 → 12.3 → 12.4

（续）

第 13 章：图论与拓扑学 • 本章与其他章的论题无关.	13.1 → 13.2；13.1 → 13.3 → 13.4
第 14 章：流形与宇宙学 • 在 14.3 节末尾简短讨论庞加莱猜想时提及了单连通性，这是 9.5 节中所提出的论题. 除此之外，本章与其他章的论题无关.	14.1 → 14.2；14.1 → 14.3 → 14.4 → 14.5

证明

在本书中，拓扑学是作为一门基础数学来阐述的，我们提供了所需的定义、定理和适当形式的证明.

在第 1～7 章的核心部分，对所有的定理（除乌雷松度量化定理外）或者给出了证明或者安排作为习题. 这些定理的证明主要是根据定义和以前的定理以直接的方式得到的. 在这些章中所给出的证明中，我们试图为读者提供范例，在做习题中的证明题时，可以作为参考. 阅读、理解这些证明，并且把它们的推导过程写出来，是学好数学的至关重要的方面.

在第 8～14 章中，我们对所提出的一些定理不加以证明，而另外一些给出证明的定理也未包含技巧上的细节. 之所以这样做，是因为这些证明或细节要么需要超出本书范围的高深工具，要么背景特殊并与课题的适当展开显得有些格格不入. 我们希望在第 8～14 章中，用较少的篇幅对论题进行介绍，并希望这些介绍能够让读者感到流畅自如. 在证明或细节省略的场合，我们通常会告知读者，在哪里可以找到与此论题有关的进一步信息的其他来源.

拓扑学是一门高度可视化的学科，因而在研究时，图示对一个论题的理解常常是有益的. 我们有时通过图示把一个证明中论证的几个部分连贯起来. 在拓扑学中这是惯例，但是这样做既有优点又有不足. 优点是，它使得书中的材料融会贯通，为一项研究工作或一次教学活动减少需要明确告知的细节；而缺点是，特别是对像本书这样一本入门教材来说，可能会给人一种印象，即拓扑学似乎主要是关于图形的一门学科，不如数学的其他领域那样严格. 重要的是，要把图形的背后总是存在规范的数学这一点牢记在心，而且如果需要，可以提供为完成由图形表示的论证所需的必要细节.

图示

正如之前所提及的，拓扑学在自然界中是十分直观的. 因此，我们提供了许多图示来帮助读者理解所提供的材料. 而这些图示的内容从上下文来看应是一目了然的，为此我们采用了几个与图示中所用的尽可能一致的约定. 下面用本书中所定义的数学术语来介绍这些约定.

一般的拓扑空间 拓扑空间主要是为本书中所提出的理论而设置的. 通常用空心矩形（黑色边线）表示一个一般的拓扑空间. 例如，图 1 示意了一个集合 A 在一个一般的拓扑空间 X 之中.

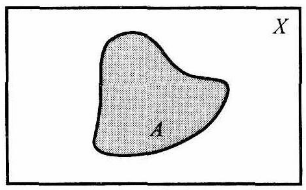


图 1 在一般拓扑空间 X 中的一个集合 A

平面 平面是本书所用的主要拓扑空间之一. 在图示中，平面通常用无边线的灰色的矩形或平行四边形来表示. 例如，图 2 示意了平面中的一个集合 A——在一种情况下直接看作是平面，在另一种情况下可看作是一个具有倾角的平面.

3 维球面　3 维欧几里得空间也是本书所用的主要拓扑空间之一．通常用一个示意图来描述 3 维空间的集合．然而，有时为了强调示意图的环境位于 3 维空间，将一组 3 维的坐标轴也包括在示意图之中．例如，图 3a 所描述的球面不处于特定的环境，或可由上下文判断其所处环境，而图 3b 所描述的是在 3 维空间中的一个球面．

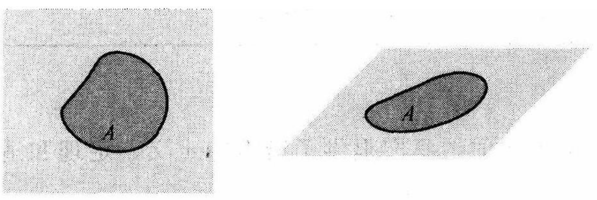


图 2　平面中集合 A 的两种视图

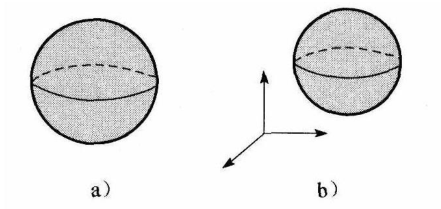


图 3　一个球面和在 3 维空间中的一个球面

开集与边界被排除在外的部分　拓扑空间是开集族．在图示中，一个开集用由虚线边界所围的一个集合来表示．这个约定反映了一个事实，即开集不包括边界．虚线也用于表示一个集合的不包括在此集合之中的边界部分．在图 4 中，集合 A 是拓扑空间 X 中的一个开集；集合 B 是平面的一个开集；而集合 C 是一个正方形形状的平面集合，它包括正方形的左边和右边，但不包括它的顶边和底边．

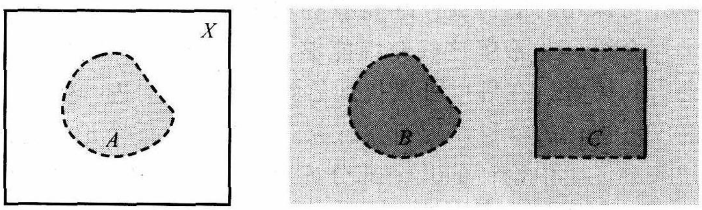


图 4　集合 A 与 B 是开集，集合 C 不包括顶边和底边

虚线还用于表示图示中所隐藏的或背后的曲线（如图 3 所示）．通常，这些虚线更细、更短．根据上下文，这些虚线所表示的含义应是一目了然的．

挖去的点　一些集合偶尔是从其他一些集合挖去一些点而得到的．在图示中，从一个集合中挖去一个点，通常用一个小的虚线圆来表示，如图 5 所示．

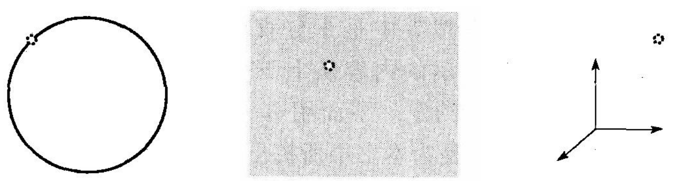


图 5　挖去一个点的一个圆周、挖去一个点的一个平面以及挖去一个点的 3 维空间

目　录

译者序
前　言

第 0 章　引论 …… 1
0.1　拓扑学是什么以及如何应用 …… 1
0.2　历史一瞥 …… 5
0.3　集合及其运算 …… 6
0.4　欧几里得空间 …… 9
0.5　关系 …… 11
0.6　函数 …… 13
第 1 章　拓扑空间 …… 16
1.1　开集与拓扑学的定义 …… 16
1.2　拓扑的基 …… 19
1.3　闭集 …… 26
1.4　拓扑学应用举例 …… 29
第 2 章　内部、闭包与边界 …… 37
2.1　集合的内部与闭包 …… 37
2.2　极限点 …… 40
2.3　集合的边界 …… 44
2.4　在地理信息系统中的一个应用 …… 46
第 3 章　构建新的拓扑空间 …… 51
3.1　子空间拓扑 …… 51
3.2　积拓扑 …… 54
3.3　商拓扑 …… 58
3.4　有关商空间的更多例子 …… 64
3.5　构形空间与相空间 …… 68
第 4 章　连续函数与同胚 …… 73
4.1　连续性 …… 73
4.2　同胚 …… 80
4.3　机器人学的正向运动学映射 …… 88
第 5 章　度量空间 …… 93
5.1　度量 …… 93
5.2　度量与信息 …… 98
5.3　度量空间的性质 …… 102
5.4　可度量化 …… 107
第 6 章　连通性 …… 111
6.1　建立连通性的第一种途径 …… 111
6.2　用连通性区分拓扑空间 …… 117
6.3　介值定理 …… 121
6.4　道路连通性 …… 126
6.5　自动导向装置 …… 130
第 7 章　紧致性 …… 134
7.1　开覆盖与紧致空间 …… 134
7.2　度量空间中的紧致性 …… 140
7.3　极值定理 …… 145
7.4　极限点紧致性 …… 150
7.5　单点紧化 …… 153
第 8 章　动力系统与混沌 …… 157
8.1　函数迭代 …… 157
8.2　稳定性 …… 163
8.3　混沌 …… 169
8.4　复杂动力系统的简单人口模型 …… 175
8.5　混沌蕴涵对初始条件的敏感依赖性 …… 180
第 9 章　同伦与度理论 …… 183
9.1　同伦 …… 183
9.2　圆函数、度与收缩 …… 186
9.3　在心脏搏动模型中的一个应用 …… 190
9.4　代数学基本定理 …… 193
9.5　再论拓扑空间的区分 …… 195
9.6　再论度 …… 198
第 10 章　不动点定理及其应用 …… 205
10.1　布劳威尔不动点定理 …… 205
10.2　在经济学中的一个应用 …… 208

10.3 卡库塔尼不动点定理 …… 214
10.4 博弈论与纳什均衡 …… 219
第 11 章 嵌入 …… 226
11.1 嵌入的一些结论 …… 226
11.2 若尔当曲线定理 …… 231
11.3 数字拓扑和数字图像处理 …… 236
第 12 章 纽结 …… 242
12.1 合痕和纽结 …… 243
12.2 赖德迈斯特运动与环绕数 …… 249
12.3 纽结多项式 …… 253
12.4 在生物化学与化学中的应用 …… 257
第 13 章 图论与拓扑学 …… 263
13.1 图 …… 263
13.2 化学图论 …… 268
13.3 图的嵌入 …… 272
13.4 交叉数与厚度 …… 278
第 14 章 流形与宇宙学 …… 284
14.1 流形 …… 285
14.2 欧拉示性数与紧致曲面的分类 …… 292
14.3 3 维流形 …… 299
14.4 宇宙的几何结构 …… 307
14.5 宇宙是哪一种流形 …… 311
进一步阅读材料 …… 314
参考文献 …… 316

第 0 章 引论

0.1 拓扑学是什么以及如何应用

拓扑学是所有数学学科中最活跃的一个领域. 按照传统的说法，拓扑学（与代数学及分析学一起）被认为是基础数学的三大领域之一. 近年来，由于许多数学家和科学家把拓扑学的概念用于模拟或理解现实世界的结构和现象，拓扑学又成了应用数学的一个重要组成部分. 在本书中，我们按以下两个方面来介绍拓扑学：一是作为一门基础学科的传统方法；二是作为应用工具的一种有价值的来源. 按照应用的观点，我们发现拓扑学既对现实世界的问题产生影响，又影响着其他数学领域的种种成果.

拓扑学脱胎于几何学，推广了它的某些观念，并抛弃了出现在其中的某些结构. 从字面上看，“拓扑学”这个词意味着关于配置与定位的研究. 拓扑学研究形状及其性质、变形和它们之间的映射，以及把它们组合起来的构形.

拓扑学通常被称为“橡皮胶布几何学”. 在传统的几何学中，把像圆周、三角形、平面和多面体这样的物体当作刚体，明确定义了点与点之间的距离，以及棱与面之间的角度. 但是，拓扑学与距离以及角度是不相关的. 如果物体是由橡皮做的，能够变形. 我们允许物体弯曲、扭转、拉伸、收缩，或者相互变形，但是我们不允许物体撕裂. 在图 0.1 中，我们看到 4 种形状，从几何透视来说它们是不同的. 而在拓扑学中却认为它们是等价的. 其中任何一种，如果由橡皮制作，那么就可以变形为其余每一种.

在图 0.2 中，我们看到两个物体（环面与球面）在拓扑学中是不同的. 按照拓扑学的任何方式，都不能把一个球面变形为环面，因而按拓扑学的眼光，这两种曲面是不等价的.

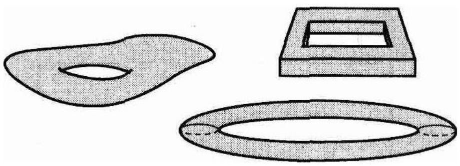


图 0.1　拓扑学家认为这 4 种物体是等价的

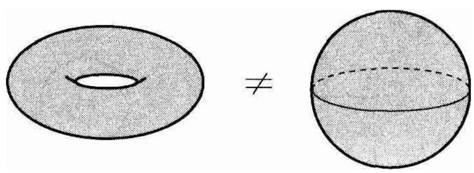


图 0.2　环面与球面并非拓扑等价

通常说，拓扑学家对一个油煎圈饼与一个咖啡杯不加区分. 这意味着在拓扑学中，一个咖啡杯能变形为一个油炸圈饼的形状. 按拓扑学关注的角度，这两个物体是等价的（见图 0.3）.

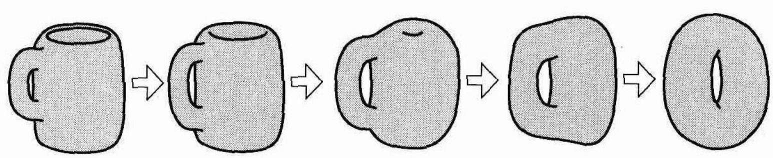


图 0.3 一个咖啡杯与一个油煎圈饼是拓扑等价的

对于这种橡皮胶布几何学居然在现实世界这么有用，你可能会感到惊奇. 这种想法很寻常. 通常，在一种特定的场合，当我们把一个物体认为是可变形的时候，保持这种性质就很有意义；而当我们把一个物体当作刚体时，保持这种性质就没有意义了. 诚然，拓扑学家不能区分一个油炸圈饼与一个咖啡杯，但是拓扑学家却能够——我们将看到这对于整本书有多么重要——辨别和使用这些物体所共有的性质.

让我们快速浏览一下拓扑学的几个课题，以及在本书中提出的某些应用中它们所起的作用. 我们在这里介绍的所有概念，在随后的各章中将更充分地加以阐述.

拓扑空间与表型空间

我们在拓扑学中研究的对象称为拓扑空间. 它是点的集合，对于它们来说，点与点之间接近的概念，通过指定一组称为开集的子集而建立. 直线、圆周、平面、球、环面以及默比乌斯（Möbius）带，都是拓扑空间的例子（见图 0.4）. 在第 1 章和第 3 章，我们将明确地定义拓扑空间和它们的开集，还将发现在各种环境和场合如何构造拓扑空间.

表型和基因型的概念在进化生物学中十分重要. 每一个活生生的有机体，是内部密码与可遗传信息（基因型）的物质性的体现（表型）. 从一种表型到另一种表型的进化演变，按照它们相应的基因型信息，通过称为突变的改变而实现. 我们很想有一个表达一种表型与另一种表型相接近的概念，以反映一种基因型突变，为什么能把一种表型转换为另一种表型. 在 1.4 节，我们通过从一个表型的集合来构造一个拓扑空间，从而描述分子生物学家是如何建立有关进化接近性的概念的.

地理信息系统中内部、边界与区域的关系

给定一个拓扑空间的一个集合，与它有关的两个集合是内部和边界. 对于空间 X 中的一个集合 A，我们直觉地认为，A 的内部是由 A 内的点近旁的点所围的那些点组成，而 A 的边界是靠近 A 或靠近位于 A 的外边的点集（见图 0.5）. 在第 2 章，我们将用开集正式定义内部和边界.

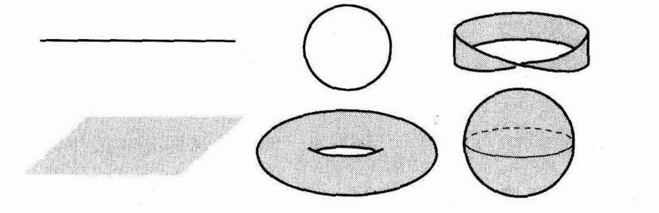


图 0.4 各种拓扑空间

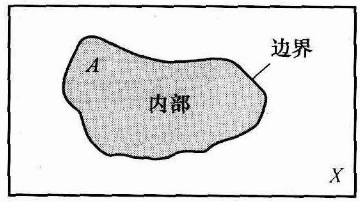


图 0.5 集合 A 的内部和边界

地理信息系统（GIS）是存储或处理现实世界地理信息的一个计算机系统. 一个地理信息

系统，必定能回答诸如“如何为科尔顿尼亚[⊖]安排覆盖亚历山大港保护区的着陆?”这样的询问. 为此，GIS要能够区分陆地之间相关联的范围，此外，还需要有一种手段，来确定已知一对地区所满足的特定关系. 在2.4节中，我们将根据集合的内部和边界，提出一种区分这些关联的模型. 例如，如果集合 A 与集合 B 仅在它们的边界相交，那么我们说 A 与 B 彼此“接触”. 我们用图0.6来图示这种关系，并图示出按照我们所提出的模型所认定的其他关系.

流形与宇宙学

一个 n 维流形是一个拓扑空间，局部类似于 n 维欧氏空间. 例如一个1维流形，局部类似于一条直线；一个2维流形，局部类似于一个平面；一个3维流形，局部类似于一个3维空间，等等.

2维流形亦称为曲面. 球面与环面是曲面的两个特例. 位于曲面一个开集内的每一个点，拓扑等价于位于一个平面的一个开集中的每一个点.（见图0.7.）

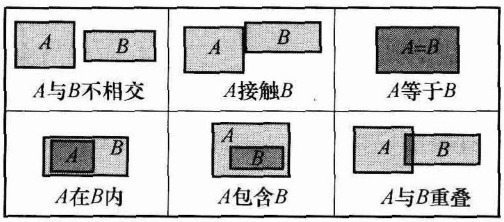


图0.6　集合 A 与 B 之间各种可能的关系

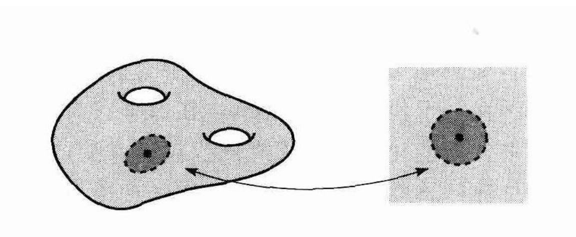


图0.7　一个曲面与一个平面在局部似乎是相同的

地面上的居民可能坚信，他们确实生活在一个平面上，由于他们在局部范围所看到的似乎就像在一个平面上所看到的一样.（这个观念在一本19世纪令人感兴趣的、由Edwin Abbott所著的《Flatland: A Romance of Many Dimensions》书中首先被提出）. 然而，地面上的居民通过研究他们所在地球的性质，就会推断它的全部形状，因而能与一个平面相区别.

很自然地，以类似的方式，人们感觉到，他们生活在其中的宇宙，是一个3维欧氏空间，这是由于人们在局部范围所察觉到的正是如此. 宇宙学家试图通过研究揭示地球整体构造方方面面的一些性质，来确定地球的精确形状. 在第14章，我们将考察3维流形，而我们的讨论方法与宇宙学家相接近，他们选用的方法是，确定究竟应该采用哪一种3维流形来作为地球形状的模型.

嵌入、纽结和DNA

嵌入是一个函数，它采用一个拓扑空间，并把它的一个拷贝放入到另一个拓扑空间中. 我们用图0.8来图示在3维空间嵌入两个圆周的结果.

这些嵌入看上去明显不同. 在左边，被嵌入的圆周是纽结的，而右边，被嵌入的圆周却不是纽结的. 研究在3维空间嵌入圆周的学科称为纽结理论. 确定纽结的不同类型，以及它们彼此如何相关联，是拓扑学这一领域的重要方面.

在纽结理论中，人们对它实现的基本运算之一，是交叉改变. 正如在图0.9中所见到的，我们改变交叉，让上面一股变成下面一股，或让下面一股变成上面一股. 自然要问，对于一

⊖ 一个不知名的地方. ——译者注

个纽结，这种运算会产生什么效果呢?

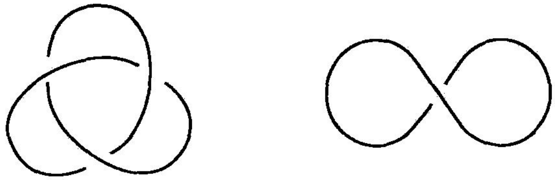


图 0.8 在 3 维空间嵌入圆周

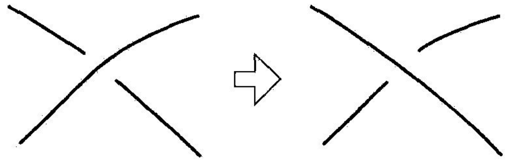


图 0.9 交叉改变的运算

我们发现，上述同样的运算出现在细胞核分子层次上. 脱氧核糖核酸（DNA）是由无数原子所组成的一个长长的、细小的分子. 这种漫长的绞线在细胞核内塞满，它的填塞状况相当于把 200km 的钓丝塞入一个篮球之中.

为了使生命过程得以延续，细胞的生物组织必须能随心所欲地接近以及操作 DNA 分子. 因此，细胞有效解开 DNA 的能力，对它的生存是至关重要的. 细胞核的内部存在称为酶的分子，它是生物学的工具. 这些酶中有些能在 DNA 内形成交叉改变，使它解开. 有一种酶会切割绞缠在一个位置上的 DNA，在那里它自身交叉进而重新绞缠，从而交叉成相反的类型. 最近以来，新的化学疗法代理商提议，在酶产生作用时对它加以抑制，从而阻止癌的 DNA 自身重建. 我们将在第 12 章中讨论纽结理论及其应用.

不动点与经济学

对于把一个拓扑空间映射到自身的一个函数，如果在空间内有一个特定的点，通过这个函数映射到自身，这个函数就有一个不动点. 例如，在图 0.10 中，点 p 是图示函数 f 的一个不动点.

不动点理论是拓扑学的一个重要领域，它涉及诸如“哪一种把一个拓扑空间映射到自身的函数有一个不动点?”、“哪一种拓扑空间使得把它映射到自身的每一个连续函数都有一个不动点?”这样的问题. 在这个领域最著名的结果，是布劳威尔（Brouwer）不动点定理. 它断言，在每一个闭 n 维球上的连续函数有一个不动点. 例如，在 1 维的情况，把一个闭区间映射到自身的每一个连续函数有一个不动点. 在 2 维的情况，把一个圆盘映射到自身的每一个连续函数有一个不动点（见图 0.11）. 在第 6 章和第 10 章，我们将分别证明 1 维和 2 维的结果.

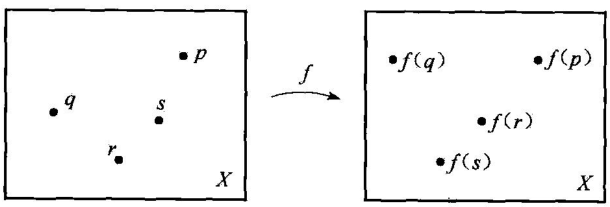


图 0.10 函数 f 有一个不动点 p

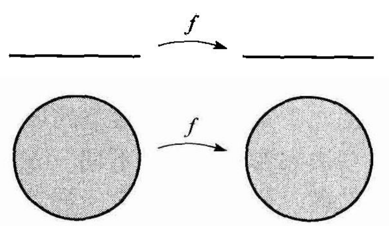


图 0.11 把区间映射到区间或把圆盘映射到圆盘的连续函数必有一个不动点

在一个经济学建模系统中，包含有消费者和货物以及与它们有关的一组变量，包括货物的供给、货物的价格及对货物的需求. 通常，在最近的将来，变量的值会在当前值的基础上发生改变. 例如，近期短缺的应用拓扑学教材的价格在最近的将来会提高. 经济学家所感兴

趣的是，了解一个经济系统是否能处于一个均衡状态，即既能使消费者比较满意，而每一种货物相应的供应、价格和需求又保持不变的状态. 在 10.2 节，我们将把布劳威尔不动点定理应用于这一经济模型，并论证均衡状态是有可能实现的.

布劳威尔不动点定理的结论是一种有关存在性的结论. 它肯定了不动点的存在性，但不能确定它究竟位于何处. 这是在拓扑学中所出现的，并在应用时所使用的许多结论的本质. 正是对这些结论的定性的论证，导致了拓扑学工具的使用.

由于像距离和角度这些量的测量与拓扑学不相关，因此我们在应用拓扑学时，不指望得到额外的定量结果. 通常，拓扑学促进系统的定性分析，它有助于确认作为基本结构的结论成立的可能性或不可能性.

拓扑学的应用有以下三个方面：

(1) 确认适当的拓扑结构和关系.

(2) 正式定义拓扑学概念，并严格证明拓扑学的结论.

(3) 应用拓扑学的概念和结论得出结论.

于是，贯穿全书，我们将采用有关拓扑学的以下三个方面的观点：普遍的观点、理论的观点及应用的观点.

按照公认的观点，我们直觉地认为，拓扑学是有关形状与它们的性质的基础研究. 这些就是当我们研究现实世界的系统，并据此作出有关它们的结论时，我们确认或检验应用问题的拓扑学方面.

拓扑学的理论观点，是把拓扑学作为一种基础数学学科的经典观点. 我们从它的基础出发构建这一理论，使得我们在用普遍观点进行研究时，能恰当地定义概念和结构，从而使我们有合适的理论基础用来支持按照应用观点所使用的一些工具和关系.

最后，在以应用的观点来研究拓扑学的应用时，涉及我们所推导的一些关系和结果. 在此之前讨论过的一些例子，使我们已初步面对过即将探讨的、在现实世界中一些类型的应用问题. 此外，我们还考察在数学的其他领域中，拓扑学的概念如何有助于定义和揭示其中的重要结构与关系. 例如，在第 7 章，我们把一些拓扑性质与奠定微积分基本定理的基础融为一体；在第 8 章，用拓扑学概念来定义动力系统中的混沌；在第 9 章，用拓扑学结果来证明代数学基本定理.

0.2　历史一瞥

人们公认，拓扑学开创于伟大数学家欧拉（1707—1783）所解决的、著名的哥尼斯堡七桥问题. 让我们快速地浏览一下这个问题.

在 18 世纪，一条蒲雷格尔河流过普鲁士的哥尼斯堡（今俄罗斯加里宁格勒）城，这条河流把城市分为 4 个分离的区域，有 7 座桥梁跨越这条河流，并把这 4 个区域相连在一起，如图 0.12 所示.

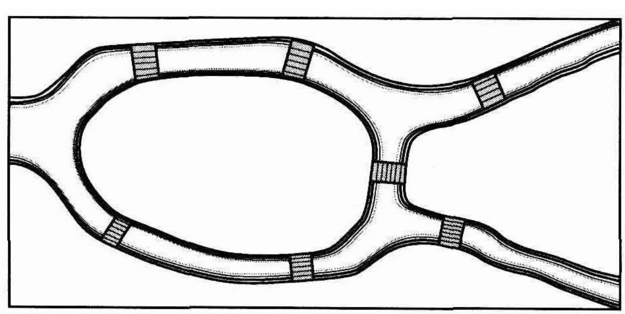


图 0.12　哥尼斯堡城的七座桥

哥尼斯堡城的居民有一项有趣的娱乐，就是设法漫步走过桥梁遍游全城. 人们不禁要问，“你是否能通过走遍每座桥梁遨游

全城，而每座桥只能走过一次?”有趣的是，居然没有一个人能找到这样的漫游路线.

上述问题引起了学者欧拉的注意，他意识到，这是一个涉及新的、称为“位置几何学”的数学课题. 他说：

> 最近以来，出现了一个无疑被认为是属于几何学的问题，然而在打算解决它时，既不要求确定数量，又不要求进行数量上的计算；因此，我毫不犹豫地把它归于“位置几何学”，主要原因是，它的解决仅仅需要考虑位置，而计算是没有用处的.

欧拉对这个问题进行了分析，并证明了按照给定的区域和桥梁的布局，通过漫步走过七桥实现遍游全城的路线是不存在的. 在 13.1 节，我们将进一步考察这个问题.

在此后长达一个半世纪的时间里，有许多有名的数学家追随欧拉的这项最初的研究，对位置几何学作出了有价值的贡献. 其中有高斯（1777—1855）、默比乌斯（1790—1868）、利斯廷（1808—1882）、黎曼（1826—1866）与克莱因（1849—1925），以上都是德国数学家，此外，还有法国数学家庞加莱（1854—1912）.

“拓扑学”这一个术语首先出现于 1847 年利斯廷的论文“拓扑学的初步研究”之中，但是这个术语没有被广泛使用，原因是由于这门学科在几个世纪以后才被正式确定. 几何学的这一新领域最初被称为“位置分析”，庞加莱在他 1895 年的标题为“位置分析”的论文中，首先提出了这个名称. 他是这样来阐述位置几何学的这个一般原理的：

> 图形的比例全都被取代，不过它们的各个组成部分不一定互换，但必须保持它们的相对位置. 换句话说，人们不必担心定量性质，但必须关注定性性质，确切地说，就是关注位置分析所涉及的那些性质.

19 世纪在位置几何学方面的许多成果都来自应用问题的刺激，其中有麦克斯韦尔（1831—1879）和泰特（1831—1901）关于纽结（源于化学研究）方面的研究、基希霍夫对电网络的研究，以及庞加莱对天体力学的分析.

在 19 世纪后期及 20 世纪初期，一些数学家作出的许多贡献，推动了随后很快成为拓扑学领域的这门新兴学科的成长. 这些数学家是布劳威尔（1881—1966）、康托（1845—1918）、弗雷歇（1878—1973）、豪斯多夫（1868—1962）、庞加莱、里斯（1880—1956）及外尔（1885—1955）. 1914 年豪斯多夫的著作《点集论纲要》介绍了拓扑空间的公理化基础，从而开创了拓扑学作为基础数学的一个分支的全面研究.

几乎整个 20 世纪，拓扑学主要作为基础数学的一个分支而加以发展. 然而，在近年来，拓扑学的应用戏剧性地增长. 我们将在以后各章展望这两方面的前景.

在本章其余各节，我们回顾某些涉及集合、实数系、关系以及函数的基本论题. 它们在全书中起着重要的作用. 这些内容的详细阐述可以在一些介绍基础数学的教科书中找到，例如 [Blo] 和 [Hum].

0.3 集合及其运算

在本节，我们考虑集合以及它们之间的关系与运算.

我们在全书使用建立集合的标准表示法来定义集合. 我们采用术语**元素**，它的含义是集

合的成员，记为 $x\in A$，表示 x 为 A 的一个元素．在拓扑学中，我们所见到的大部分集合都是点集，因此在那些场合，我们交替使用元素和点这两个名称．不包含元素的集合，称为**空集**；我们用 $\varnothing$ 来表示它.

我们用 $\mathbf{R}$ 代表实轴或实数集．我们使用的 $\mathbf{R}$ 的重要子集，有正实数集 $\mathbf{R}^+$、整数集 $\mathbf{Z}$、正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 以及有理数集 $\mathbf{Q}$．我们约定，实数系的所有基本代数性质和有序性都成立.

人们把上述这一性质（有序性）表述为，每一对实数之间有一个无理数和一个有理数．这一性质在探索直线的拓扑结构时是很有用的．由这个性质可得出，存在一个任意接近于每一个实数的有理数．因此人们说，有理数集在 $\mathbf{R}$ 中是稠密的（见 2.1 节）．类似地，无理数集在 $\mathbf{R}$ 中也是稠密的.

另一个性质是，每一个实数是区间 $[n, n+1]$ 上的一个元素，其中 n 是整数.

实数系的一个十分确定的性质是**上确界性质**：$\mathbf{R}$ 的每一个子集向上有一个上确界．与这个性质等价的是**下确界性质**：$\mathbf{R}$ 的每一个子集向下有一个下确界．一个集合 A 的上确界与下确界分别用 $\mathrm{lub}(A)$、$\mathrm{glb}(A)$ 来表示.

对于 $\mathbf{R}$ 的各种区间，我们使用以下标准符号：

$$(a, b) = \{x\in\mathbf{R} \mid a<x<b\} \qquad [a, b] = \{x\in\mathbf{R} \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$[a, b) = \{x\in\mathbf{R} \mid a\leqslant x<b\} \qquad (a, b] = \{x\in\mathbf{R} \mid a<x\leqslant b\}$$
$$(a, \infty) = \{x\in\mathbf{R} \mid a<x\} \qquad [a, \infty) = \{x\in\mathbf{R} \mid a\leqslant x\}$$
$$(-\infty, b) = \{x\in\mathbf{R} \mid x<b\} \qquad (-\infty, b] = \{x\in\mathbf{R} \mid x\leqslant b\}$$

区间 (a, b)，$(-\infty, b)$，(a, ∞) 称为**开区间**；$[a, b]$，$(-\infty, b]$，$[a, \infty)$ 称为**闭区间**；$[a, b)$，$(a, b]$ 称为**半开区间**．形如 $[a, b]$ 的区间又称为**有界闭区间**.

对于集合 A 与 B，如果 A 的每一个元素也是 B 的元素，则称 A 是 B 的一个**子集**，记为 $A\subset B$．若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则集合 A 与 B **相等**，记为 $A=B$．若 $A\subset B$，且 $A\neq B$，则称集合 A 是 B 的**真子集**.

我们经常要处理集族，特别是加标集族，它们的定义如下：

定义 0.1　设 D 是一个集合，假定对于 D 中的每个元素 d，有一个集合 S_d．对于每一个 $d\in D$，由 S_d 组成的族 C，称为**加标集族**，或**由 D 加标的集族**．我们把 D 作为是集族的**加标集**．用 $\{S_d\}_{d\in D}$ 表示集族 C，当加标集自明或不需要详细说明时，只须用 $\{S_d\}$ 表示.

例 0.1　设 T 是阿肯色州市镇的集合，对于每个 $t\in T$，设 B_t 是在市镇 t 开业的理发师的集合．设集合 B_t 与 $B_{t'}$ 共有一个理发师，如果一个理发师既在市镇 t 又在市镇 t' 开业．对于表示在阿肯色州的一个市镇开业的理发师的集族中的每一个集合，集族 $\{B_t\}_{t\in T}$ 是理发师集合的集族.

加标集族 $\{S_d\}_{d\in D}$ 的一种特殊情况，出现于加标集是正整数的一个集合 $D=\{m, m+1, \cdots, n\}$．此时，我们也把加标集族记为 $\{S_d\}_{d=m}$．还可能出现 $m=-\infty$ 或 $m=\infty$ 的情况.

定义 0.2　如果对所有的 d，$S_d+1\subset S_d$，则称集族 $\{S_d\}_{d=m}^{n}$ 为**嵌套集族**.

例 0.2　当 $n\in\mathbf{Z}^+$ 时，区间套 $[-1/n, 1/n]$ 是一个嵌套集族.

定义 0.3

(1) 设 U，V 是集合，U 与 V 的**并集**为

$$U \cup V = \{x | x \in U \text{ 或 } x \in V\}.$$

而 U 与 V 的**交集**为

$$U \cap V = \{x | x \in U \text{ 且 } x \in V\}.$$

(2) 设 $\{U_d\}_{d\in D}$是一个加标集族，则 U_d 的**并**是集合

$$\bigcup_{d\in D} U_d = \{x | x\in U_d, \text{对于某一个 } d\in D\}.$$

而 U_d 的**交**是集合

$$\bigcap_{d\in D} U_d = \{x | x\in U_d, \text{对于任意 } d\in D\}.$$

我们还分别用$\bigcup U_d$ 与$\bigcap U_d$ 来记并与交. 我们把这种类型的并称为**任意并**，把这种类型的交称为**任意交**.

例 0.3 设 $\{B_t\}_{t\in T}$是例 0.1 中理发师的集族. 那么 $\bigcup_{t\in T} B_t$ 是在阿肯色州某市镇开业的理发师的集合. 若 $\bigcap_{t\in T} B_t$ 不是空集，则在这个交集中的每个理发师在阿肯色州的所有市镇都开业.

例 0.4 对于 $\mathbf{R}^+$ 中的每个 r，若 $U_r=[-r, r]$，那么 $\bigcup_{r\in \mathbf{R}^+} U_r=\mathbf{R}$，且 $\bigcap_{r\in \mathbf{R}^+} U_r= \{0\}$.

若 $\{U_d\}_{d\in D}$的加标集是一个整数集，$D=\{m, m+1, \cdots, n\}$，则我们还把集族的并与交分别表示为$\bigcap_{d=m}^{n} U_d$ 与$\bigcap_{d=m}^{n} U_d$. 除了 $m=-\infty$及 $m=\infty$的情况，我们称为**有限并**与**有限交**.

定义 0.4

(1) 设 A，B 是集合，若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 是**分离集**或**不相交集**.

(2) 若 $\{A_d\}_{d\in D}$是一个集族，而在此集族中的每一对集合是不相交的，那么，我们称此集族中的集合是**互不相交**或**相互分离**的.

当我们在证明一个集合是特定子集族的一个并集时，下列引理很有帮助：

引理 0.5 (并引理) 设 X 是一个集合，C 是 X 的一个子集族. 假定对于每一个 $x\in X$，在 C 中有一个集合 A_x，使得 $x\in A_x$，那么，$\bigcup_{x\in X} A_x=X$. (见图 0.13.)

证明 我们证明 $\bigcup_{x\in X} A_x\subset X$，以及 $X\subset \bigcup_{x\in X} A_x$. 首先，由于每个 A_x 是 X 的一个子集，于是，$\bigcup_{x\in X} A_x\subset X$.

再设 $y\in X$，那么，在 C 中存在 A_y，使得 $y\in A_y$. 因此 $y\in A_y\subset \bigcup A_x$. 由于 $y\in X$ 蕴涵 $y\in \bigcup A_x$，于是，$X\subset \bigcup A_x$，因此$\bigcup A_x=X$. ■

例 0.5 考虑 $\mathbf{R}$ 中的一个区间套 $C=\{[s, s+1]\}_{s\in \mathbf{Z}}$. 对于某一个 $s\in \mathbf{Z}$，每个 $x\in \mathbf{R}$，x 是 $[s, s+1]$ 的一个元素，因而，并引理蕴涵 $\mathbf{R}$ 是 C 中区间的并. (见图 0.14.)

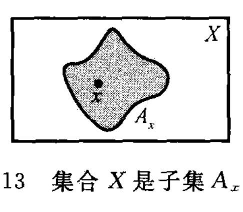


图 0.13 集合 X 是子集 A_x 的并

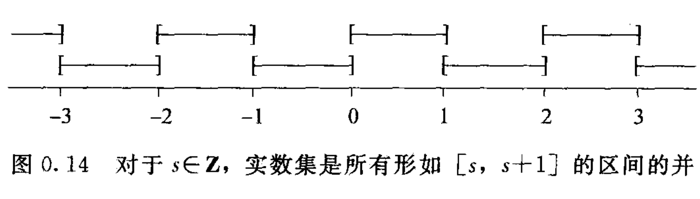


图 0.14 对于 $s\in \mathbf{Z}$，实数集是所有形如 $[s, s+1]$ 的区间的并

定义 0.6　已知两个集合 A 与 B，B 相对于 A 的**补集**为集合 $A-B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$.

B 相对于 A 的补集是 A 的子集. 例如，若 $A\subset B$，则 $A-B=\varnothing$，若 A 与 B 是不相交集，则 $A-B=A$.（见图 0.15.）

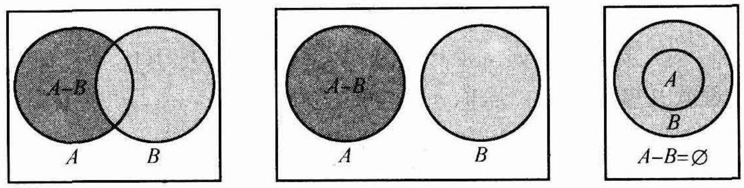


图 0.15　B 相对于 A 的补集的各种情况

在随后的各章中，我们常常在一个固定的集合 X 内进行运算. 此时，给定 X 的一个子集 B，我们将"B 相对于 A 的补集"简称为"B 的补集".

B 相对于 A 的补集，也称为 A 与 B 的**差集**，在数学文献中，有时表示为 $A\setminus B$.

定义 0.7　已知两个集合 A 与 B，我们定义 A 与 B 的**积**为集合

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,b\in B\}.$$

$A\times B$ 的元素是元素的序偶，一个来自 A，另一个来自 B.

重要注释　(a,b) 常用于表示 $\mathbf{R}$ 中的一个区间，也用于表示积 $A\times B$. 具体情况根据上下文的意义而定.

注意，若 A 有 m 个元素，B 有 n 个元素，那么 $A\times B$ 有 $m\times n$ 个元素. 我们仍然对有限个集合进行求积的运算，定义如下：

定义 0.8　集合 A_1，A_2，…，A_n 的**积**是集合

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)\,|\,a_k\in A_k,k=1,2,\cdots,n\}.$$

积的元素是 n 维有序串，各来自 A_k.

以下是某些与集合、上述关系和运算有关的重要规律：

定理 0.9　对于集合 A，B，C，以下法则成立：

分配律：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$
$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

德·摩根律：

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$
$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

0.4　欧几里得空间

在拓扑学中最常用的一种集合是 n 维欧几里得空间（有时简称为欧氏空间）.

平面是实数序偶的集合，记为 $\mathbf{R}^2$，

$$\mathbf{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

因此 $\mathbf{R}^2$ 是积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$（见图 0.16）.

通常，$\mathbf{R}^n$ 是 n 条实数轴拷贝的积. 它是实数 n 元串的集合

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

我们称 $\mathbf{R}^n$ 为 ***n* 维欧几里得空间**，简称 ***n* 维空间**. 点 $(0, 0, \cdots, 0)\in\mathbf{R}^n$ 称为**原点**，记为 O.

在 $\mathbf{R}^n$ 中测量距离的标准方法是用**欧氏距离公式**，它的定义为：对于 $P=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 与 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$，$p$ 与 q 之间的距离为

$$d(p,q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+\cdots+(p_n-q_n)^2},$$

对于 $\mathbf{R}^2$ 的情况，如图 0.17 所示.

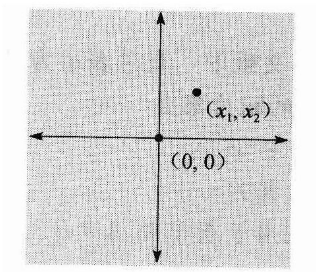


图 0.16 平面 $\mathbf{R}^2=\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2\in\mathbf{R}\}$

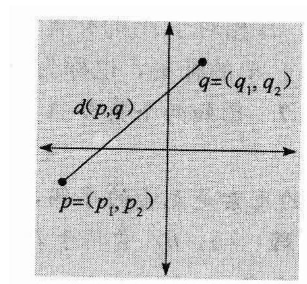


图 0.17 在 $\mathbf{R}^2$ 中测量距离

欧氏距离公式满足以下 3 个重要性质，因此被称为度量：

(1) 对于所有的 p，$q\in\mathbf{R}^n$，$d(p, q)\geqslant 0$. 当且仅当 $p=q$ 时，$d(p, q)=0$.

(2) 对于所有的 p，$q\in\mathbf{R}^n$，$d(p, q)=d(q, p)$.

(3) 对于所有的 p，q，$r\in\mathbf{R}^n$，$d(p, r)\leqslant d(p, q)+d(q, r)$.

在第 5 章，我们将讨论度量及它们与拓扑学的关系. 我们把每个 $\mathbf{R}^n$ 中的 x 看作是 n 维空间中的一个点，也可以认为是 n 维空间中以原点为起点的一个向量. 无论何种情况，我们都用 $|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ 定义 x 的**模**. 我们既可以认为 x 的模是原点到点 x 的距离，也可以认为它是向量的长度.

定义 0.10 对于集合 $A\subset\mathbf{R}^n$，如果存在 $b\in\mathbf{R}$，使得对于所有 $x\in A$，都有 $|x|\leqslant b$，则称 A 是**有界集**.

若集合 $A\subset\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n$ 是有界集，则存在 $d^*\in\mathbf{R}$，使得对于所有的 p，q，都有 $d(p, q)\leqslant d^*$.

定义 0.11 对于集合 $A\subset\mathbf{R}^n$，如果对于所有的 p，$q\in A$，p 与 q 之间的线段都在 A 中，则称 A 是**凸集**.

例如，在图 0.18 中，集合 A 与 B 是凸集，而集合 C 不是凸集，由于在 C 中有一对点，它们所连的线段不位于 C 中.

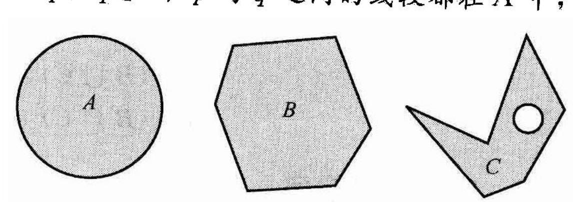


图 0.18 集合 A 与 B 在 $\mathbf{R}^2$ 中是凸集，而集合 C 不是凸集

定义 0.12

(1) $\mathbf{R}^n$ 中的一个**半空间**是满足线性不等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant b$$

的点（x_1，x_2，…，x_n）的集合，其中 b 和每个 a_i 都是实数，且 a_i 中至少有一个不为零.

(2) $\mathbf{R}^n$ 中的一个**可剖分空间**是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界子集，它是一些半空间的交集.

在图 0.19 中，我们图示了 1 维可剖分空间、2 维可剖分空间、3 维可剖分空间. 一个 1 维可剖分空间是一条线段，一个 2 维可剖分空间是一个多边形. 它的边界由顶点和边组成. 一个 3 维可剖分空间有一个以多边形组成的曲面，这些多边形在顶点和边处相连.

定义 0.13　记为 S^n 的 ***n* 维球面**是在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中与原点距离为 1 的点的集合，因此，

$$S^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\,|\,x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}.$$

1 维球面 S^1 亦称为**圆周**，2 维球面 S^2 简称**球面**.（见图 0.20.）

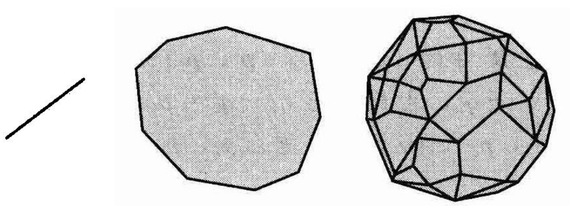


图 0.19　1 维、2 维、3 维可剖分空间

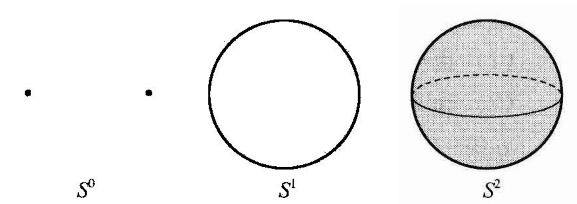


图 0.20　0 维球面、1 维球面（圆周）和 2 维球面

若 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n+1})$ 是 n 维球面上的一个点，则点 $-x=(-x_1,\ -x_2,\ \cdots,\ -x_{n+1})$ 是 x 的**对心点**（**对径点**），或与 x 对心的点. 因此，x 的对心点是 n 维球面上通过原点与 x 相对的那个点.

定义 0.14　***n* 维球**记为 B^n，定义为集合

$$B^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\,|\,x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1\}.$$

2 维球就是**圆盘**.

此外，***n* 维开球** $\mathring{B}^n$ 定义为集合

$$\mathring{B}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\,|\,x_1^2+\cdots+x_n^2<1\}.$$

2 维开球称为**开圆盘**.

0.5　关系

定义 0.15　给定集合 X 和 Y.

(1) ***X* 与 *Y* 之间的关系**，是积 $X\times Y$ 的一个子集 R. 对于一个关系 R，若 $(x,\ y)\in R$，则称 x 与 y **有关系**，记为 xRy.

(2) X 与 X 之间的关系，称为 ***X* 上的一个关系**.

在数学上广泛使用的一种重要关系是等价关系，定义如下.

定义 0.16　X 上的一个关系～称为**等价关系**，如果对 X 中的 a，b，c，满足以下性质：

(1) $a\sim a$（自反性）；

(2) $a\sim b$ 蕴涵 $b\sim a$（对称性）；

(3) $a\sim b$ 且 $b\sim c$ 蕴涵 $a\sim c$（传递性）.

例 0.6　设 D 是此时（美国）衣阿华州杜标克市所有狗的集合. 若狗 a 与狗 b 有同一个母

亲，记为 $a \sim b$. 我们证明，～是在 D 上的一个等价关系. 当然每一条狗与自己本身有关系，因此自反性成立. 然而，如果巴特斯科奇与宾戈有同一个母亲，那么宾戈与巴特斯科奇就有同一个母亲，因此对称性成立. 由此得出，～是一个等价关系.

例 0.7 仍然设 D 是此时衣阿华州杜标克市所有狗的集合. 但是现在定义一个关系 L 为 aLb，假定狗 a 曾经舔过狗 b. 这种关系虽然没有数学的确实性，但自反性很可能成立. 尽管每条狗一次又一次舔过自己，但布基舔过戴西并不意味着反过来戴西舔过布基，所以对称性不一定成立. 同样，即使布基舔过戴西，戴西舔过佐伊，但并不意味着布基舔过佐伊. 所以所需的传递性也不符合. 因此，关系 L 不一定是等价关系.

例 0.8 在 $\mathbf{R}^2$ 中定义 $(p_1, p_2) \sim (q_1, q_2)$，如果 $p_1+p_2=q_1+q_2$.

我们证明上述～是一个等价关系.

(1) 由于 $p_1+p_2=q_1+q_2$，由此得出，对于所有在 $\mathbf{R}^2$ 中的 (p_1, p_2)，$(p_1, p_2) \sim (p_1, p_2)$.

(2) 如果 $(p_1, p_2) \sim (q_1, q_2)$，则 $p_1+p_2=q_1+q_2$，由此得出 $q_1+q_2=p_1+p_2$，因而 $(q_1, q_2) \sim (p_1, p_2)$. 因此，对于所有在 $\mathbf{R}^2$ 中的 (p_1, p_2)，(q_1, q_2)，若 $(p_1, p_2) \sim (q_1, q_2)$，则 $(q_1, q_2) \sim (p_1, p_2)$.

(3) 最后设 $(p_1, p_2) \sim (q_1, q_2)$，$(q_1, q_2) \sim (r_1, r_2)$. 则 $p_1+p_2=q_1+q_2=r_1+r_2$，由此得出 $(p_1, p_2) \sim (r_1, r_2)$ 因此，对于所有在 $\mathbf{R}^2$ 中的 (p_1, p_2)，(q_1, q_2)，(r_1, r_2)，若 $(p_1, p_2) \sim (q_1, q_2)$，$(q_1, q_2) \sim (r_1, r_2)$，那么 $(p_1, p_2) \sim (r_1, r_2)$. 因此，～是一个等价关系.

已知 $\mathbf{R}^2$ 中的一个点 (a_1, a_2)，我们能否确认它是否与其中所有的点等价？为使 (x_1, x_2) 与 (a_1, a_2) 等价，我们必须要有 $x_1+x_2=a_1+a_2$. 于是在平面上的所有点 (x_1, x_2)，与位于直线 $x_1+x_2=a_1+a_2$ 上的点 (a_1, a_2) 等价. 从而，给定任何直线 $x_1+x_2=c$，位于此直线上的每一个点与同一直线上的其他点等价.

例 0.8 所描述的直线族把平面分拆为分离的子集. 用下述定义来明确这一想法.

定义 0.17 集合 X 的一个**分拆**是集合 X 一个相互分离的子集族，它的并是 X.

正如在例 0.8 中一样，在集合 X 上的一个等价关系～确定了这个集合的一个分拆. 对于每个 $x \in X$，我们定义 $[x]=\{p \in X \mid p \sim x\}$. 我们称 $[x]$ 为**在～下 x 的等价类**；它是由 X 的在等价关系～下与 X 等价的所有元素所构成的集合. 在～下所有等价类的族是 X 的一个分拆. 对于例 0.8 中的等价关系，它的等价类是在 $\mathbf{R}^2$ 中的直线 $x_1+x_2=c$，如图 0.21 所示.

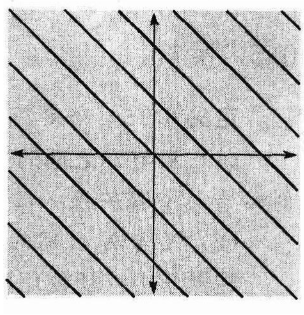


图 0.21 平面分拆为直线 $x_1+x_2=c$

我们还可以逆转这一过程. 集合 X 的一个分拆，确定 X 上的一个等价关系，我们认为 X 的两个元素是有关系的，如果它们包含于此分拆的同一子集. 这产生一个等价关系，而所产生的等价类是此分拆中原来的那些集合.

例 0.9 回到例 0.6，我们立即发现，在这里确定的等价关系，把杜标克市狗的种群分为一些子集，其中每个子集是在杜标克市特定母狗所有后裔的集合.

0.6 函数

与数学的其他领域中一样，函数在拓扑学中也起着重要的作用．在本节，我们回顾与函数有关的基本定义和性质．

定义 0.18 设 X 与 Y 是集合，X 到 Y 的一个**函数** f 是 X 与 Y 之间的一个关系，使得 X 中的每一个 x 与 Y 中唯一的 y 对应．我们记 $f(x)=y$，并称 **y 是在 f 下 x 的象**．集合 X 称为 f 的**定义域**，Y 称为 f 的**值域**．

我们用记号 $f: X\to Y$ 表示 f 是从 X 到 Y 的一个函数．我们亦称函数 $f: X\to Y$ 为一个**映射**，并称 **f 把 X 映射到 Y**．此外，若 $f(x)=y$，则称 **f 把 x 映射到 y**．

定义 0.19 对于一个函数 $f: X\to Y$ 和 X 的一个子集 A，定义 **A 在 f 下的象**为集合

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), \text{对于某个 } x \in A\},$$

如图 0.22 所示．集合 $f(X)$ 称为定义域的象，亦称为 **f 的象**．

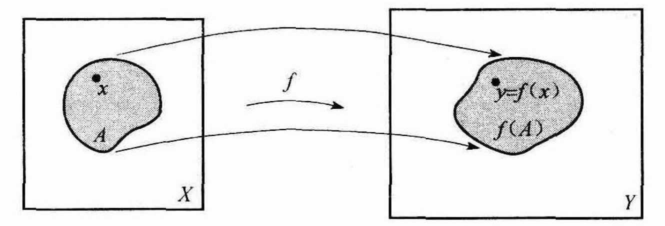


图 0.22　A 在 f 下的象

函数 $f: X\to Y$ 称为**常值函数**，如果它的象仅由单个点 $c\in Y$ 组成．此时，对于所有的 $x\in X$，$f(x)=c$．对于集合 X，X 上的**恒等函数**是由 $id_X(x)=x(x\in X)$ 定义的函数 $id_X: X\to X$．X 上的恒等函数恰好是把 X 中的每一点 x 映射到自身的函数．

定义 0.20 已知 $f: X\to Y$，点 $y\in Y$，定义 y 的**原象** $f^{-1}(y)$ 为集合 $\{x\in X \mid f(x)=y\}$，而已知 Y 的一个子集 W，定义 W 的**原象** $f^{-1}(W)$ 为集合 $\{x\in X \mid f(x)\in W\}$．

对于函数 $f: X\to Y$，点 y 的原象是在 X 中经 f 映射到 y 的点的集合．而集合 W 的原象，是 X 中经 f 映射到 W 上的点的点集．

例 0.10 若 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义为 $f(x)=x^2$，那么 $f^{-1}([0, 2])=[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$，而 $f^{-1}([1, 3])=[-\sqrt{3}, -1]\cup[1, \sqrt{3}]$．

下列定理叙述了象与原象、集合的运算之间的某些基本关系．在全书我们都使用这些运算和其他类似的运算．

定理 0.21 若 $f: X\to Y$ 是一个函数，A 与 B 是 X 的子集，那么

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$．

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$．

(3) $f(A)-f(B)\subset f(A-B)$．

定理 0.22 若 $f: X\to Y$ 是一个函数，V 与 W 是 Y 的子集，那么

(1) $f^{-1}(V\cup W)=f^{-1}(V)\cup f^{-1}(W)$．

(2) $f^{-1}(V\cap W)=f^{-1}(V)\cap f^{-1}(W)$.

(3) $f^{-1}(V-W)=f^{-1}(V)-f^{-1}(W)$.

定义 0.23

(1) 函数 f：$X\to Y$ 称为**一一对应的**或**单射**，如果对于每个 w，$x\in X$，$f(w)=f(x)$ 蕴涵 $w=x$. 因此，如果 f 把 X 的一对不同的元素映射到 Y 的一对不同的元素，则 f 是单射.

(2) 函数 f：$X\to Y$ 称为**映成**或**满射**，若 $f(X)=Y$. 即对于 Y 中的每一个 y，存在 X 中的一个 x，使得 f 把 x 映射到 y.

(3) 函数既是单射又是满射，称为**双射**或**双射函数**.

例 0.11 若 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义为 $f(x)=x^2$，那么 f 不是满射，由于 f 的象没有负数. 此外，f 不是单射，由于 $1\neq-1$，但 $f(1)=f(-1)$，f 的象为集合 $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.

例 0.12 若 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义为 $f(x)=3x+1$，那么我们证明 f 既是单射又是满射，因此它是一个双射.

首先，设 w，$x\in\mathbf{R}$，且 $f(w)=f(x)$，因此 $3w+1=3x+1$，于是 $3w=3x$，因而 $w=x$. 由于对于每个 w，x，$f(w)=f(x)$ 蕴涵 $w=x$，因此 f 是单射.

再假定 $y\in\mathbf{R}$，设 $x=\dfrac{y-1}{3}$，那么

$$f(x)=3\left(\frac{y-1}{3}\right)+1=y-1+1=y.$$

因此，对于每个 $y\in\mathbf{R}$，存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f(X)=Y$，因此 f 是满射.

例 0.13 若 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 定义为 $g(x)=(x, x)$，那么 g 是单射，由于 $g(w)=g(x)$ 蕴涵 $(w, w)=(x, x)$，因而 $w=x$. 但 g 不是满射，例如，$(0, 1)$ 不是 g 的象.

例 0.14 若 h：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 定义为 $h(x_1, x_2)=x_1$，那么 h 是满射，由于对于 $x\in\mathbf{R}$，我们有 $x=h(x, 0)$. 而另一方面，h 不是单射，由于尽管 $h(0, 0)=h(1, 0)$，但 $(0, 0)\neq(1, 0)$.

对于每个双射函数，我们联想起反函数，它的定义如下：

定义 0.24 f：$X\to Y$ 是一个双射函数，那么我们定义函数 f^{-1}：$Y\to X$，对于 $f^{-1}(y)$，有唯一的 $x\in X$，使得 $f(x)=y$. 函数 f^{-1} 称为 f 的**反函数**.

例 0.15 在例 0.12 中，由 $f(x)=3x+1$ 定义的函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个双射. f 的反函数 f^{-1}：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义为

$$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{3}.$$

有时我们需要把函数 f：$X\to Y$ 限定为定义域 X 的一个子集，这可以通过以下定义实现：

定义 0.25 已知 f：$X\to Y$，及 X 的一个子集 A，**f 对于 A 的约束**是对于每个 $x\in A$，由 $f|_A(x)=f(x)$ 定义的函数 $f|_A$：$A\to Y$.

例 0.16 考虑由 $f(x)=\sin x$，并设 $A=\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\subset R$. 注意 f 不是单射，而 $f|_A$ 却是单射. 事实上，$f|_A$ 是双射，而它的反函数是由 $f_A^{-1}A(x)=\sin^{-1}(x)$ 给出.

已知一个把 X 映射到 Y 的函数，及一个把 Y 映射到 Z 的函数，我们可以把这两个函数复

合，得到一个把 X 映射到 Z 的函数．确切地说：

定义 0.26　已知 f：$X\to Y$ 及 g：$Y\to Z$，g 关于 f 的**复合函数**是由 $g\circ f(x)=g(f(x))$ 定义的函数 $g\circ f$：$X\to Z$.

例 0.17　若 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由 $f(x)=3x^2$ 定义，而 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由 $g(x)=5-2x$ 定义，那么 $g\circ f$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是由

$$g\circ f(x)=5-2(3x^2)=5-6x^2$$

定义的函数.

若 f：$X\to Y$ 是一个双射函数，f^{-1}：$Y\to X$ 是它的反函数，那么由 f^{-1}的定义，得到对于所有 $x\in X$，$f^{-1}\circ f(x)=x$，对于所有 $y\in Y$，$f\circ f^{-1}(y)=y$.

直觉上，我们认为，如果集合 X 的元素可以从 1 一直数到某一个正整数为止，此集合就是**有限集**．利用双射函数，我们可以让这一想法精确化：

定义 0.27　若 X 是一个空集，或者对于某个 $n\in\mathbf{Z}^+$，有一个双射 f：$\{1, 2, \cdots, n\}\to X$，则 X 是**有限集**．一个不是有限集的集合，称为**无限集**.

一种特殊类型的无限集是可数无限集．例如正整数集 $\mathbf{Z}^+$.

定义 0.28　若存在一个双射 f：$\mathbf{Z}^+\to x$，则集合 x 是一个可数无限集．有限集或可数无限集，称为**可数集**．非可数集称为**不可数集**.

整数集 $\mathbf{Z}$ 和有理数集 $\mathbf{Q}$ 都是可数集．实数集 $\mathbf{R}$ 和无理数集都是不可数集.

以下提供许多与子集、并集以及有限集和可数集的乘积有关的重要事实：

定理 0.29

(1) 有限集的子集是一个有限集.

(2) 有限个有限集的并集是一个有限集.

(3) 有限集的乘积是一个有限集.

(4) 可数集的子集是一个可数集.

(5) 可数个可数集的并集是一个可数集.

(6) 可数集的乘积是一个可数集.

定义 0.30　已知集合 X，X 中的**一个序列**是函数

$$f:\ \mathbf{Z}^+\to X.$$

函数 f 的定义域称为**序列的定义域**.

已知一个序列 f：$\mathbf{Z}^+\to X$，通常记为 $f(n)$，并把序列表示为 $(x_1, x_2, \cdots)$ 或 (x_n)，认为此序列是 X 元素的可数无限表，在表中允许重复.

序列的值域可以是无限集，如序列 (1，1/2，1/3，…)；也可以是有限集，如序列 (1，0，1，0，…).

定义 0.31　给定序列 (x_n) 与序列 (y_n)，我们说 (y_n) 是 (x_n) 的子序列，如果按顺序 $j_1<j_2<\cdots<j_n<\cdots$ 排列，使得对于所有 $n\in\mathbf{Z}^+$，都有 $y_n=x_{j_n}$．正整数序列 (j_n) 称为子序列 $(y_n)=(x_{j_n})$ 的**指标序列**.

例 0.18　序列 (2，4，6，8，…) 是序列 (1，2，3，4，…) 的子序列．而 (1，1，3，3，5，5，…) 不是 (1，2，3，4，…) 的子序列.

第1章 拓扑空间

拓扑空间与它们之间的连续函数，是拓扑学领域研究的主要对象．在本章，我们引进拓扑空间以及与它们有关的某些重要概念，其中包括开集（1.1节）、基（1.2节）和闭集（1.3节）．此外，在1.4节，我们将介绍拓扑空间的两个应用，一个涉及数字图像处理，另一个与生物学的进化相近性有关．

1.1 开集与拓扑学的定义

长期以来，在拓扑学领域正式形成之前，数学家就已使用过开集的概念，一个简单的例子就是在实轴上的一个开区间．而随着时间的推移，人们认识到，实轴上开区间具有的许多性质，任何集合的某种类型的子集也有．最终提炼出最根本的性质，称为拓扑的开集族的概念，演变成下列定义：

定义 1.1 设 X 是一个集合，X 上的**拓扑** $\mathcal{T}$ 是 X 的一个子集族，每个称为一个**开集**，满足：

(1) $\varnothing$ 与 X 是开集；

(2) 有限个开集的交集是一个开集；

(3) 任何多个开集的并集是一个开集．

集合 X 连同 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 称为一个**拓扑空间**．

因此，集合 X 的一个子集族是 X 上的一个拓扑，如果它包括空集和 X．因而，集族中集合的有限交或任意并，也在此集族之中．

重要注记 组成一个拓扑空间有两个要件：一是集合 X，另一是构成 X 上的一个拓扑的，X 的一个子集族 $\mathcal{T}$．为了严格起见，我们应该把一个拓扑空间称为一个序偶 $(X, \mathcal{T})$，但为了简化表示法，我们按照通常的习惯，把集合 X 称为一个拓扑空间，并不言自明地允许理解为在 X 上有一个拓扑．

如果你熟悉实轴上的开区间或平面上的开圆盘，就会对开集究竟像什么有直觉的了解了．虽然这些集合是开集，即在实轴或实平面上的标准拓扑，但此时重要的是避免充当开集的角色．如果我们适当地选取拓扑的话，肯定可以使任何集合成为一个开集．让我们看以下几个例子．

例 1.1 设 X 是 3 个元素的集合 $\{a, b, c\}$．我们考虑图 1.1 所示的 X 的 4 个不同的子集族，并考察其中哪些构成拓扑？在每一种情况下，假定集族包括空集和每个由圆周或椭圆所围的集合．

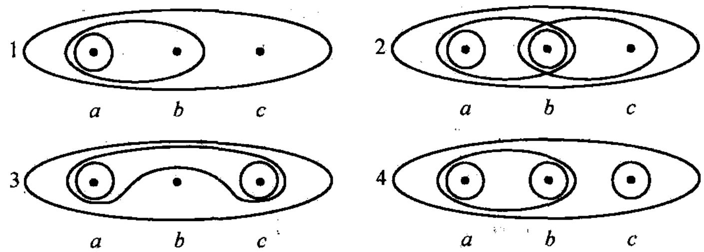


图 1.1　哪些集族是 $X=\{a, b, c\}$ 上的拓扑

$\varnothing$与 X 都在这 4 个集族中．我们发现，对于集族 1，2 和 3 来说，集族中集合的交集也在原集族之中，集族中集合的并集也仍然在原集族之中．因此，集族 1，2 和 3 构成 X 上的拓扑．然而对于集族 4 来说，集合 $\{a\}$，$\{c\}$ 都在集族之中，但它们的并 $\{a, c\}$ 却不在这个集族中，因此集族 4 不构成 X 上的拓扑．

例 1.2　设 X 是一个非空集，定义$\mathcal{T}=\{\varnothing, X\}$．注意，$\mathcal{T}$满足构成一个拓扑所需要的全部 3 个条件．然而如果我们去掉其中任何一个集合，就不再构成拓扑．因此，$\{\varnothing, X\}$ 是在 X 上可以定义的最小的拓扑，称为 X 上的**平凡拓扑**．

例 1.3　设 X 是一个非空集，且设$\mathcal{T}$是 X 的所有子集的集族．显然这是一个拓扑，由于 X 的子集的并集与交集，都是 X 本身的子集，因而在集族$\mathcal{T}$中．我们称这种拓扑为 X 上的**离散拓扑**．这是在 X 上可以定义的最大的拓扑．

例 1.4　在实轴 $\mathbf{R}$ 上定义一个拓扑，它的开集是空集，且在 $\mathbf{R}$ 中的每一个集合，具有有限的补集（见图 1.2）．例如，$U=\mathbf{R}-\{0, 3, 7\}$ 是一个开集．我们称这种拓扑为 $\mathbf{R}$ 上的**有限补拓扑**，并记为 $\mathbf{R}_{fc}$．

图 1.2　在 $\mathbf{R}$ 上有限补拓扑中的一个开集

我们检验 $\mathbf{R}_{fc}$是否是一个拓扑：

（1）空集是一个开集．由于 $\mathbf{R}$ 的补集是空集，因而是有限集，于是 $\mathbf{R}$ 是一个开集．

（2）有限个开集的交是否是开集？假定我们有开集的有限集族 U_1，…，U_n，如果其中任何一个是空集，那么交集是空集，因而是一个开集．于是假定每个 U_i 都是非空集．每个 U_i 有一个有限的补集，因而

$$U_1=\mathbf{R}-F_1, U_2=\mathbf{R}-F_2, \cdots, U_n=\mathbf{R}-F_n,$$

其中每个 F_i 都是一个有限集．至此，$\bigcap_{i=1}^{n} U_i=\mathbf{R}-\bigcup_{i=1}^{n} F_i$．由于有限个有限集的并是一个有限集，于是 $\bigcap_{i=1}^{n}$ 是 $\mathbf{R}$ 的具有有限补集的一个子集，因而是一个开集．因此，有限个开集的交是一个开集．

（3）开集的并是否为开集？设 $\{U_\alpha\}$ 是开集的一个族，因此每个 U_α 要么是空集，要么有一个有限的补集．如果每个 U_α 都是空集，那么 $\bigcup U_\alpha$ 是空集，因而是一个开集．于是，可设

至少有一个 U_α，例如 $U_{\alpha'}$ 是空集. 集合 $U_{\alpha'}$ 有一个有限的补集. 注意到 $U_{\alpha'} \subset \bigcup U_\alpha$，由于 $U_{\alpha'}$ 有一个有限的补集，由此得出 $\bigcup U_\alpha$ 有一个有限的补集. 因此 $\bigcup U_\alpha$ 是一个开集. 因此，任意多个开集的并集是一个开集.

给定任意非空集 X，类似地，我们可以定义 X 上的有限补拓扑，记为 X_{fc}.

在 $\mathbf{R}$ 上我们已经定义了 3 种拓扑：平凡拓扑、有限补拓扑和离散拓扑. 对于这 3 种拓扑，有最少开集的平凡拓扑，包含在有限补拓扑之中，而后者本身又包含在离散拓扑之中. 也就是说，有限补拓扑中的每个开集，也是此离散拓扑中的一个开集，但反之则不然. 我们说离散拓扑严格细于有限补拓扑. 这可以比喻为石块的碎屑. 石块越细碎，结合在一起获得开集的方式就越多. (见图 1.3.)

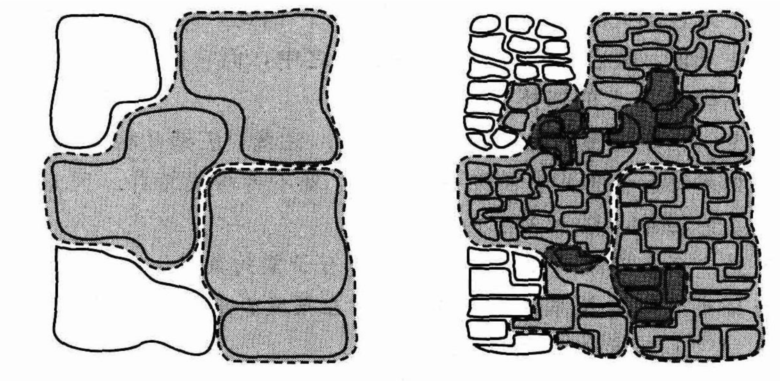


图 1.3　石块越细碎，由它构建的开集的数量越大

更一般地，我们有如下定义：

定义 1.2　设 X 是一个集合，$\mathcal{T}_1$，$\mathcal{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑. 若 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$，则称 $\mathcal{T}_2$ **细于** $\mathcal{T}_1$，而称 $\mathcal{T}_1$ **粗于** $\mathcal{T}_2$. 此外，若 $\mathcal{T}_2$ 细于 $\mathcal{T}_1$，但不等于 $\mathcal{T}_1$，则称 $\mathcal{T}_2$ **严格细于** $\mathcal{T}_1$. **严格粗于**可类似地定义.

通常，在一个已知集合 X 上的两个拓扑未必是可比较的. 每个拓扑可以包含开集，而这些集合在另一个拓扑中则不是开集，因而无论哪个拓扑都不细于另一个. (见练习 1.5.)

为了简化下面的讨论，我们采用下列定义：

定义 1.3　设 X 是一个拓扑空间，且 $x \in X$. 一个包含 x 的开集 U 称为 x 的一个**邻域**.

以下定理为我们提供了确认一个集合是否为开集的一个特别有用的方法.

定理 1.4　设 X 是一个拓扑空间，而 A 是 X 的一个子集. 那么，当且仅当对于每个 $x \in A$，A 是 X 中的开集，存在 x 的一个邻域 U，使得 $x \in U \subset A$. (见图 1.4.)

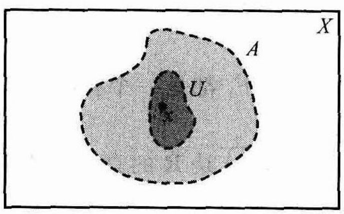


图 1.4　集合 A 是 X 中的开集，当且仅当对于每个 A 中的点，有一个位于 A 中的邻域 U

证明　首先假定 A 是 X 中的一个开集，且 $x \in A$. 如果我们设 $U = A$，那么对于满足 $x \in U \subset A$ 的 x，U 是它的一个邻域.

再设对于每个 $x \in A$，存在 x 的一个邻域 U_x，使得 $x \in U_x \subset A$. 按照并引理（引理 0.5），就得到 $A = \bigcup_{x \in A} U_x$. 因此

A 是开集的一个并，因而是开集. ■

按照定义，在一个拓扑空间中的集合是开集，如果它是定义此拓扑的集族的一个成员. 然而，定理 1.4 为我们提供了一个直觉的观念，一个集合是开集究竟意味着什么，特别是，如果集合的每个点，有一个同在此集合之中点的邻域，那么此集合就是开集.

1.1 节练习

1.1 确定在 $X=\{a, b\}$ 上所有可能的拓扑.

1.2 在有 3 个元素的集合 $X=\{a, b, c\}$ 上，平凡拓扑有 2 个开集，而离散拓扑有 8 个开集. 对于每个 $n=3, \cdots, 7$，要么找出在由 n 个开集组成的 X 上的一个拓扑，要么证明这样的拓扑不存在.

1.3 设$\mathcal{T}$为 X 上的拓扑，证明：当且仅当对于所有的 $x\in X$，$\{x\}\in\mathcal{T}$，$\mathcal{T}$是离散拓扑.

1.4 (1) 举一个空间的例子，它的离散拓扑与有限补拓扑相同.

(2) 作出一个猜想，对于怎样的一类集合，离散拓扑与有限补拓扑是一致的. 并对此猜想加以证明.

1.5 对于有 5 个元素的集合 $\{a, b, c, d, e\}$，找 3 个拓扑，使得第 1 个拓扑细于第 2 个，第 2 个细于第 3 个，离散拓扑与有限补拓扑除外. 找 X 上的一个拓扑，它与你所找到的前 3 个拓扑中的每一个都不可比.

1.6 定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑（通过在其中列出开集的方法），使得包含 $(0, 2)$ 与 $(1, 3)$，且包含尽可能少的开集.

1.7 设 X 是一个集合，并假定 $p\in X$. 证明：由$\varnothing$、X 及 X 中包含 p 的所有子集所构成的集族$\mathcal{T}$是 X 上的一个拓扑. 这种拓扑称为 X 上的**特殊点拓扑**，记为 PPX_p.

1.8 设 X 是一个集合，并假定 $p\in X$. 证明：由$\varnothing$、X 及 X 中不包含 p 的所有子集所构成的集族$\mathcal{T}$是 X 上的一个拓扑. 这种拓扑称为 X 上的**例外点拓扑**，记为 EPX_p.

1.9 设$\mathcal{T}$由$\varnothing$、$\mathbf{R}$ 及所有的区间 $(-\infty, p)$ 组成，其中 $p\in\mathbf{R}$. 证明$\mathcal{T}$是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑.

1.2 拓扑的基

在此前所有有关拓扑空间的例子中，我们都能够列出开集的整个集族. 这通常难以实现，所以代之以列出开集的较小集族，后者称为一个基，从而产生此集族余留下的开集.

定义 1.5 设 X 是一个集合，$\mathcal{B}$是 X 的一个子集族. 称$\mathcal{B}$是 X 上的**一个拓扑的基**当且仅当以下条件成立：

(1) 对于 X 中的每个点 x，在$\mathcal{B}$中存在 B，使得 $x\in B$.

(2) 若 B_1、B_2 在$\mathcal{B}$中，而 $x\in B_1\cap B_2$，则在$\mathcal{B}$中存在 B_3，使得 $x\in B_3\subset B_1\cap B_2$（见图 1.5）.

我们称在$\mathcal{B}$中的这些集合为**基元素**. 换句话说，成为一个基要满足两个条件：

(1) X 中的每个点包含于一个基元素之中.

(2) 在两个基元素之交集中的每个点，被包含于此交集的一个基元素所包含.

我们再来描述一个基是如何产生一个拓扑的. 先看有关基的以下两个例子.

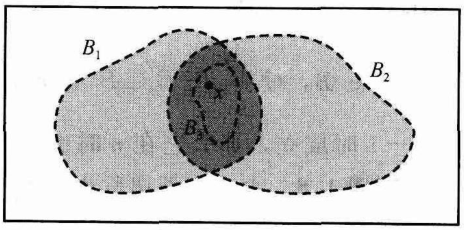


图 1.5 对于在基中两个集合之交集之中的每个点 x，在包含 x 的基中，存在包含于此交集之中的一个集合

例 1.5 在实轴 $\mathbf{R}$ 上，设 $\mathcal{B}=\{(a, b)\subset\mathbf{R}\mid a<b\}$

为 $\mathbf{R}$ 中开区间的集合. $\mathbf{R}$ 中的每个点当然包含于一个开区间中，因而包含于$\mathcal{B}$中的一个集合之中. 于是，如果两个开区间确实有交集，那么它们在一个开区间之中也有交集. 因此，在$\mathcal{B}$中两个集合交集中的一个点，包含于$\mathcal{B}$中的一个集合之中，从而包含于此交集之中. 因此$\mathcal{B}$是一个基.

例 1.6 设 X 是一个集合，并设$\mathcal{B}=\{\{x\}\mid x\in X\}$. 任一 $x\in X$ 位于$\mathcal{B}$中的集合 $\{x\}$ 之中，因此，$\mathcal{B}$作为基的第一个条件满足. 此外，$\mathcal{B}$中任一对不同的集是分离的，因此作为基的第二个条件自动满足. 所以$\mathcal{B}$是一个基.

在一个集合中有一个基有什么可取之处呢？它的好处是使我们容易定义一个拓扑.

定义 1.6 *设$\mathcal{B}$是一个集合 X 上的一个基. 获得由$\mathcal{B}$生成的拓扑$\mathcal{T}$的方法是，把这些开集定义为空集，以及任一与基元素的一个并集相等的集合.*

我们需要检验所得到的集族$\mathcal{T}$确实是一个拓扑，在此之前先看以下两个例子.

例 1.7 设 X 是一个非空集，而$\mathcal{B}=\{\{x\}\mid x\in X\}$. 在例 1.6 中，我们证明了$\mathcal{B}$是 X 上的一个拓扑的一个基. $\mathcal{B}$生成的拓扑$\mathcal{T}$是什么呢？注意，X 的每一个子集是与它的元素所对应的单点子集的并集. 因此 X 的每一个子集是$\mathcal{T}$中的一个开集，由此得出，$\mathcal{B}$生成了的 X 上的一个离散拓扑.

例 1.8 在实轴 $\mathbf{R}$ 上，设$\mathcal{B}=\{(a, b)\subset\mathbf{R}\mid a<b\}$. 在例 1.5 中，我们证明了$\mathcal{B}$是 $\mathbf{R}$ 上一个拓扑的一个基. 由$\mathcal{B}$所生成的这个拓扑称为 $\mathbf{R}$ 上的**标准拓扑**，且是实轴上最常用的拓扑. 在 $\mathbf{R}$ 上标准拓扑中的开集是开区间的并集. 当我们称 $\mathbf{R}$ 为一个拓扑空间时，除非另有所指，否则总是假定此拓扑是标准拓扑.

下面我们证明，由一个基所生成的这个拓扑确实是一个拓扑. 我们需要由下列引理入门.

引理 1.7 *设$\mathcal{B}$是一个基，假定 B_1, …, $B_n\in\mathcal{B}$，且 $x\in\bigcap_{i=1}^{n}B_i$，那么存在 $B'\in\mathcal{B}$，使得 $x\in B'\subset\bigcap_{i=1}^{n}B_i$.*

证明 我们用数学归纳法来进行证明. 从 $n=2$ 开始，由基的定义中的第二个条件可知，当 $n=2$ 时结论成立.

再设结论在 $n-1$ 时成立. 假定集合 B_1, …, B_n 在$\mathcal{B}$中，且 $x\in\bigcap_{i=1}^{n}B_i$，由归纳法可得出，存在 $B^*\in\mathcal{B}$，使得 $x\in B^*\subset\bigcap_{i=1}^{n-1}B_i$，而 $x\in B^*\cap B_n$；因此，由基的定义中的第二个条件可知，存在 $B'\in\mathcal{B}$，使得 $x\in B'\subset B^*\cap B_n$. 由于 $B^*\subset\bigcap_{i=1}^{n-1}B_i$，于是 $x\in B'\subset\bigcap_{i=1}^{n}B_i$. 因此，如果结论在 $n-1$ 时成立，那么它在 n 时也成立，用数学归纳法，引理得到证明. ∎

定理 1.8 *由一个基$\mathcal{B}$所生成的拓扑$\mathcal{T}$，是一个拓扑.*

证明 由定义，空集$\varnothing$在$\mathcal{T}$之中. 由于 X 中的每一个点都包含于某个基元素之中，于是 X 是所有基元素的并集，因而在$\mathcal{T}$之中.

然后，我们来证明$\mathcal{T}$中集合的一个有限交集在$\mathcal{T}$之中. 因此，设 $V=U_1\cap\cdots\cap U_n$，其中

每个 U_i 在$\mathcal{T}$之中．若任何一个 U_i 都是空集，那么在 V 中也是如此．于是在这种情况下，V 在$\mathcal{T}$之中．于是假定每个 U_i 是基元素的一个并集．我们再来证明 V 同样是基元素的一个并集．设 $x\in V$，那么对于所有的 i 有 $x\in U_i$．由于每个 U_i 是基元素的一个并集，所以存在一个基元素 B_i，使得对于每个 i，有 $x\in B_i\subset U_i$．于是，$x\in\bigcap_{i=1}^{n-1}B_i$；因此，由引理 1.7，存在一个基元素 B_x，使得 $x\in B_x\subset\bigcap_{i=1}^{n}B_i\subset V$．再由并引理（引理 0.5）得到 $V=\bigcup_{x\in V}B_x$，因而 V 是基元素的一个并集．因此，$\mathcal{T}$中集合的一个有限交集在$\mathcal{T}$之中．

最后，我们证明$\mathcal{T}$中集合的一个任意并集，也在$\mathcal{T}$之中．设 $V=\bigcup U_\alpha$，其中每个 U_α 要么是空集，要么是基元素的一个并集．若每个 U_α 是空集，那么 V 也是空集；另一方面，如果至少有一个 U_α 是非空集，那么 V 是基元素的一个并集，由于它是组成 U_α 基元素的并集．因此，$\mathcal{T}$中集合的一个任意并集在$\mathcal{T}$之中．

因此，集族$\mathcal{T}$是一个拓扑，我们不妨称它为是由基$\mathcal{B}$所生成的拓扑． ■

重要注记 一个基不仅生成一个拓扑，而且每个基元素本身也是由此基所生成的拓扑中的一个开集．

例 1.9 在 $\mathbf{R}$ 上设$\mathcal{B}=\{[a, b)\subset\mathbf{R}\mid a<b\}$．集族$\mathcal{B}$是 $\mathbf{R}$ 上一个拓扑的一个基（见练习 1.10）．我们称由此基所生成的拓扑为**下限拓扑**，由于每个基元素包含它的下限，这种拓扑记为 $\mathbf{R}_l$．

在 $\mathbf{R}_l$ 中，区间 $[0, 2)$ 和 $(0, 2)$ 都是开集．前者是开集，由于它是一个基元素；后者也是开集，由于它是基元素 $B_i=\left[\frac{1}{i}, 2\right)$ 的并集，其中 $i=1, 2, 3, \cdots$．

类似地，借助$\mathcal{B}=\{(a, b]\subset\mathbf{R}\mid a<b\}$我们可以定义 $\mathbf{R}$ 上的**上限拓扑**．

我们现在介绍了 6 种在实轴上的拓扑：标准拓扑、上限拓扑、下限拓扑、有限补拓扑、离散拓扑和平凡拓扑．当然，平凡拓扑是这些拓扑中最粗的拓扑，而离散拓扑是最细的拓扑．但是如何对其余的拓扑进行比较呢？我们要求读者在练习 1.13 中研究这个问题．

对整数集 $\mathbf{Z}$ 的情况，标准拓扑转为离散拓扑（在 3.1 节中，我们将了解其中的原因）．然而在 $\mathbf{Z}$ 上具有在拓扑学及其应用中起作用的非离散拓扑．通过以下的例子，介绍 $\mathbf{Z}$ 上的一种在数字图像处理中有用的拓扑．在 1.4 节和 11.3 节中，我们将进一步讨论这种应用．

例 1.10 对于每个 $n\in\mathbf{Z}$，定义

$$B(n)=\begin{cases}\{n\} & \text{如果 } n \text{ 为奇数,}\\ \{n-1,n,n+1\} & \text{如果 } n \text{ 为偶数.}\end{cases}$$

我们在图 1.6 中对这些集合加以图示．集族$\mathcal{B}=\{B(n)\mid n\in\mathbf{Z}\}$是 $\mathbf{Z}$ 上一个拓扑的一个基（见练习 1.14）．所得到的拓扑称为**数字轴拓扑**．我们把具有这种拓扑的 $\mathbf{Z}$ 称为**数字轴**．

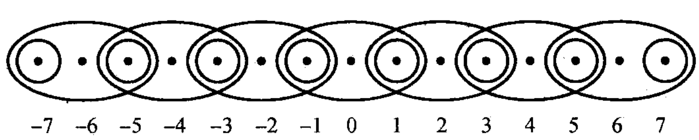


图 1.6 数字轴拓扑的基元素

由定义，由一个基所生成的拓扑中的开集，是对基元素取并所得到的集合. 以下的定理提供了另一种在这一拓扑中描述集合的简单方法.

定理 1.9 设 X 是一个集合，并设 $\mathscr{B}$ 是 X 上一个拓扑的一个基. 当且仅当对于每个 $x\in U$，存在一个基元素 $B_x\in\mathscr{B}$，使得 $x\in B_x\subset U$，那么 U 在由 $\mathscr{B}$ 所生成的拓扑中是开集.（见图 1.7.）

证明 设 U 是由 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑中的一个开集，且 $x\in U$. 由于 U 是基元素的一个并集，因此至少有一个组成此并集（包含 x）的一个基元素 B'. 于是，显然 $x\in B'\subset U$ 成立.

再设 $U\subset X$，于是对于任一 $x\in U$，存在 $B_x\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B_x\subset U$. 由并引理（引理 0.5）可得 $U=\bigcup_{x\in U}B_x$，因而 U 是基元素的一个并集. 因此，U 是由 $\mathscr{B}$ 所生成的拓扑中的一个开集. ■

例 1.11 我们已经检验了实轴上的许多种拓扑，现在再考察一下平面 $\mathbf{R}^2$. 对于在 $\mathbf{R}^2$ 中的两个点 $p=(p_1,\ p_2)$，$q=(q_1,\ q_2)$，我们引入在 0.4 节给出的欧氏距离公式

$$d(p,q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$$

对于 $\mathbf{R}^2$ 中的 x 及 $\varepsilon>0$，已定义

$$B(x,\varepsilon)=\{p\in\mathbf{R}^2\,|\,d(x,p)<\varepsilon\},$$

集合 $B(x,\ \varepsilon)$ 称为**以 x 为心、半径为 ε 的开球**. 设

$$\mathscr{B}=\{B(x,\varepsilon)\,|\,x\in\mathbf{R}^2,\varepsilon>0\},$$

于是 $\mathscr{B}$ 是与欧氏距离 d 有关的所有开球的族. 在定理 1.10 中，我们证明 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上一个拓扑的一个基，我们称由 $\mathscr{B}$ 所生成的拓扑为 **$\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑**. 它是 $\mathbf{R}^2$ 上最常用的拓扑.

定理 1.10 集族 $\mathscr{B}=\{B(x,\ \varepsilon)\,|\,x\in\mathbf{R}^2,\ \varepsilon>0\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上一个拓扑的一个基.

在证明这个定理之前，我们先证明下列引理：

引理 1.11 设 y 在 $\mathbf{R}^2$ 中，且 $r>0$. 那么，对于任一 $x\in B(y,\ r)$，存在一个 $\varepsilon>0$，使得 $B(x,\ \varepsilon)\subset B(y,\ r)$.

这个引理意味着，若一个点 x 是在 $\mathbf{R}^2$ 中的某个开球 B 之中，那么，存在一个以 x 为心、同样包含于 B 中的一个开球（见图 1.8）. 在确认 $\mathbf{R}^2$ 中的开球族满足基的第二条性质时，要运用此引理.

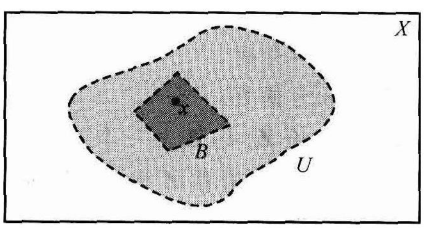


图 1.7 集合 U 是开集当且仅当 U 中的每一个 x 都包含于 U 中的一个基元素中

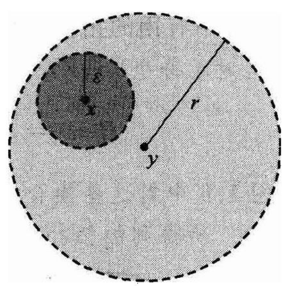


图 1.8 在 $B(y,\ r)$ 中的每个点 x，是包含于 $B(y,\ r)$ 中某个开球的球心

引理 1.11 的证明 设 $x\in B(y,\ r)$，那么 $d(x,\ y)<r$. 选取 ε，使得 $0<\varepsilon<r-d(x,\ y)$. 我们要求 $B(x,\ \varepsilon)\subset B(y,\ r)$. 设 $z\in B(x,\ \varepsilon)$，那么我们有

$$d(y,z) < d(y,x) + d(x,z) < d(y,x) + \varepsilon < d(y,x) + r - d(x,y) = r.$$

因此，$z \in B(y, r)$，于是得到 $B(x, \varepsilon) \subset B(y, r)$，引理的证明得以完成. ■

定理 1.10 的证明 由于每个属于 $\mathbf{R}^2$ 的 x 包含于基元素 $B(x, 1)$ 之中，因此基的第一个条件能满足.

随后需要验证，若 x 是两个基元素的交，那么存在一个包含 x 的基元素，且它本身包含于此交集之中. 设 $x \in B(p, r_1) \cap B(q, r_2)$. 由引理 1.11，存在 ε_1，$\varepsilon_2 > 0$，使得 $B(x, \varepsilon_1) \subset B(p, r_1)$，且 $B(x, \varepsilon_2) \subset B(p, r_2)$. 设 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，那么

$$B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_1) \cap B(x,\varepsilon_2) \subset B(p,r_1) \cap B(q,r_2)$$

于是得到 $\mathcal{B}$ 满足基的第二个条件. 因此，$\mathcal{B}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上一个拓扑的一个基. ■

在由 $\mathcal{B}$ 生成的 $\mathbf{R}^2$ 上的拓扑中，开集可以表示成开球的一个并. 例如，图 1.9 中的开球、开矩形和开半平面都是开集.（见练习 1.17.）

类似地，我们可以用欧氏距离公式来定义 **$\mathbf{R}^n$ 上的标准拓扑**.

$$d(p,q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}.$$

我们把一个开球定义为形如

$$B(x,\varepsilon) = \{p \in \mathbf{R}^n \mid d(x,p) < \varepsilon\}$$

的一个集合. 又把此拓扑的一个基，定义为 $\mathbf{R}^n$ 中由 $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbf{R}^n, \varepsilon > 0\}$ 所确定的所有开球的集族.

$\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑不仅是由 $\mathbf{R}^2$ 中开球的集族生成的，而且，正如下列定理所指出的，它还是由 $\mathbf{R}^2$ 中开矩形的集族生成的，其中一个**开矩形**是形如 $(a, b) \times (c, d)$ 的集合.

定理 1.12 *在平面 $\mathbf{R}^2$ 上，设*

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \times (c,d) \subset \mathbf{R}^2 \mid a < b, c < d\}.$$

那么，$\mathcal{B}$ 是一个基，由 $\mathcal{B}$ 所生成的拓扑 $\mathcal{T}'$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑.

证明 见练习 1.16. ■

定理 1.12 证明了一个已知的拓扑可以由多个基生成. 此外，定理还展示了单独的基元素的几何形状，在确定此拓扑中的开集时是没有意义的. 为了明确起见，在平面上由开球的集族所生成的拓扑，与由开矩形的集族所生成的拓扑是相同的. 如图 1.10 所示，我们还可以由钻石形甚至心脏形的集族生成同一拓扑.

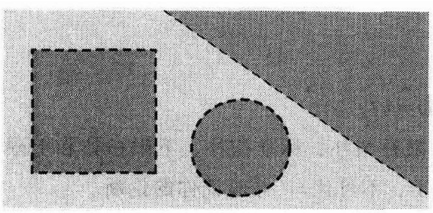


图 1.9 在 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑中的开集

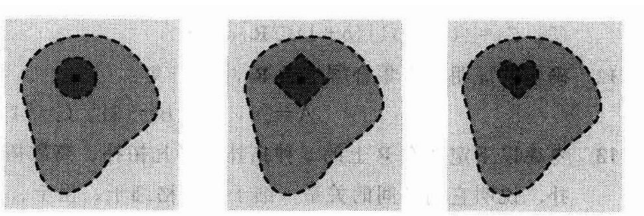


图 1.10 多个不同的基生成同一拓扑

用类似于在定理 1.12 中所使用的方式，不难证明 $\mathbf{R}^n$ 上的标准拓扑也是由开矩形 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ 组成的基生成的.

下列定理为我们提供了一种快速证明以下结论的方法，即拓扑中的一个开集族，是此拓扑的一个基. 在第 3 章我们引进拓扑的某些新结构时，会发现此定理很有用.

定理 1.13 设 X 是具有拓扑$\mathcal{T}$的一个集合，又设$\mathcal{C}$是 X 中开集的集族. 如果对于 X 中的每个开集 U 和每个 $x\in U$，在$\mathcal{C}$中有一个开集 V，使得 $x\in V\subset U$，那么，$\mathcal{C}$是生成此拓扑$\mathcal{T}$的一个基.

证明 首先，我们验证$\mathcal{C}$是一个基. 设 x 在 X 中. 由于 X 本身是一个开集，因此在$\mathcal{C}$中存在一个开集 V，使得 $x\in V\subset X$. 所以，X 中的任一点包含于此集族$\mathcal{C}$的某个开集 V 中. 因此，基的第一个条件得以满足.

再设 x 在$\mathcal{C}$中两个开集 V_1，V_2 的交集之中，于是 $x\in V_1\cap V_2$，而 $V_1\cap V_2$ 本身是一个开集. 按照我们的假设，在$\mathcal{C}$中必定有一个开集 V_3，使得 $x\in V_3\subset V_1\cap V_2$. 因此，$\mathcal{C}$是一个基.

最后，我们还需要检验由$\mathcal{C}$生成的拓扑$\mathcal{T}'$与$\mathcal{T}$重合. 设 U 在$\mathcal{T}$中是开集. 于是由假设，对于每个 $x\in U$，在$\mathcal{C}$中存在一个开集 V，使得 $x\in V\subset U$. 所以由定理 1.9，在由$\mathcal{C}$所生成的拓扑$\mathcal{T}'$中，U 是开集. 因此，$\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$. 再设在$\mathcal{T}'$中 W 是一个开集，于是 W 是$\mathcal{C}$中开集的一个并集，在$\mathcal{T}$中，$\mathcal{C}$的所有集合都是开集，而$\mathcal{T}$中每个开集的并在$\mathcal{T}$中是开集，所以，W 在$\mathcal{T}$中也是开集. 因此，$\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}$，从而得到$\mathcal{T}'$与$\mathcal{T}$重合的结论. ■

例 1.12 由定理 1.13 可以立即发现，图 1.10 中的“开”心脏形，构成 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑的一个基. 首先，注意心脏形本身在标准拓扑中是开集. 再设 x 在一个开集 U 中，于是存在一个包含于 U 中的开球 B，x 是此开球中的一个元素. 如果我们选择包含 x 的一个心脏形 H，它小得能完全落入 B 中，于是就有 $x\in H\subset U$. 因此，由定理 1.13，心脏形的集族是 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑的一个基.

1.2 节练习

1.10 证明$\mathcal{B}=\{(a,\ b)\subset\mathbf{R}\mid a<b\}$是 $\mathbf{R}$ 上一个拓扑的基.

1.11 确定下列 $\mathbf{R}$ 的子集族中哪个是基：

(1) $\mathcal{C}_1=\{(n,\ n+2)\subset\mathbf{R}\mid n\in\mathbf{Z}\}$

(2) $\mathcal{C}_2=\{[a,\ b]\subset\mathbf{R}\mid a<b\}$

(3) $\mathcal{C}_3=\{[a,\ b]\subset\mathbf{R}\mid a\leqslant b\}$

(4) $\mathcal{C}_4=\{(-x,\ x)\subset\mathbf{R}\mid x\in\mathbf{R}\}$

(5) $\mathcal{C}_5=\{(a,\ b)\cup\{b+1\}\subset\mathbf{R}\mid a<b\}$

1.12 确定并证明下列集合哪个是 $\mathbf{R}_l$ 中的开集：

$$A=[4,\ 5),\ B=\{3\},\ C=[1,\ 2],\ D=(7,\ 8).$$

1.13 考虑以下定义在 $\mathbf{R}$ 上的 6 种拓扑：平凡拓扑、离散拓扑、有限补拓扑、标准拓扑、下限拓扑和上限拓扑. 说明它们之间的关系（细于、严格细于、粗于、严格粗于、不可比），并验证你的论断.

1.14 设$\mathcal{B}$是在例 1.10 中用于定义数字轴的 $\mathbf{Z}$ 的子集族. 证明$\mathcal{B}$是 $\mathbf{Z}$ 上一个拓扑的基.

1.15 $\mathbf{Z}$ 中一个等差数列是集合

$$A_{a,b}=\{\cdots,a-2b,a-b,a,a+b,a+2b,\cdots\},$$

其中 a，$b\in\mathbf{Z}$，且 $b\neq0$. 证明等差数列的集族

$$\mathcal{A} = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, \text{且 } b \neq 0\}$$

是 **Z** 上一个拓扑的基. 所得到的拓扑称为 Z 上**等差数列拓扑**.

1.16 **证明定理 1.12**：在平面 $\mathbf{R}^2$ 上，设

$$\mathcal{B} = \{(a,b)\times(c,d) \subset \mathbf{R}^2 \mid a<b, c<d\}.$$

(1) 证明$\mathcal{B}$是 $\mathbf{R}^2$ 上一个拓扑的基；

(2) 证明由$\mathcal{B}$生成的拓扑$\mathcal{T}'$是 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑.（提示：若$\mathcal{T}$是 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑，证明$\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$且$\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}$.）

1.17 一个**半开平面**是 $\mathbf{R}^2$ 的一个形如 $\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \mid Ax+By<C\}$ 的子集，其中对于某些 A，B，$C\in\mathbf{R}$，A，B 之中至少有一不为零（见图 1.11）. 证明半开平面是 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑的开集.

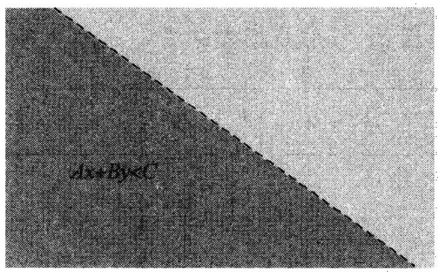


图 1.11 $\mathbf{R}^2$ 上的一个半开平面

1.18 证明集族 $\{(-\infty, q)\subset\mathbf{R} \mid q \text{ 为有理数}\}$是练习 1.9 中拓扑的一个基.

1.19 (1) 证明：在平面垂直区间 $\{\{a\}\times(b, c)\subset\mathbf{R}^2 \mid a,b, c\in\mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上一个拓扑的一个基. 我们称此拓扑为**垂直区间拓扑**.

(2) 对垂直区间拓扑与 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑进行比较.

补充练习[⊖]：从一个子集族构建一个拓扑

以下所有练习均设 X 是一个集合，而$\mathcal{C}$是 X（其并集为 X 自身）的一个子集族. 当然，通常$\mathcal{C}$不是一个拓扑. 然而，我们希望能够构建一个拓扑，使得 $\mathcal{C}$ 中的子集是此拓扑中的开集. 正好可以采用离散拓扑，其中 X 的所有子集是开集. 不过我们宁愿构建一个包含$\mathcal{C}$及尽可能少的附加开集的拓扑，即包含$\mathcal{C}$的"最小"拓扑.

设$\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$是 X 的所有子集的集族，可以表示为$\mathcal{C}$中有限多个集合的一个交集.

SE1.20 证明$\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$是 X 上一个拓扑的基.

设$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$是基$\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$所生成的拓扑，拓扑$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$由$\mathcal{C}$中集合有限个交集的任意并集组成. 集族$\mathcal{C}$称为拓扑$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$的一个**子基**.

SE1.21 证明$\mathcal{C}$中每个集合是拓扑$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$中的一个开集，即证明$\mathcal{C}\subset\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$.

接下来我们检验$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$是包含$\mathcal{C}$的最小拓扑.

SE1.22 设$\mathcal{T}$是 X 上包含$\mathcal{C}$的一个拓扑. 于是设$\mathcal{C}$中每个集合是拓扑$\mathcal{T}$中的一个开集. 证明$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}\subset\mathcal{T}$.

下面的练习都假定每个 $x\in X$ 包含于$\mathcal{C}$中至多有限个集之中（例如，这出现于 X 是一个有限集的情况）. 对于每个 $x\in X$，设 B_x 是$\mathcal{C}$中包含 x 的那些集合的交集.

SE1.23 证明集族$\mathcal{B}'_{\mathcal{C}}=\{B_x\}_{x\in X}$是$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$的一个基.

通常一个拓扑空间没有最小的基，即包含基元素尽可能少的基. 但是，在这里我们假设其中每个 $x\in X$

⊖ 补充练习以 SE 表示. ——编辑注

包含于C中有限多个集之中，我们可以证明$\mathscr{B}_C'$是$\mathcal{T}_C$最小的基：

SE1.24 证明：若$\mathscr{B}$是$\mathcal{T}_C$的一个基，那么$\mathscr{B}_C' \subset \mathscr{B}$.

1.3 闭集

至今，我们所阐述的仅限于开集，现在要关注有关的概念并介绍闭集．它们的定义十分简单．

定义 1.14 一个拓扑空间 X 的子集 A 是闭集，如果 $X-A$ 是开集．

例 1.13 考虑 $\mathbf{R}$ 具有标准拓扑．于是如图 1.12 所示，由于 $(0, 1)$ 是开集，因此 $(-\infty, 0]\cup[1, \infty)$ 是闭集；由于 $(-\infty, a)\cup(b, \infty)$ 是开集，因此 $[a, b]$ 是闭集；而由于 $(-\infty, c)\cup(c, \infty)$ 是开集，因此 $\{c\}$ 是闭集．

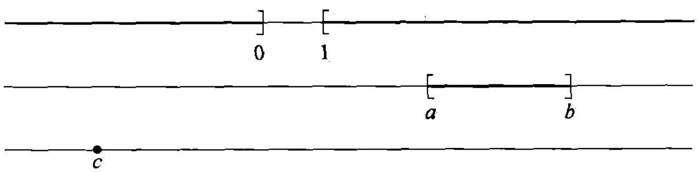


图 1.12 $\mathbf{R}$ 中带有标准拓扑的闭集

定义 1.15

(1) 对于 $\mathbf{R}^2$ 中的每个 x 及 $\varepsilon>0$，定义以 x 为中心、以 ε 为半径的**闭球**为集合

$$\overline{B}(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbf{R}^2 \mid d(x,y)\leqslant\varepsilon\},$$

其中 $d(x, y)$ 为 x，y 之间的欧氏距离．

(2) 若 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的有界闭区间，则称 $[a, b]\times[c, d]\subset\mathbf{R}^2$ 是一个**闭矩形**.

定理 1.16 闭球与闭矩形是 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑中的闭集．

证明 在练习 1.26 中，我们曾要求读者证明闭球是闭集．下面我们来证明闭矩形是 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑中的闭集．

设 $A=[a, b]\times[c, d]$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个闭矩形．为了证明 A 是此标准拓扑中的一个闭集，我们来证明 $\mathbf{R}^2-A$ 是一个开集．注意，$\mathbf{R}^2-A$ 可以表示为以下四个开半平面的并集：$\{(x, y) \mid x<a\}$，$\{(x, y) \mid x>b\}$，$\{(x, y) \mid y<c\}$，$\{(x, y) \mid y>d\}$．由于这四个半平面都是开集（见练习 1.17），而开集的并集仍是一个开集，于是 $\mathbf{R}^2-A$ 是一个开集．因此矩形 A 是一个闭集． ■

例 1.14 考虑带有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$．在图 1.13 中，前面三个集合是闭集，后面三个集合不是闭集．

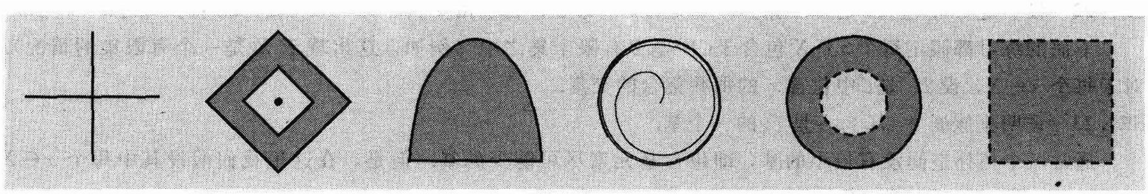


图 1.13 在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中，前面三个集合是闭集，但后面三个集合不是闭集

图中左下方的螺线是极坐标方程 $r=\frac{\theta}{\theta+1}$，$\theta\geqslant 0$ 的图形，它从圆周 S^1 旋转而来，但是它不包含 S^1 的点. 螺线不是闭集，因为点 (1，0) 在补集之中，但是包含 (1，0) 的开球之中没有一个是此补集的一个子集，由于每个这样的开球与此螺线相截. 因此这个补集不是开集，由此得出此螺线不是闭集.

若集合 C 是闭集，那么由定义，它的补集是开集. 关于一个开集的补集，我们能得出什么结论来呢？设 U 是一个开集，并设 $K=X-U$ 是它的补集. 考虑 K 的补集. 我们有 $X-K=X-(X-U)=U$，而它是一个开集，因此 U 的补集 K 是闭集. 因此，一个开集的补集是闭集.

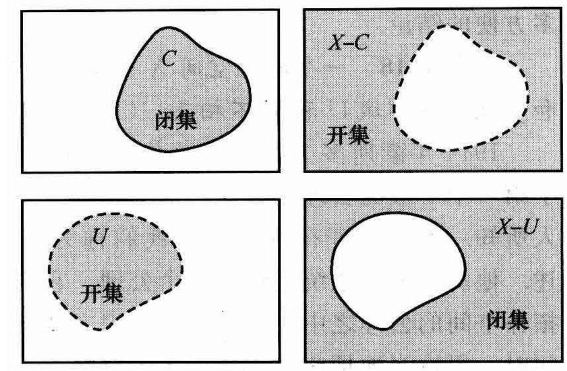


图 1.14 若 C 是闭集，那么它的补集是开集；若 U 是一个开集，则它的补集是闭集

简单来说，由闭集的定义，一个闭集的补集是开集，而由上面刚进行的论证，一个开集的补集是闭集. (见图 1.14.)

例 1.15 设 X 是具有离散拓扑的集合，X 的每个子集是一个开集. 给定 X 中任意一个集合 A，它的补集是开集，由于每个集合是开集. 因此 A 是闭集，由于 A 是任意集，由此得出，X 的每个子集也是此离散拓扑中的一个闭集.

例 1.16 设 X 是集合 $\{a, b, c, d\}$ 具有如图 1.15 所示的拓扑 $\mathcal{T}$. 请注意 $\{b\}$ 是开集，而不是闭集，$\{a\}$ 是闭集而不是开集. $\{a, b\}$ 既开又闭，$\{b, c\}$ 既不开又不闭.

重要注记 一个通常的错误，是把闭集误认为非开集，但是上述例子说明了，集合可以是开集和闭集的任意组合.

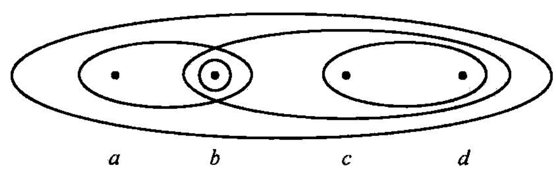


图 1.15 具有开集、具有闭集、具有既开又闭集合、具有既不开又不闭集合的拓扑

为了帮助记忆，下面有一段趣话：

问：一个子集与一扇门有什么区别？

答：一扇门非开即关. 一个子集可以或开或关、既开又闭、既不开又不闭.

不让作者开口说数学幽默并非易事，但是在今后，我们将试着不再说了.

由于闭集是开集的补集，它们的性质类似，但是它们有某些重要的差别.

定理 1.17 设 X 是一个拓扑空间. 关于 X 中闭集的集族，下列命题成立：

(1) $\varnothing$ 与 X 是闭集；

(2) 闭集的任意集族的交集是一个闭集；

(3) 有限个闭集的并集是一个闭集.

证明 见练习 1.33. ■

这样，在拓扑空间 X 中，包括空集、X 本身、闭集的有限并，以及任意交在内的闭集的集族是闭集.

在 $\mathbf{R}^n$ 中，具有标准拓扑的所有单点集合是闭集. 然而，存在不属于上述情况的拓扑. 例

如，考虑在 $\mathbf{R}$ 上由基集 $\{[n, n+1)\subset\mathbf{R} \mid n\in\mathbf{Z}\}$ 生成的拓扑$\mathcal{T}^*$．容易看出，在$\mathcal{T}^*$ 中没有闭的单点集.

下面我们给出拓扑空间的一个性质，满足这种性质的空间，具有某些特别美妙的结论．正如以下定义所展示的，这些结论包括具有闭的单点集．在全书中，我们将看到此性质有许多方便的结论.

定义 1.18 一个拓扑空间 X 是**豪斯多夫空间**，如果对于 X 中每对不同的点 x，y，与 x 和 y 相应的邻域 U 和 V 不相交.（见图 1.16.）

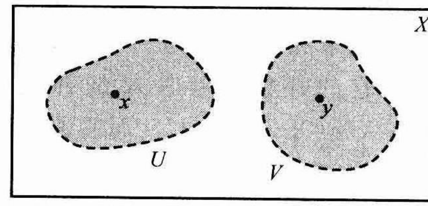


图 1.16 在一个豪斯多夫空间中，不同的点有不相交的邻域

1914 年豪斯多夫在他的著作《点集论纲要》中提出了第一个一般的公理化系统，这个系统与拓扑空间一样为人所知．他的公理在本质上对我们称为拓扑的基作了描述．他的公理化系统还包括一个公理，它不再被列入一般拓扑空间的公理之中，但是，现在定义特殊的一类拓扑空间时，很恰当地把它称为豪斯多夫空间.

豪斯多夫性质很容易被记住：在一个豪斯多夫空间中，一对点中的任一点，都可以经过不相交的邻域“搬离”另一点.

例 1.17 具有标准拓扑的实轴 $\mathbf{R}$ 是豪斯多夫空间.

已知两个不同的点 a，b，存在包含它们的不相交的开区间．例如，若 $a<b$，那么区间 $U=\left(a-1, \frac{a+b}{2}\right)$ 和 $V=\left(\frac{a+b}{2}, b+1\right)$ 是分别包含 a，b 的不相交的邻域.

例 1.18 具有离散拓扑的每个集合 X 是豪斯多夫空间．如果 x，y 是不同的点，那么，集合 $\{x\}$，$\{y\}$ 分别是 x，y 的不相交邻域.

前面已指出，豪斯多夫空间具有一类有用的性质，例如：

定理 1.19 若 X 是一个豪斯多夫空间，那么，X 的每个单点子集是闭集.

证明 设 $x\in X$，为了证明 $\{x\}$ 是闭集，只须证明 $X-\{x\}$ 是开集．设 $y\in X-\{x\}$ 是任意集．由于 X 是豪斯多夫空间，存在分别包含 x 与 y 的不相交的邻域 U 与 V．于是 $x\notin V$，因而 $y\in V\subset X-\{x\}$．由于每个 $y\in X-\{x\}$ 在包含于 $X-\{x\}$ 之中的一个开集内，由定理 1.4，$X-\{x\}$ 是开集. ■

1.3 节练习

1.25 证明：在拓扑空间 X 中，若 U 是开集，C 是闭集，那么 $U-C$ 是开集，而 $C-U$ 是闭集.

1.26 证明：在 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑中的闭球是闭集.

1.27 无限梳 C 是如图 1.17 所示的平面的子集，定义为

$$C=\{(x,0)\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\left\{\left(\frac{1}{2^n},y\right)\,\middle|\, n=0,1,2,\cdots \text{而 } 0\leqslant y\leqslant 1\right\}.$$

(1) 证明：C 在 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑中是非闭集；

(2) 证明：C 在 $\mathbf{R}^2$ 上垂直区间拓扑中是闭集.（见练习 1.19.）

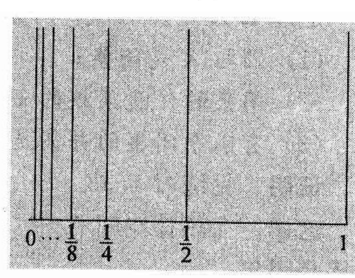


图 1.17 无限梳

1.28 哪种集合是拓扑空间 X 上有限补拓扑中的闭集？

1.29 哪种集合是集合 X 上例外点拓扑 EPX_P 中的闭集？（见练习 1.8.）

1.30 哪种集合是集合 X 上特殊点拓扑 PPX_P 中的闭集？（见练习 1.7.）

1.31 证明：当且仅当 n 是偶数，一个单点集合 $\{n\}$ 是数字轴拓扑中的闭集.

1.32 证明：形如 $[a, b)$ 的区间在 **R** 上的下限拓扑中是闭集.

1.33 **证明定理 1.17**：设 X 是一个拓扑空间.

(1) 证明 $\varnothing$ 与 X 是闭集；

(2) 证明 X 中闭集的任意集族的交集是一个闭集；

(3) 证明 X 中有限个闭集的并集是一个闭集.

1.34 证明：对一个有限集合，离散拓扑是唯一的豪斯多夫拓扑.

1.35 证明：在下限拓扑中，**R** 是豪斯多夫空间.

1.36 证明：在有限补拓扑中，**R** 是非豪斯多夫空间.

1.37 证明：在练习 1.15 中所引入的 **Z** 上的等差数列拓扑是豪斯多夫空间.

1.4 拓扑学应用举例

在本节，我们讨论拓扑空间的两个应用，一个应用说明，在数字拓扑中如何用拓扑空间为数字图像显示建模；另一个应用是，在分子生物学中，拓扑空间是如何用来为进化相近性建模的.

数字拓扑

数字拓扑是对数字图像显示（例如计算机屏幕）方面的拓扑关系所进行的研究. 它在数字图像处理领域起作用. 数字图像显示包含如图 1.18 所示的矩形像素阵列. 在数字拓扑中，这个阵列是用所谓的数字平面来建模的. 今后我们提出专门的定义.

数字图像处理的一个重要任务是，通过一个物体的数字图像来确定它的特征. 例如，用一个光学字符识别程序来判别如图 1.19 所示的一个字符的数字图像，并尝试确定此图像所表示的特征，使得随后把它用于文字处理的软件之中. 图像的拓扑性质，有助于确定此字符. 事实上，在图 1.19 中包含了两个区域，有助于把相应的字符从其他字符中区分出来.

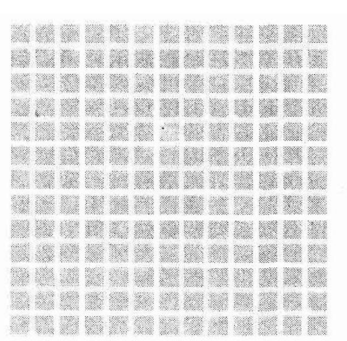


图 1.18 数字图像显示是像素的矩形阵列

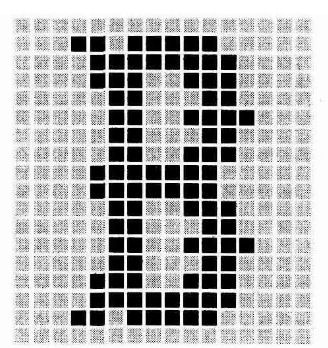


图 1.19 字符 B 的一个数字图像

在数字拓扑这个领域的发展初期，研究工作集中于定义和研究拓扑概念（例如连通性和连续性）的数字模拟，在数字图像显示的模型方面，没有基本的拓扑框架. A. 罗森菲尔德（1931—2004）在 1979 年发表的“数字拓扑”，是首先引入这些概念的一篇论文. 随后，人们

发现，拓扑空间适合于为数字图像显示而进行建模，使拓扑概念直接用于数字领域.

在本节，我们引进数字轴和数字平面的模型，并考虑与此有关的若干基本拓扑性质. 在11.3节中，我们将体验一下数字拓扑在数字图像处理方面的应用.

在例1.10中引入的数字轴，为1维数字图像显示建模. 我们假定，我们有像素的一条无限长的轴，其中每一点对应于一个奇整数. 对于每个奇整数，我们有一个基元素 $B(n)=\{n\}$. 因此，在此数字轴拓扑中，每个单独的像素是一个开集. 在此数字轴中，我们还具有由连续像素提供的邻近性所反映的结构. 我们把每个偶整数作为是像素在 $n-1$ 与 $n+1$ 之间边界的表示. 与每个偶数 n 相对应，我们有基元素 $B(n)=\{n-1, n, n+1\}$.

在此数字轴上，每个奇数是一个开集，每个偶数是一个闭集（见练习1.31）. 我们把此数字轴看作为是与奇整数相对应的开像素的集合，而与偶整数相应的，是像素之间的闭边界的集合（见图1.20）.

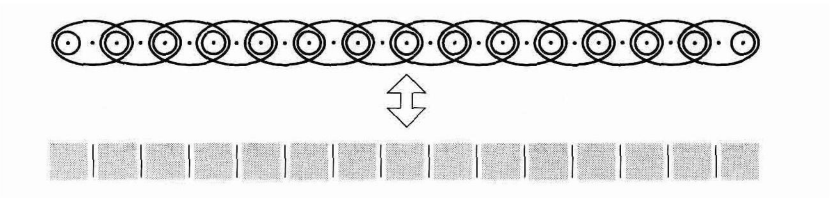


图1.20 数字轴为像素轴及它们之间的边界建模

数字轴不是豪斯多夫空间，由于不存在一对不相交的开集 U, V，其中 $n\in U$, $n+1\in V$.

下面，我们引进数字平面，与数字轴一样，此想法是用单点开集的阵列为数字图像显示中的像素建模，并用附加的点来表示像素之间的边界. 我们从两组整数的积 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 开始讨论. 对于每个点 (m, n)，我们按以下的方式来定义基元素 $B(m, n)$：

$$B(m,n)=\begin{cases}\{(m,n)\} & \text{若 } m,n \text{ 均为奇数}\\ \{(m+a,n)\mid a=-1,0,1\} & \text{若 } m \text{ 为偶数}, n \text{ 为奇数}\\ \{(m,n+b)\mid b=-1,0,1\} & \text{若 } m \text{ 为奇数}, n \text{ 为偶数}\\ \{(m+a,n+b)\mid a,b=-1,0,1\} & \text{若 } m,n \text{ 均为偶数}\end{cases}$$

当 m, n 均为奇数时，基元素 $B(m, n)=\{(m, n)\}$ 是在数字图像显示中表示像素的单点开集. 在图1.21中，我们对这个数字平面拓扑的某些基元素作出了图示.

$\mathscr{B}_P=\{B(m, n)\mid(m, n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$ 是在 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 上的一个拓扑的基.（见练习1.38.）所得到的拓扑空间称为**数字平面**. 对于这种拓扑，如果 m, n 均为偶数，则单点集合 $\{(m, n)\}$ 是闭集（见练习1.39）. 此外，同数字轴一样，此数字平面也不是豪斯多夫空间.

如图1.22所示，我们看出数字平面是以下三种类型的集合：

(1) 点 (m, n) 对应的开像素，其中 m, n 均为奇数；

(2) 点 (m, n) 对应的像素之间的垂直和水平边界；

(3) 点 (m, n) 对应的拐角闭的边界点，其中 m, n 均为偶数.

在11.3节中，我们将进一步对数字平面进行探索.

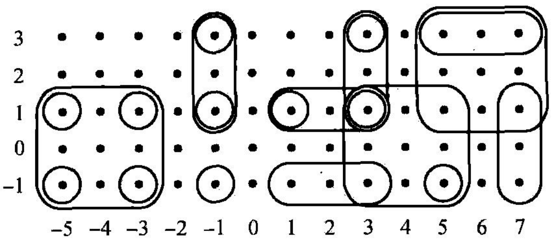


图 1.21　数字平面的某些基元素

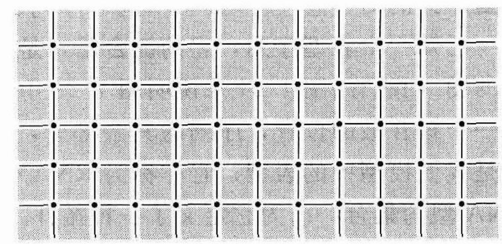


图 1.22　数字平面为像素的矩形阵列以及它们之间的边界建模

表型空间

在生物学中，表型空间关系是十分重要的关系. 表型是所有生物机体所拥有的内部密码与遗传信息，同时也是那些信息的物质性的体现. 例如，由一个特定的个体肉眼颜色所引起的基因族是一个基因型. 此个体可观察到的肉眼颜色，是与此相对应的表型. 在本节，我们对由一组表型所建立的生物相近性的模型加以考察. 分子生物学家提议，把这种模型作为正式确认连续和不连续进化演变的一种手段，这就为理解进化过程提供了一种数学框架.

我们以一个涉及核糖核酸（RNA）的例子来论述表型空间的概念. RNA 的链由被称为核苷酸的较小的分子构成，绑在一起形成牢固的、易弯曲的链. 在 RNA 中有四种不同的核苷酸：乌嘌呤（G）、胞嘧啶（C）、腺嘌呤（A）和尿嘧啶（U）. 经受附加（较弱）粘合的非相邻的核苷酸对，就把此链扭曲成更复杂的如图 1.23 所示的折叠状的配置.

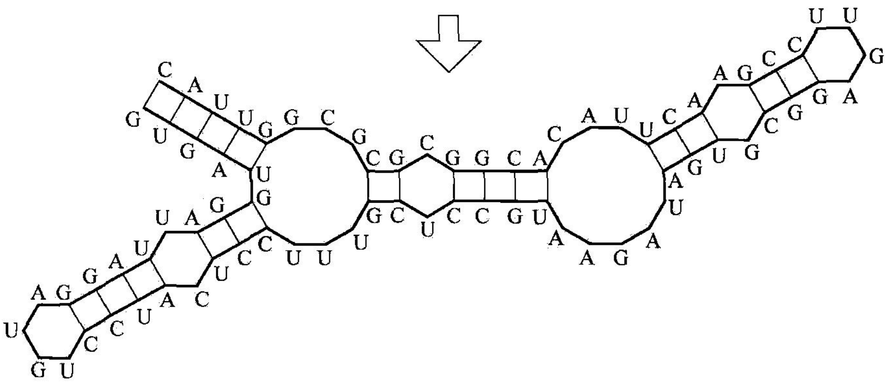


图 1.23　RNA 是一条被折叠而扭曲成的分子链

乌嘌呤与胞嘧啶配对，以及腺嘌呤与尿嘧啶配对，成为折叠的主要因素，然而乌嘌呤与尿嘧啶也能配对. 在理论上，一个特定的分子链可以由许多种方式实现折叠和粘合，但是其中只有最有活力的、合适的方式才可能出现. 为了简单起见，我们假定这种链以唯一的方式出现.

这里，我们用比较短的分子链来说明此结构和拓扑模型. 在活生生的细胞中的 RNA 分子在长度上大约可以从几十到几千个核苷酸不等.

对于一个特定的 RNA 分子，相应的非折叠的核苷酸链称为**初级结构**. 我们用称为分子的

表型序列的 C（胞）序列、G（鸟）序列、A（腺）序列和 U（尿）序列，来表示此核苷酸链.

已知一个表型序列，它的**键合图**，是一个描述在所形成 RNA 分子中所出现而未加标注的键的图. 我们用图 1.24 来说明图 1.23 中 RNA 分子的键合图. 图上的点，标志了在此序列中第一个核苷酸的位置，序列的其余部分，按逆时针方向环绕此键合图的周界卷绕. 此键合图就是我们模型中的表型；它亦称为 RNA 分子的 RNA **型**或**次级结构**. 我们引入的表型空间是 RNA 型的集合，已为它定义了一种拓扑.

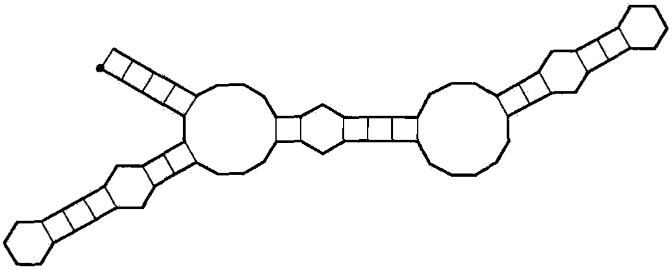


图 1.24　一个 RNA 分子的键合图

例 1.19　考虑以下三个表型序列：

(1) GGGCAGUCUC　CCGGCGUUUA　AGGGAUCCUG　AACUUCGUCG
CUCCCAUCCA　AUCAGUCCGC　CUCACGGAUG　GAGUUG

(2) GGGCAGUCUC　CCGGCGUUUA　AGGAAUCCUG　AACUUCGUCG
CUCCCAUCCA　AUCAGUCCGC　CUCACGGAUG　GAGUUG

(3) GGGCAGUCUC　CCGGCCUUUA　AGGGAUCCUG　AACUUCGUCG
CUCCCAUCCA　AUCAGUCCGC　CUCACGGAUG　GAGUUG

这 3 个表型序列的键合图，如图 1.25 所示.

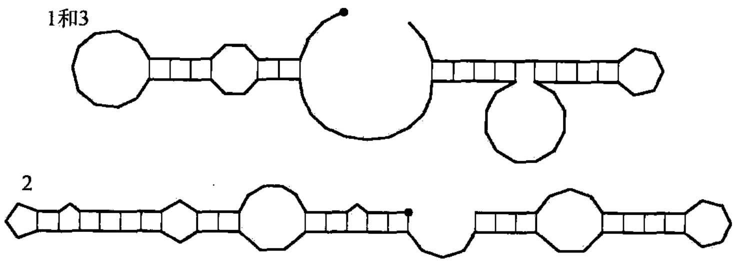


图 1.25　核苷酸序列的键合图

除了第 16 项，序列 1 与序列 3 完全一样，而且二者的键合图也一样. 在另一方面，序列 2 与序列 1 除了唯一的第 24 项不同外，完全一样，但二者的键合图却完全不同.

在我们的模型中，有唯一的 RNA 型与每一个表型系列相对应. 这种关系不是一一对应的，由于多个表型系列可能形成同一 RNA 型，正如我们在上面的例子中所见到的那样. 这一理论的一个重要方面是下述观念，即在此表型系列中某一单独的项使键合图完全改变，却没有其他变化.

定义 1.20 源于一个特定 RNA 型 s 的所有表型系列的集合称为 s 的**中性网络**，并记为 $N(s)$.

例 1.20 考虑长度为 10 的，仅由鸟嘌呤（G）和胞嘧啶（C）所组成的表型系列. 有 $2^{10}=1024$ 种可能的表型系列，而按照折叠和粘合的情况，它们源于 8 种不同的 RNA 型. 在图 1.26 中，图示了一些 RNA 型，以及与每种 RNA 型相应的不同表型序列的个数，即对于每个 RNA 型 s，$N(s)$ 的规格. 我们把 RNA 型的这个集合记为 GC_{10}.

在通常的生物学环境中，基因突变是导致基因型改变的一个随机过程. 由于基因型－表型映射的多对一的性质，许多基因突变并不改变所产生的表型. 而在另一方面，存在源于新表型的偶然突变，因而从自然选择的过程可确定新表型是否能存留.

再假定我们已经有了一个特定的表型序列，并设 r 是它对应的 RNA 型. 在这种环境下，基因突变是在此基因序列中这一项目的一种随机变化. 由于出现这些随机变化，我们可以呆在 r 的中性网络之中，在所有源于 RNA 型 r 的整个表型序列中"漂流". 然而在某些方面，在一个表型序列中一个项目的改变，可能使我们脱离 r 的中性网络，而进入另一个 RNA 型 s 的中性网络. 我们就说 r 已经突变到 s.（见图 1.27.）

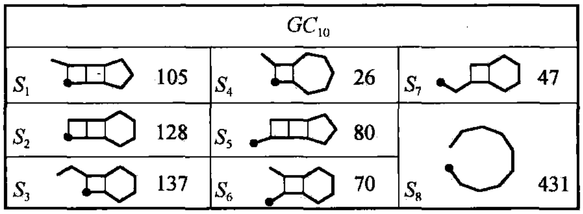


图 1.26 集合 GC_{10}

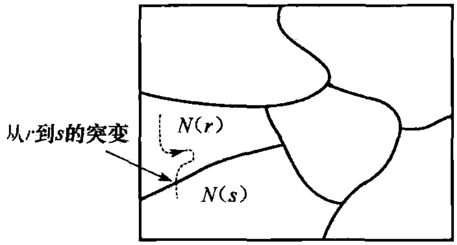


图 1.27 从二级结构 r 到二级结构 s 的基因突变

已知 RNA 型 r 与 RNA 型 s，我们想知道，由于在 r 的中性网络中一个表型序列内，一个单项的改变所引起的 r 到 s 的突变，它的可能性究竟有多大? 我们可以定义和确定一个概率，以实现精确化. 我们将用此概率来定义 RNA 型的集合上的表型空间拓扑.

然而，在定义和使用此概率之前，我们引进对这个概率的定义起作用的几个量. 就**点突变**而言，我们所指的是，从由于表型序列中单个项目的改变，而导致一个表型序列到另一个表型序列的突变. 在例 1.19 中，序列 2 由序列 1 的一个点突变而产生，反之亦然（序列 1 与序列 3 的情况类似）.

对于 RNA 型 r 与 RNA 型 s，设 $m_{r,s}$ 是由于从 r 到 s 的一个突变而导致 $N(r)$ 中的一个序列，变为 $N(s)$ 中的一个序列所引起点突变的数量. 请注意 $m_{r,s}=m_{s,r}$，这是由于每个点突变，把在 $N(r)$ 中的一个序列变为 $N(s)$ 中的一个序列，有一个"逆"点突变，它把在 $N(s)$ 中的一个序列变为 $N(r)$ 中的一个序列. 设 $m_{r,*}$ 是把在 $N(r)$ 中的一个序列，变为在任意其他中性网络中的一个序列所需要点突变的数量. 我们可以认为 $m_{r,*}$ 是让我们脱离 $N(r)$ 所需要的点突变的数量.

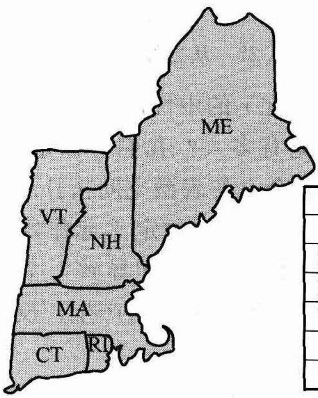
定义 1.21 **突变概率** $p_{r,s}$ 定义为

$$p_{r,s}=\frac{m_{r,s}}{m_{r,*}},$$

即使 $m_{r,s}=m_{s,r}$，也不要求 $p_{r,s}=p_{s,r}$，由于 $m_{r,*}$ 与 $m_{s,*}$ 的值可能是不同的．例如，如果 $m_{r,*}$ 大于 $m_{s,*}$，那么源于 $N(r)$ 的点突变多于源于 $N(s)$ 的点突变，因而突变的比值 $\frac{m_{r,s}}{m_{r,*}}$ 小于 $\frac{m_{s,r}}{m_{s,*}}$．我们将看到在表型空间拓扑中所反映出的这种不对称性，同时 RNA 型 s 可能接近于 RNA 型 r，而 r 却未必接近于 s．

由于这些概率的这种不对称性，距离函数不能提供确定两个 RNA 型相近性的一种手段．距离函数（或将在第 5 章中所讨论的度量）必须是对称的；r 与 s 之间的距离一定等于 s 与 r 之间的距离．由于距离函数不限于上述用途，一个拓扑空间是可供考虑的自然替代物．

例 1.21 为了说明在突变概率所出现的不对称性，在本例中，我们考虑的概率同被定义过的突变概率一样，但是却处于非常不同的环境之中．考虑下列状况．在图 1.28 中，我们展示了新英格兰 6 个州和它们之间的一张转移概率（随后给出定义）表．对于一对州 R 与 S，我们定义 $B_{R,s}$ 为这两个州周界的长度．在这里，对于每对州 R 与 S，我们有 $B_{s,R}=B_{R,s}$．对于单独的一个州 R，我们定义 $B_{R,*}$ 为 R 与新英格兰其他各州之间周界的总长度．我们设转移概率 $P_{R,s}$ 等于 $\frac{B_{R,s}}{B_{R,*}}$，并把它解释为从州 R 随机走出，进入新英格兰另一个州，而在州 S 登陆的概率．概率 $P_{R,s}$ 不是对称的．由于唯一与缅因州交界的州是新罕布夏州，$P_{\mathrm{ME,NH}}=1$，而 $P_{\mathrm{NH,ME}}\neq 1$，由于新罕布夏州还与马萨诸塞州及佛蒙特州交界．在练习 1.44 中再对此例作进一步的探索．



	CT	MA	ME	NH	RI	VT
CT	—	0.6	0	0	0.4	0
MA	0.3	—	0	0.35	0.2	0.15
ME	0	0	—	1	0	0
NH	0	0.2	0.4	—	0	0.4
RI	0.6	0.4	0	0	—	0
VT	0	0.2	0	0.8	0	—

图 1.28 新英格兰各州之间的转移概率

作为一个详细说明的例子，我们考虑在 GC_{10} 上的一个拓扑，即长为 10 的表型的 RNA 型的集合．根据突变概率来定义一个拓扑时所用的即将发生的过程，将转入与任意固定长度的表型系列有关的 RNA 型．

在 GC_{10} 中确定 RNA 型时，$m_{r,s}$ 和 $m_{r,*}$ 的数量究竟有多少，对于这样的细节问题我们不作讨论．作为我们的起点，我们使用图 1.29 中有关的突变概率，而数据来自以前所叙述过的突变数．

在图 1.29 中，第 i 行、j 列的表列值，是脱离 s_i 的中性网络而终止于 s_j 的中性网络中的一个系列的点突变的概率．

我们在 RNA 型的集合上所定义的相近性概念，它基于从一个 RNA 型到另一个 RNA 型的一种突变的可能性．由于在 GC_{10} 中有 8 种 RNA 型，每种都有可能突变到另外的 7 种 RNA 型．因此，如果 $p_{i,j}>\frac{1}{7}$，则认为 s_i 突变到 s_j 的可能性超出各型之间相互突变的平均可能性．

对于每一个 $i=1, \cdots, 8$，定义 $R_i=\{s_i\}\cup\left\{s_j \mid p_{i,j}>\frac{1}{7}\right\}$．于是，$R_i$ 由 s_i 以及所有的 RNA 型所组成，对于后者，s_i 有高于突变的平均可能性．集族 $\mathcal{R}_{1/7}=\{R_i\}_{i=1}^{8}$ 本身不是一个拓扑，但我们把它扩展成一个拓扑，把 $\mathcal{T}_{1/7}$ 定义为包含 $\mathcal{R}_{1/7}$ 的 GC_{10} 上的最小拓扑．拓扑 $\mathcal{T}_{1/7}$ 由在 $\mathcal{R}_{1/7}$ 中的集合取有限交而形成的一个基而生成（见补充练习 1.20）．所得到的拓扑空间称为**表型空间**．

在一个有限集上的一个拓扑，有唯一的生成此拓扑的最小基（见补充练习 1.23 与 1.24）．如果对于每个 s_i，我们取包含 s_i 的所有集合 R_j，并设 B_i 是它们的交，那么集族 $\mathcal{B}_{1/7}=\{B_i\}_{i=1}^{8}$ 是 $\mathcal{T}_{1/7}$ 的最小基．（见补充练习 1.24.）

根据 GC_{10} 的概率表，容易确定这个最小基 $\mathcal{B}_{1/7}$．作为开始，如图 1.30 所示，在图中，我们对位于对角线及每个满足 $p_{i,j}>\frac{1}{7}$ 的格打勾．

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
s_1	—	0.13	0.15	0.08	0.07	0.09	0.04	0.44
s_2	0.11	—	0.15	0	0.11	0.18	0.05	0.40
s_3	0.12	0.15	—	0.03	0.09	0.06	0.05	0.50
s_4	0.29	0	0.14	—	0.07	0.09	0.06	0.35
s_5	0.08	0.15	0.12	0.02	—	0.08	0.08	0.47
s_6	0.12	0.29	0.09	0.03	0.09	—	0.03	0.35
s_7	0.08	0.12	0.13	0.03	0.13	0.05	—	0.46
s_8	0.18	0.19	0.24	0.04	0.15	0.11	0.09	—

图 1.29　GC_{10} 的突变概率

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
s_1	√		√					√
s_2		√	√			√		√
s_3		√	√					√
s_4	√			√				√
s_5		√			√			√
s_6		√				√		√
s_7							√	√
s_8	√	√	√		√			√

图 1.30　GC_{10} 概率表中满足 $p_{i,j}>\frac{1}{7}$ 的格

对于任一 i，在 i 行打勾，对应于 R_i 中的元素．例如，$R_1=\{s_1, s_3, s_8\}$，$R_2=\{s_2, s_3, s_6, s_8\}$．为了确定基元素 B_i，我们对在 i 列中有勾号的那些行取交．例如，s_6 所在的列在第 2 行及第 6 行打勾．对 R_2 与 R_6 取交，得 $B_6=\{s_2, s_6, s_8\}$．基 $\mathcal{B}_{1/7}$ 见图 1.31 所示．

请注意，在基元素 B_j 包含 s_8 的意义下，s_8 接近于每个 s_j，因此对于 s_j 的每个邻域也是如此．这反映了下述事实：每个 s_j 以比较高的概率突变到 s_8．在另一方面，B_8 只包含 s_8，因而没有其他的 s_j 同 s_8 一样接近于 s_8．然而，拓扑学的结论是 $B_8=\{s_8\}$，这个使 $B_8=\{s_8\}$ 成立的特别例子很好地反映了这一事实，即与其他 s_j 的中性网络相比，s_8 的中性网络要大些，因而源于 s_8 中性网络的突变经常少于转入此网络的突变．

在构建拓扑 $\mathcal{T}_{1/7}$ 时，我们用平均概率 1/7 作为门槛．也就是说，我们定义集合 $R_i=\{s_i\}\cup\left\{s_j \mid p_{i,j}>\frac{1}{7}\right\}$，而我们设 $\mathcal{T}_{1/7}$ 等于 GC_{10} 上包括所有集合 R_i 的最小拓扑．我们可以采用其他概率作为门槛来构建拓扑，在 RNA 型的同一集合上，可能得到不同的拓扑．例如，如果我们取 1/10 作为门槛，并假设按上述对应集族同样方式来定义 $\mathcal{R}_{1/10}$，$\mathcal{T}_{1/10}$，$\mathcal{B}_{1/10}$，那么基 $\mathcal{B}_{1/10}$ 出现于图 1.32 中．（见练习 1.42.）

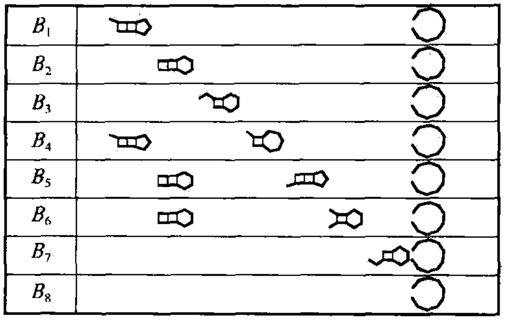


图 1.31 拓扑$\mathcal{T}_{1/7}$的基$\mathcal{B}_{1/7}$

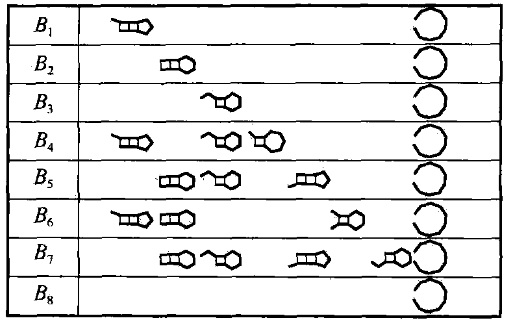


图 1.32 拓扑$\mathcal{T}_{1/10}$的基$\mathcal{B}_{1/10}$

研究者们期望，用拓扑学来建立相近性的表示法，有助于对生物组织的演变至关重要的生物学过程进行论证. 在这里用 RNA 型所提出的简单模型，可以转入更一般、更复杂的表型－基因型系统. 无论对于现实世界还是拓扑学术语来说，相近性是连续性的一个重要组成部分（见第 4 章）. 因此，表型空间对于连续与不连续进化演变的建模和研究，都提供了合适的工具.

1.4 节练习

1.38 证明：用于定义数字平面的 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 的子集族$\mathcal{B}_p$ 是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 上一个拓扑的基.

1.39 对于在数字平面的每个点（m，n），确定包含（m，n）的最小闭集.（这里有可供考虑的 4 种情况：m，n 均为奇数；m 为奇数，n 为偶数；m 为偶数，n 为奇数；m，n 均为偶数.）

1.40 设我们的表型是由字母 N 和 S 组成的 4 分量序列，并有具有中性网络的 3 个表型：

$$N_1=\{(N,N,N,N),(N,N,N,S),(N,N,S,N),(N,N,S,S)\}$$

$$N_2=\{(N,S,N,N),(N,S,N,S),(N,S,S,N),(N,S,S,S),(S,N,N,N),(S,N,N,S)\}$$

$$N_3=\{(S,N,S,N),(S,N,S,S),(S,S,N,N),(S,S,N,S),(S,S,S,N),(S,S,S,S)\}$$

请确定突变概率 $p_{1,2}$，$p_{1,3}$，$p_{2,3}$，$p_{2,1}$，$p_{3,1}$和 $p_{3,2}$.

1.41 设我们的表型是由字母 R，D 和 F 组成的 2 分量序列，并有具有中性网络的 3 个表型：

$$N_1=\{(R,R)\}$$

$$N_2=\{(R,D),(F,R),(F,F)\}$$

$$N_3=\{(D,R),(F,D),(D,D),(R,F),(D,F)\}$$

请确定突变概率 $p_{1,2}$，$p_{1,3}$，$p_{2,3}$，$p_{2,1}$，$p_{3,1}$和 $p_{3,2}$.

1.42 （1）说明根据表 1.29 中的概率表确定 GC_{10}上的$\mathcal{B}_{1/7}$时的每一步.

（2）根据表 1.29 中的概率表，确定 GC_{10}上的$\mathcal{B}_{1/10}$.

1.43 使得 GC_{10}上的$\mathcal{T}_p$ 是离散拓扑的 p 的最小值是多少？并验证你的结果.

1.44 考虑新英格兰 6 个州以及在表 1.28 中的相关概率表. 设 $NE=\{CT, MA, ME, NH, RI, VT\}$.

（1）确定在 NE 上$\mathcal{T}_0$ 的最小基. 对于这个拓扑，我们考虑一对州 R 与 S，其中随机走出州 R 之后在州 S 登陆的概率不为零（即走出州 R 之后能在州 S 登陆）.

（2）确定在 NE 上拓扑$\mathcal{T}_{1/3}$ 的最小基.

第2章

内部、闭包与边界

在本章，我们考虑与拓扑空间的子集有关的某些重要的集合. 2.1 节介绍集合的内部和闭包，2.2 节介绍集合的极限点，2.3 节介绍集合的边界，2.4 节以拓扑学在地理信息系统建模中的应用结束本章.

2.1 集合的内部与闭包

一个拓扑空间的任意子集 A 可能既非开又非闭. 然而，让一个有关的开集和一个有关的闭集相联系是很有用的. 特别是可以把每个集合 A，夹在包含于 A 的最大开集和包含 A 的最小闭集之间. 这些集合分别称为 A 的内部和 A 的闭包.

定义 2.1 设 A 是一个拓扑空间 X 的子集. 包含于 A 的所有开集的并是 A **的内部**，记为 $\mathring{A}$ 或 $\text{Int}(A)$. 包含 A 的所有闭集的交，是 A **的闭包**，记为 $\overline{A}$ 或 $\text{Cl}(A)$.

显然，A 的内部是开集，且是 A 的一个子集，而 A 的闭包是闭集且包含 A. 于是，我们就有该集合三明治，A 被夹在一个开集和一个闭集之间：$\mathring{A}\subset A\subset\overline{A}$.

从内部和闭包的定义就很容易得到下述性质.

定理 2.2 设 X 是一个拓扑空间，而 A 与 B 是 X 的子集.

(1) 若 U 是 X 中的一个开集，且 $U\subset A$，则 $U\subset\text{Int}(A)$.

(2) 若 C 是 X 中的一个闭集，且 $A\subset C$，则 $\text{Cl}(A)\subset C$.

(3) 若 $A\subset B$，则 $\text{Int}(A)\subset\text{Int}(B)$.

(4) 若 $A\subset B$，则 $\text{Cl}(A)\subset\text{Cl}(B)$.

(5) 当且仅当 $A=\text{Int}(A)$，A 是开集.

(6) 当且仅当 $A=\text{Cl}(A)$，A 是闭集.

下面我们来证明 (1)、(3) 和 (5)，而 (2)、(4) 和 (6) 的证明见练习 2.2.

(1) 的证明 设 U 是 X 中的一个开集，且 $U\subset A$. 由于 $\text{Int}(A)$ 是包含于 A 的所有开集的并，于是 U 是组成此并的集合之一，因而是此并的一个子集，即 $U\subset\text{Int}(A)$. ■

(3) 的证明 由于 $A\subset B$，因此 $\text{Int}(A)$ 是包含于 B 的一个开集. 由 (1) 可知，包含于 B 的每一个开集也包含于 $\text{Int}(B)$，因此 $\text{Int}(A)\subset\text{Int}(B)$. ■

(5) 的证明 若 $A=\text{Int}(A)$，根据定义，$\text{Int}(A)$ 是一个开集，于是 A 也是一个开集.

我们再从 A 是开集出发来证明 $A=\text{Int}(A)$. 首先，由 $\text{Int}(A)$ 的定义，$\text{Int}(A)\subset A$. 再由于 A 是包含于 A 的一个开集，由 (1) 可得，$A\subset\text{Int}(A)$. 于是，结论 $A=\text{Int}(A)$ 成立. ■

定理 2.2(1) 意味着，包含于 A 的每个开集包含于 A 的内部. 由此，$\mathrm{Int}(A)$ 是包含于 A 的最大开集. 类似地，定理 2.2(2) 意味着，包含 A 的每一个闭集也包含 A 的闭包，因而 $\mathrm{Cl}(A)$ 是包含 A 的最小闭集. 我们发现，关于内部和闭包的这些关系，在确立这些集合的性质时非常有用.

例 2.1 考虑 $A=[0, 1)$ 是 $\mathbf{R}$ 中具有标准拓扑的一个子集，那么 $\mathring{A}=(0, 1)$，$\overline{A}=[0, 1]$.

例 2.2 考虑 $A=[0, 1)$ 是 $\mathbf{R}$ 中具有离散拓扑的一个子集，那么 $\mathring{A}=\overline{A}=[0, 1)$.

例 2.3 考虑 $A=[0, 1)$ 是 $\mathbf{R}$ 中具有有限补拓扑的一个子集. 由于没有非空开集包含于 $[0, 1)$，所以 $\mathring{A}=\varnothing$. 由于 A 是无限集，而且在此拓扑中唯一的无限闭集是 $\mathbf{R}$，因此 $\overline{A}=R$.

例 2.4 考虑 $A=[0, 1)$ 是 $\mathbf{R}$ 中具有下限拓扑的一个子集. 由于 A 是一个开集，所以 $\mathring{A}=A$. 注意到 $\mathbf{R}-[0, 1)=(-\infty, 0)\cup[1, \infty)$ 是在 $\mathbf{R}$ 中具有下限拓扑的一个开集. 因此 $[0, 1)$ 在此下限拓扑中是闭集，于是同样有 $\overline{A}=A$.

重要注记 正如例 2.1 至 2.4 所论述的，一个集合 A 的内部和闭包，取决于包含 A 的集合 X 上的拓扑，而不仅仅取决于集合 A.

例 2.5 考虑 $\mathbf{R}$ 中具有标准拓扑的有理数集合 $\mathbf{Q}$. 我们认为 $\mathring{Q}=\varnothing$. 否则，设 U 是包含于 $\mathbf{Q}$ 的一个非空开集. 设 x 是 U 中的一个元素，那么存在一个开区间 (a, b)，使得 $x\in(a, b)\subset U\subset \mathbf{Q}$. 但是在每一对实数之间必有一个无理数. 于是每个区间包含 $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 的元素，因而 U 也是如此. 这就产生了矛盾，因此 $\mathring{Q}=\varnothing$.

当 $\mathbf{Q}$ 的内部一无所有时，如果我们取闭包就得到一切；特别是可得到 $\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$.（见练习 2.6.）

定义 2.3 一个拓扑空间 X 的子集 A 称为**稠密的**，如果 $\mathrm{Cl}(A)=X$.

由例 2.5 可得，$\mathbf{Q}$ 在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 中是稠密的.

例 2.6 在 $\mathbf{R}$ 上的有限补拓扑中，每个无限集都是稠密的. 这是什么原因呢？在这种拓扑中，闭集要么是有限集，要么是 $\mathbf{R}$ 本身. 因此，$\mathbf{R}$ 是包含一个无限集的唯一的闭集. 因此，如果 A 是 $\mathbf{R}$ 的一个无限子集，那么 $\mathrm{Cl}(A)=\mathbf{R}$，因此，$A$ 在 $\mathbf{R}$ 中是稠密的.

当需要确定一个特定的点 y 何时在一个已知集合 A 的内部，或何时在它的闭包之中时，以下两个定理提供了简单的方法：

定理 2.4 设 X 是一个拓扑空间，A 是 X 的一个子集，而 y 是 X 的一个元素. 当且仅当存在一个开集 U，使得 $y\in U\subset A$ 时，$y\in\mathrm{Int}(A)$.

证明 首先，设存在一个开集 U，使得 $y\in U\subset A$. 由于 U 是一个开集，且包含于 A 中，于是 $U\subset\mathrm{Int}(A)$. 因此，$y\in U$ 蕴涵 $y\in\mathrm{Int}(A)$.

其次，若 $y\in\mathrm{Int}(A)$，我们再设 $U=\mathrm{Int}(A)$，于是，U 是使得 $y\in U\subset A$ 的一个开集. ■

定理 2.5 设 X 是一个拓扑空间，A 是 X 的一个子集，而 y 是 X 的一个元素. 当且仅当每个包含 y 的开集之交为 A，$y\in\mathrm{Cl}(A)$.

证明 见练习 2.10. ■

例 2.7 在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中，设 A 是图 2.1 中左边的棒棒糖. 那么在此图的中间是 $\mathrm{Int}(A)$ 的图

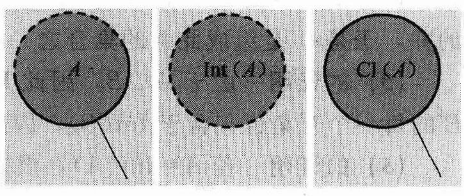


图 2.1 $\mathbf{R}^2$ 中集合 A 的内部和闭包

示，在此图的右边是 Int(A) 的图示.

以下定理提供了涉及内部、闭包、交、并和补的某些有用的关系：

定理 2.6 设 A，B 是一个拓扑空间 X 的集合，下列命题成立：

(1) $\text{Int}(X-A)=X-\text{Cl}(A)$.

(2) $\text{Cl}(X-A)=X-\text{Int}(A)$.

(3) $\text{Int}(A)\cup\text{Int}(B)\subset\text{Int}(A\cup B)$，而等号通常不成立.

(4) $\text{Int}(A)\cap\text{Int}(B)=\text{Int}(A\cap B)$.

以下证明 (1) 和 (3)，(2) 和 (4) 的证明见练习 2.11. 此外，练习 2.12 提出了两个对应于 (3) 和 (4) 且涉及闭包的结论.

(1) 的证明 我们分别来证明 $X-\text{Cl}(A)\subset\text{Int}(X-A)$ 和 $\text{Int}(X-A)\subset X-\text{Cl}(A)$. 首先，注意到 Cl($A$) 是闭集且包含 A，因而 $X-\text{Cl}(A)$ 是包含于 $X-A$ 的一个开集. 由定理 2.2(1) 可得 $X-\text{Cl}(A)\subset\text{Int}(X-A)$.

为了证明 $\text{Int}(X-A)\subset X-\text{Cl}(A)$，设任一 $x\in\text{Int}(X-A)$. 注意到 $\text{Int}(X-A)$ 与 A 是分离的，因而 x 在一个与 A 分离的开集中. 由定理 2.5 可得 $x\notin\text{Cl}(A)$，因此 $x\in X-\text{Cl}(A)$. 于是 $\text{Int}(X-A)\subset X-\text{Cl}(A)$.

由于我们已经证明了，$X-\text{Cl}(A)\subset\text{Int}(X-A)$ 与 $\text{Int}(X-A)\subset X-\text{Cl}(A)$ 都成立，于是就有 $\text{Int}(X-A)=X-\text{Cl}(A)$，得证. ■

(3) 的证明 由于 $\text{Int}(A)\subset A$，于是 $\text{Int}(A)\subset A\cup B$. 且有 Int($A$) 是一个开集. 同样，Int($B$) 是包含于 $A\cup B$ 的一个开集. 包含于 $A\cup B$ 的每一个开集也包含于 $\text{Int}(A\cup B)$. 因此，Int(A) 与 Int(B) 都包含于 $\text{Int}(A\cup B)$. 所以它们的并 $\text{Int}(A)\cup\text{Int}(B)$ 也包含于 $\text{Int}(A\cup B)$.

下面我们还应说明，存在 $\text{Int}(A)\cup\text{Int}(B)$ 不等于 $\text{Int}(A\cup B)$ 的情况. 取 $A=[-1, 0]$ 及 $B=[0, 1]$ 为具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 的子集. 于是，$\text{Int}(A)\cup\text{Int}(B)=(-1, 0)\cup(0, 1)$，但 $\text{Int}(A\cup B)=(-1, 1)$. 因此，在这种情况下 $\text{Int}(A)\cup\text{Int}(B)\neq\text{Int}(A\cup B)$. (见图 2.2.) ■

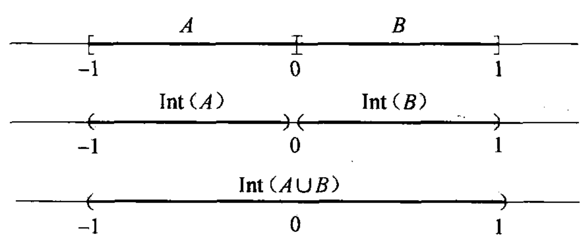


图 2.2 $\text{Int}(A)\cup\text{Int}(B)\neq\text{Int}(A\cup B)$

例 2.8 设 A 是无理数的集合，作为具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 的一个子集. 我们来证明 A 是稠密的. 注意到 $A=\mathbf{R}-\mathbf{Q}$，其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数的集合. 因此 $\text{Cl}(A)=\text{Cl}(\mathbf{R}-\mathbf{Q})=\mathbf{R}-\text{Int}(\mathbf{Q})$，根据定理 2.6(2) 可知第二个等式成立. 在例 2.5 中我们已经证明了 $\text{Int}(\mathbf{Q})=\varnothing$. 因此，$\text{Cl}(A)=\mathbf{R}$，由此可得，$A$ 在 $\mathbf{R}$ 中是稠密的.

2.1 节练习

2.1 在以下各种情况下确定 Int(A) 与 Cl(A).

(1) $A=(0, 1]$，在 $\mathbf{R}$ 上的下限拓扑中.

(2) $A=\{a\}$，在具有拓扑 $\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$的 $X=\{a, b, c\}$ 中.

(3) $A=\{a, c\}$，在具有拓扑 $\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$的 $X=\{a, b, c\}$ 中.

(4) $A=\{b\}$，在具有拓扑 $\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$的 $X=\{a, b, c\}$ 中.

(5) $A=(-1, 1)\cup\{2\}$，在 $\mathbf{R}$ 上的标准拓扑中.

(6) $A=(-1, 1)\cup\{2\}$，在 $\mathbf{R}$ 上的下限拓扑中.

(7) $A=\{(x, 0)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$，在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中.

(8) $A=\{(0, x)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$，在具有由练习 1.19 中的基所生成的拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中.

(9) $A=\{(x, 0)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$，在具有由练习 1.19 中的基所生成的拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中.

2.2 **证明定理 2.2 的 (2)、(4) 和 (6)**：设 X 是一个拓扑空间，而 A 与 B 是 X 的子集.

(1) 若 C 是 X 中的一个闭集，且 $A\subset C$，则 $\mathrm{Cl}(A)\subset C$.

(2) 若 $A\subset B$，则 $\mathrm{Cl}(A)\subset\mathrm{Cl}(B)$.

(3) 当且仅当 $A=\mathrm{Cl}(A)$，A 是闭集.

2.3 对于 $m<n\in\mathbf{Z}$，设 $I_{m,n}=\{m, m+1, \cdots, n\}$. 在数字轴中确定 $\mathrm{Int}(I_{m,n})$ 及 $\mathrm{Cl}(I_{m,n})$.（需要考虑 4 种情况，允许 m 或偶或奇，n 亦同样如此.）

2.4 考虑在一个集合 X 上的特殊点拓扑 PPX_p.（见练习 1.7.）分别对于包含 p 和不包含 p 的集合 A 确定 $\mathrm{Int}(A)$ 与 $\mathrm{Cl}(A)$.

2.5 考虑在一个集合 X 上的例外点拓扑 EPX_p（见练习 1.8）. 分别对于包含 p 和不包含 p 的集合 A 确定 $\mathrm{Int}(A)$与 $\mathrm{Cl}(A)$.

2.6 在 $\mathbf{R}$ 上的标准拓扑中证明 $\mathrm{Cl}(Q)=\mathbf{R}$.

2.7 设 $B=\left\{\frac{a}{2^n}\in\mathbf{R} \mid a\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{Z}^+\right\}$，证明 B 在 $\mathbf{R}$ 中是稠密的.

2.8 (1) 证明奇整数的集合在 $\mathbf{Z}$ 上的数字轴拓扑中是稠密的. 对于偶整数的集合结论同样成立吗？

(2) $\mathbf{Z}$ 的何种子集在 $\mathbf{Z}$ 上的离散拓扑中是稠密的？

2.9 在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中证明 $\mathrm{Cl}((a, b)\times(c, d))=[a, b]\times[c, d]$且 $\mathrm{Int}([a, b]\times[c, d])=(a, b)\times(c,d)$.

2.10 **证明定理 2.5**：设 X 是一个拓扑空间，A 是 X 的一个子集，而 y 是 X 的一个元素. 当且仅当每个包含 y 的开集之交为 A 时，$y\in\mathrm{Cl}(A)$.

2.11 **证明定理 2.6 的 (2) 与 (4)**：对于拓扑空间 X 的集合 A 与 B，下述命题成立

(1) $\mathrm{Cl}(X-A)=X-\mathrm{Int}(A)$.

(2) $\mathrm{Int}(A)\cap\mathrm{Int}(B)=\mathrm{Int}(A\cap B)$.

2.12 在以下每种情况下，确定在空格中的关系究竟应该是$\subset$、$\supset$还是$=$. 对等号不成立的情况，举例说明：

(1) $\mathrm{Cl}(A)\cap\mathrm{Cl}(B)$ ____ $\mathrm{Cl}(A\cap B)$.

(2) $\mathrm{Cl}(A)\cup\mathrm{Cl}(B)$ ____ $\mathrm{Cl}(A\cup B)$.

2.2 极限点

在 $\mathbf{R}^n$ 上的标准拓扑中，一个子集的极限点以我们所期望的方式出现，即此子集中存在趋近于此极限点的一个序列. 这是一个非常有用的概念. 然而，如果我们采用邻域，而不是采用序列，就能使极限点的定义更确切. 在不完全像 $\mathbf{R}^n$ 那样正宗的拓扑空间中，我们将发现某些不寻常的——多半是与直觉不一致的——可能性.

定义 2.7 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集. 如果 X 中的点 x 的每个邻域与 A 的交集，是异于 x 的一个点，那么 x 是 A 的**极限点**.

请注意，一个集合 A 的极限点可能位于此集合 A 中，也可能不位于此集合 A 之中．还要注意，在每个拓扑中点 x 不是集合 $\{x\}$ 的一个极限点．

例 2.9 考虑集合 $A=\left\{\frac{1}{n}\in\mathbf{R}\mid n\in\mathbf{Z}^+\right\}$ 为具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 的一个子集．如图 2.3 所示．

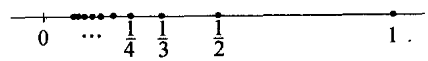


图 2.3 集合 $A=\left\{\frac{1}{n}\in\mathbf{R}\mid n\in\mathbf{Z}^+\right\}$

点 0 是 A 的一个极限点．原因何在？若 U 是包含 0 的一个开集，那么存在一个区间 (a,b)，使得 $0\in(a,b)\subset U$．但对于每个这样的开区间，$(a,b)\cap A\neq\varnothing$．所以，$U\cap A\neq\varnothing$．因此，0 的每个邻域交于 A．而由于 0 不在 A 中，此交集包含异于 0 的点．于是 0 是 A 的一个极限点．

事实上，0 是 A 的唯一极限点．给定 $x\in\mathbf{R}-\{0\}$，我们可以找到一个包含 x 的开区间，要么与 A 不相交（若 $x\notin A$），要么与 A 仅交于 x（若 $x\in A$）．在以上两种情况下，若 $x\neq0$，则 x 不是 A 的一个极限点．

例 2.10 考虑集合 $(0,1]$ 是具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 的一个子集．$(0,1]$ 的极限点是哪个点呢？回答是，任一 $x\in[0,1]$ 都是 $(0,1]$ 的极限点．$x\in[0,1]$ 的每个邻域 U 包含一个以 x 为元素的开区间 (a,b)．这样一个区间与 $(0,1]$ 交于异于 x 的一个点，因而 x 是 $(0,1]$ 的极限点．

此外，若 $x\notin[0,1]$，那么存在包含 x 的开区间，与 $(0,1]$ 不相交．所以，若 $x\notin[0,1]$，则 x 不是 $(0,1]$ 的极限点．

因此，$[0,1]$ 是 $(0,1]$ 的极限点集．

例 2.11 考虑有理数集合 $\mathbf{Q}$ 是具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 的一个子集．任一 $x\in\mathbf{R}$ 都是 $\mathbf{Q}$ 的极限点．原因何在？给定一个实数 x，以 x 为元素的一个开集 U，包含一个也以 x 为元素的开区间 (a,b)．但是，每个开区间与 $\mathbf{Q}$ 交于无限多个点，因而 (a,b) 与 $\mathbf{Q}$ 交于异于 x 的一个点，因而 x 是 $\mathbf{Q}$ 的极限点．

极限点为我们提供了求一个集合闭包的简便方法．

定理 2.8 设 A 是一个拓扑空间 X 的子集，并设 A' 是 A 的极限点集．那么，$\mathrm{Cl}(A)=A\cup A'$．

证明 我们分别来证明 $A\cup A'\subset\mathrm{Cl}(A)$ 和 $\mathrm{Cl}(A)\subset A\cup A'$．

首先，证明 $A\cup A'\subset\mathrm{Cl}(A)$．显然，$A\subset\mathrm{Cl}(A)$，因此，我们只需证明 $A'\subset\mathrm{Cl}(A)$．设 $x\in A'$，那么 x 的每个邻域交于 A．由定理 2.5，$x\in\mathrm{Cl}(A)$，于是得到 $A'\subset\mathrm{Cl}(A)$．因此 $A\cup A'\subset\mathrm{Cl}(A)$．

现在再来证明 $\mathrm{Cl}(A)\subset A\cup A'$．设 $x\in\mathrm{Cl}(A)$．要么 $x\in A$，要么 $x\in\mathrm{Cl}(A)-A$．由前者可得 $x\in A\cup A'$．而对于后者，$x\in\mathrm{Cl}(A)-A$．因为 $x\in\mathrm{Cl}(A)$，由定理 2.5，每个包含 x 的开集交于 A．由于 $x\notin A$，这一交集必包含一个异于 x 的点．于是 x 是 A 的极限点，因而 $x\in A\cup A'$．无论 $x\in A$，还是 $x\in\mathrm{Cl}(A)-A$，都有 $x\in A\cup A'$，于是 $\mathrm{Cl}(A)\subset A\cup A'$． ■

推论 2.9 一个拓扑空间的一个子集是闭集，当且仅当它包含其中的所有极限点．

证明 由定理 2.2 (6)，当且仅当 $A=\mathrm{Cl}(A)$ 时，A 是闭集．由定理 2.8，当且仅当 $A=A\cup A'$，其中 A' 是 A 的极限点集时，$A=\mathrm{Cl}(A)$．最后，当且仅当 $A'\subset A$，$A=A\cup A'$．于是，当且仅当 $A'\subset A$，A 是闭集，这正是我们所要证明的． ■

例 2.12 练习 1.27 中所引入的无限梳 C 如图 2.4 所示．集合 C 由沿着 x 轴上从 (0, 0) 到 (0, 1) 的水平线段，以及沿着从$\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$到$\left(\frac{1}{2^n}, 1\right)$的竖直线段构成，其中 $n=0, 1, 2, \cdots$.

若我们把 C 看成具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集，C 的每一个点是 C 的极限点，就同在竖直线段 $Y=\{(0, y)|0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上的点一样．如图 2.4 所示，任一点 $(0, y)\in Y$ 的每个邻域与组成 C 的竖直线段有交集．除了在 $C\cup Y$ 上的点之外，没有 C 的其他极限点，所以 $\mathrm{Cl}(C)=C\cup Y$.

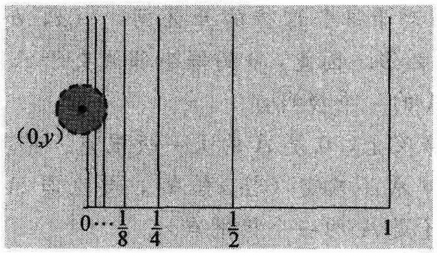


图 2.4　点(0, y)是无限梳的极限点，其中 $0\leqslant y\leqslant 1$

与极限点相接近的概念是收敛序列的概念.

定义 2.10 *在一个拓扑空间中一个序列* $(x_1, x_2, \cdots)$ *收敛于* $x\in X$，*如果对于* x *的每个邻域* U，*存在一个正整数* N，*使得当* $n\geqslant N$ *时，有* $x_n\in U$. *此时，我们说* x *是序列* $(x_1, x_2, \cdots)$ *的极限，且记为*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

在一个序列收敛于一个点 x 背后所隐藏的想法是，给定 x 的任一邻域 U，此序列最终进入 U 并逗留在其中.

例 2.13 如图 2.5 所示，考虑 $\mathbf{R}$ 中由 $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$所定义的序列．对于 $\mathbf{R}$ 上的标准拓扑，此序列收敛于 0，这是由于 0 的每个邻域包含一个开区间 $(-\alpha, \alpha)$，并使此序列最后进入并逗留在其中．(见练习 2.22.)

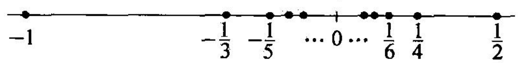


图 2.5　序列 $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$

在另一方面，如果我们考虑 $\mathbf{R}$ 上的下限拓扑，此序列却不收敛于 0．例如，取 0 的邻域 [0, 1)．此序列进入这个邻域，但是从未逗留在其中，这是因为任一其他项会跳出，取一个小于 0 的值．事实上，在 $\mathbf{R}$ 上的下限拓扑中，这个序列根本不收敛.

在 $\mathbf{R}^n$ 上的标准拓扑中，极限点是序列的极限，正如以下定理所指出的：

定理 2.11 *设* A *是在标准拓扑中* $\mathbf{R}^n$ *的一个子集．若* x *是* A *的极限点，那么* A *中存在一个收敛于* x *的点（的序）列.*

证明 见练习 2.20. ■

在一个一般的拓扑空间 X 中，集合 $B\subset X$ 的极限点不一定是 B 中一个序列的极限．(见练习 2.23.)

直觉也许会告诉我们，如果一个序列收敛于一个点，那么此点应该是唯一的．此情况出现于 $\mathbf{R}^n$ 上标准拓扑的场合．但是在其他拓扑的场合，情况并非如此．例如，对于 $\mathbf{R}$ 上的有限补拓扑，其中没有重复超过有限次元素的，值域为无限的每个序列，收敛于 $\mathbf{R}$ 中的每个点．(见练习 2.19.)

在一个豪斯多夫空间，上述情况就不可能出现了．以下的定理给出豪斯多夫空间的另一个便于使用的性质：

定理 2.12 *若* X *是一个豪斯多夫空间，则* X *中的点的每一个收敛序列，收敛于* X *中的*

唯一的点.

证明 令 X 是一个豪斯多夫空间. 设一个序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 在 X 中收敛于两个不同的点 x 与 y. 由于 X 是一个豪斯多夫空间，x 与 y 分别有不相交的邻域 U 和 V. 因为序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 收敛于 x，所以存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得对于所有 $n\geqslant N$，$x_n\in U$ 成立. 同样，存在 $M\in\mathbf{Z}^+$，使得对于所有 $n\geqslant M$，$x_n\in V$ 成立. 于是，若 m 同时大于 N 与 M 时，$x_m\in U\cap V$，这就同 U 与 V 不相交的事实相矛盾. 因此，在一个豪斯多夫空间中，收敛序列收敛于唯一的点. ■

2.2 节练习

2.13 在以下各情况，确定 A 的极限点集：

(1) $A=(0, 1]$，在 $\mathbf{R}$ 上的下限拓扑中.

(2) $A=\{a\}$，在具有拓扑 $\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$的 $X=\{a, b, c\}$ 中.

(3) $A=\{a, c\}$，在具有拓扑 $\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$的 $X=\{a, b, c\}$ 中.

(4) $A=\{b\}$，在具有拓扑 $\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$的 $X=\{a, b, c\}$中.

(5) $A=(-1, 1)\cup\{2\}$，在 $\mathbf{R}$ 上的标准拓扑中.

(6) $A=(-1, 1)\cup\{2\}$，在 $\mathbf{R}$ 上的下限拓扑中.

(7) $A=\{(x, 0)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$，在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中.

(8) $A=\{(0, x)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$，在具有由练习 1.19 中的基生成的 $\mathbf{R}^2$ 的拓扑中.

(9) $A=\{(x,0)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$，在具有由练习 1.19 中的基生成的 $\mathbf{R}^2$ 的拓扑中.

2.14 对于任一 $n\in\mathbf{Z}^+$，设 $B_n=\{n, n+1, n+2, \cdots\}$，考虑集族$\mathscr{B}=\{B_n \mid \mathbf{Z}^+\}$.

(1) 证明$\mathscr{B}$是 $\mathbf{Z}^+$ 上一个拓扑的一个基.

(2) 证明由$\mathscr{B}$所生成的 X 上的拓扑不是豪斯多夫的.

(3) 证明序列 $(2, 4, 6, 8, \cdots)$ 收敛于 $\mathbf{Z}^+$ 中具有由$\mathscr{B}$所生成的拓扑中的每一个点.

(4) 证明：其中不存在重复超过有限次元素的每个序列，在此拓扑中收敛于 $\mathbf{Z}^+$ 中的每个点.

(5) 找一个值域无限的序列，在此拓扑中仅收敛于 1.

2.15 在 $\mathbf{R}$ 上的有限补拓扑中确定 $[0, 1]$ 的极限点集.

2.16 在数字轴拓扑中确定单点集 $\{n\}$ 的极限点集. (结果依赖于 n 是奇数还是偶数.)

2.17 (1) 设$\mathscr{B}=\{(a, b)\subset\mathbf{R} \mid a, b\in\mathbf{Q}, a<b\}$. 证明$\mathscr{B}$是 $\mathbf{R}$ 上一个拓扑的一个基. 所得到的拓扑称为**有理下限拓扑**，记为 $\mathbf{R}_{rl}$.

(2) 分别在下限拓扑 $\mathbf{R}_l$ 及有理下限拓扑 $\mathbf{R}_{rl}$ 中确定 $A=(0, \sqrt{2})$ 和 $B=(\sqrt{2}, 3)$ 的闭包.

2.18 在 $\mathbf{R}$ 上的标准拓扑中确定 $A=\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\in\mathbf{R} \mid m, n\in\mathbf{Z}^+\right\}$的极限点集.

2.19 本题假定 $\mathbf{R}$ 具有有限补拓扑.

(1) 证明：其中不存在重复超过有限次元素的每个序列，收敛于 $\mathbf{R}$ 中的每个点.

(2) 找一个值域无限的序列，在此拓扑中仅收敛于 0.

(3) 找一个值域无限的序列，但没有极限.

2.20 **证明定理 2.11**：设 X 是在标准拓扑中 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集. 若 x 是A 的极限点，那么 A 中存在一个收敛于 x 的点（的序）列.

2.21 确定集合

$$S=\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x\leqslant 1\right\}$$

作为具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 一个子集的极限点集.（在平面上 S 的闭包称为**拓扑学家的正弦曲线.**）

2.22 在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 中考虑由 $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ 定义的序列，

(1) 证明点 0 的任一邻域包含开区间 $(-\alpha, \alpha)$.

(2) 证明对于每个开区间 $(-\alpha, \alpha)$，存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得对于所有 $n\geqslant N$，都有 $x_n\in(-\alpha, \alpha)$.

2.23 设$\mathcal{T}$是 $\mathbf{R}$ 中的子集族，由空集和任一其补集是可数集的集合所组成.

(1) 证明$\mathcal{T}$是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑（它称为**可数补拓扑.**）

(2) 证明在可数补拓扑中，点 0 是集合 $A=\mathbf{R}-\{0\}$ 的极限点.

(3) 证明在可数补拓扑中，$\mathbf{R}-\{0\}$ 没有收敛于 0 的序列.

2.3 集合的边界

对于集合边界的含义，我们已经有了一个直观的了解：它是位于与此集合的内部和外部都相接近的那些点.（见图 2.6.）但是，正如我们已经看到的，存在一些与此相对立的例子和拓扑，与我们的直觉构成挑战和对抗. 例如，$\mathbf{Q}$ 作为标准拓扑中 $\mathbf{R}$ 的一个子集，它的边界是什么呢？此外，在有限补拓扑中，闭区间 $[0, 1]$ 作为 $\mathbf{R}$ 的一个子集，它的边界又是什么呢？一个集合边界的定义，为了能严格地加以使用，作为拓扑学中一个重要的概念，已经被认真地加以选定并得到确切的理解.

定义 2.13 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，A 的**边界**（记为 ∂A）为

$$\partial A = \mathrm{Cl}(A) - \mathrm{Int}(A).$$

例 2.14 设 $[-1, 1]$ 在 $\mathbf{R}$ 上具有标准拓扑. 如图 2.7 所示，我们有 $\mathrm{Cl}(A)=[-1, 1]$，而 $\mathrm{Int}(A)=(-1, 1)$，因而 $\partial A=\{-1, 1\}$.

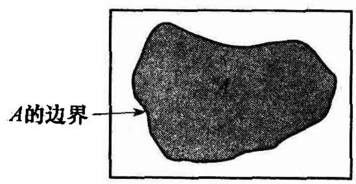


图 2.6 集合的边界

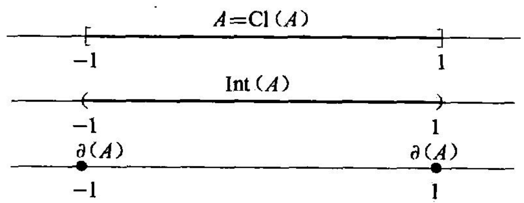


图 2.7 在 $\mathbf{R}$ 中确定 $[-1, 1]$ 的边界

例 2.15 设 A 是在图 2.8 中最左边的平面的子集. 正如图上所示，$\mathrm{Cl}(A)$ 是一个闭圆盘，$\mathrm{Int}(A)$ 是一个开圆盘，而 ∂A 是一个圆周.

以下的定理给出一些条件，有助于我们确定一个点是否在集合 A 的边界上.

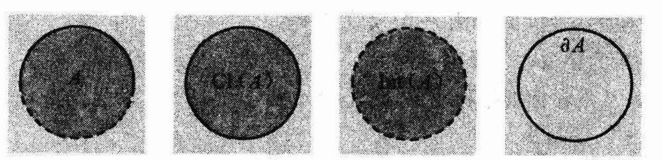


图 2.8 在平面上确定 A 的边界

定理 2.14 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，x 是 X 的一个点．那么，当且仅当 x 的每个邻域与 A 及 $X-A$ 都有交集时，$x\in\partial A$ 成立．

证明 首先，设 $x\in\partial A$．那么，$x\in \mathrm{Cl}(A)$，且 $x\notin \mathrm{Int}(A)$．而由于 $x\in \mathrm{Cl}(A)$，于是 x 的每个邻域都与 A 有交集．此外，由于 $x\notin \mathrm{Int}(A)$，于是 x 的每个邻域不是 A 的子集，因而与 $X-A$ 有交集．因此，x 的每个邻域与 A 及 $X-A$ 都有交集．

再设 x 的每个邻域与 A 及 $X-A$ 都有交集．于是，$x\in \mathrm{Cl}(A)$，且 $x\in \mathrm{Cl}(X-A)$．由定理 2.6 (2)，$\mathrm{Cl}(X-A)=X-\mathrm{Int}(A)$，因而 $x\notin \mathrm{Int}(A)$．所以，$x\in \mathrm{Cl}(A)$，且 $x\notin \mathrm{Int}(A)$，即 $x\in \mathrm{Cl}(A)-\mathrm{Int}(A)=\partial A$． ■

以下是与一个集合 A 边界有关的几个立杆见影的事实．它们全都可迅速地由定义推出．

定理 2.15 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，那么成立关于 A 的边界的下述命题：

(1) ∂A 是闭集．

(2) $\partial A=\mathrm{Cl}(A)\cap \mathrm{Cl}(X-A)$．

(3) $\partial A\cap \mathrm{Int}(A)=\varnothing$．

(4) $\partial A\cup \mathrm{Int}(A)=\mathrm{Cl}(A)$．

(5) $\partial A\subset A$，当且仅当 A 是闭集．

(6) $\partial A\cap A=\varnothing$，当且仅当 A 是开集．

(7) $\partial A=\varnothing$，当且仅当 A 既开又闭．

证明 见练习 2.28． ■

例 2.16 考虑 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 上具有标准拓扑．由于 $\mathrm{Cl}(\mathbf{Q})=\mathbf{R}$，而 $\mathrm{Int}(\mathbf{Q})=\varnothing$，于是有 $\partial\mathbf{Q}=\mathbf{R}$．因此，整个实轴 $\mathbf{R}$ 是实数的边界．这当然是合理的——每个实数与有理数的集合，以及它的补集即无理数的集合都任意接近．

例 2.17 考虑作为具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中一个子集的竖直区间 $\{0\}\times[-1,1]$．按下述方式来看此区间，即把它作为 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集，而不是当作 $\mathbf{R}$ 的一个子集，它的边界如何展现就会产生巨大的差别．此时，$\mathrm{Int}(A)=\varnothing$，且 $\mathrm{Cl}(A)=A$，因此 $\partial A=A$．

例 2.18 设在具有离散拓扑的 $\mathbf{R}$ 之中 $A=[-1,1]$．此时，$\mathrm{Int}(A)=[-1,1]$，且 $\mathrm{Cl}(A)=[-1,1]$；因此 $\partial A=\varnothing$．

而如果我们把 $[-1,1]$ 看作为在此离散拓扑中既开又闭，于是由定理 2.15 (7)，它的边界就是空集．

例 2.19 设 $A=[-1,1]$ 作为具有下限拓扑的实轴 $\mathbf{R}_l$ 的一个子集．此时，$\mathrm{Cl}(A)=[-1,1]$，而 $\mathrm{Int}(A)=[-1,1)$，因此 $\partial A=\{1\}$．

以上几个例子说明，一个集合 A 的边界，依赖于包含 A 的集合 X 上的拓扑，而不仅仅依赖于 A 本身．

2.3 节练习

2.24 在以下各种情况下确定 ∂A：

(1) 在 $\mathbf{R}$ 上的下限拓扑中 $A=(0,1]$．

(2) 在具有拓扑 $\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$ 的 $X=\{a,b,c\}$ 中 $A=\{a\}$．

(3) 在具有拓扑 $\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$的 $X=\{a, b, c\}$ 中 $A=\{a, c\}$.

(4) 在具有拓扑 $\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$的 $X=\{a, b, c\}$ 中 $A=\{b\}$.

(5) 在 $\mathbf{R}$ 上的标准拓扑中 $A=(-1, 1)\cup\{2\}$.

(6) 在 $\mathbf{R}$ 上的下限拓扑中 $A=(-1, 1)\cup\{2\}$.

(7) 在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中 $A=\{(x, 0)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$.

(8) 在具有由练习 1.19 中的基所生成的 $\mathbf{R}^2$ 的拓扑中 $A=\{(0, x)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$.

(9) 在具有由练习 1.19 中的基所生成的 $\mathbf{R}^2$ 的拓扑中 $A=\{(x, 0)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$.

2.25 (1) $I_{m,n}=\{m, m+1, \cdots, n\}$，其中 $m<n\in\mathbf{Z}$. 在数字轴拓扑中确定 $\partial(I_{m,n})$.（这里要考虑 4 种情况，m 可以为偶，也可以为奇；n 也如此.）

(2) 当 $n\in\mathbf{Z}$，在数字轴拓扑中确定 $\partial\{n\}$，分别考虑 n 为偶或为奇的情况. 讨论你关于 $\partial\{n\}$ 的结果如何借助在 1.4 节中所描述的数字轴来反映数字图像显示的结构.

2.26 在标准拓扑中，确定 $\mathbf{R}^2$ 的下列各个子集的边界：

(1) $A=\{(x, 0)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in\mathbf{R}\}$.

(2) $B=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0, y\neq 0\}$.

(3) $C=\{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\in\mathbf{R}^2 \mid n\in\mathbf{Z}^+\}$.

(4) $D=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\leqslant x^2-y^2<1\}$.

2.27 在有限补拓扑的 $\mathbf{R}$ 中确定 $\partial([0, 1])$，并检验你的结果.

2.28 **证明定理 2.15**：设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，那么：

(1) ∂A 是闭集.

(2) $\partial A=\mathrm{Cl}(A)\cap\mathrm{Cl}(X-A)$.

(3) $\partial A\cap\mathrm{Int}(A)=\varnothing$.

(4) $\partial A\cup\mathrm{Int}(A)=\mathrm{Cl}(A)$.

(5) $\partial A\subset A$，当且仅当 A 是闭集.

(6) $\partial A\cap A=\varnothing$，当且仅当 A 是开集.

(7) $\partial A=\varnothing$，当且仅当 A 既开又闭.

2.4 在地理信息系统中的一个应用

一个地理信息系统（GIS）是一个计算机系统，能汇总、存储、处理和显示与地理有关的数据. 这些数据常常用来解决复杂的计划和管理问题. 为了分析空间的信息，用户通过所提出问题来选择源于 GIS 的数据. 典型的 GIS 问题，是把空间关系具体化为关于空间对象约束的描述，以便进行分析和显示.

例如，在研究为一个州重建区域内湿地的保护时，GIS 的一位用户可能想寻求部分或全部归属于该州风景区的所有湿地的显示.（见图 2.9.）GIS 就会对湿地区域和州内风景区域进行搜索，并考察它们相互之间的关系，以便使所有满足特定要求的湿地得以重现.

显然，在一个地理信息系统（GIS）中，需要能对陆地区域之间可能的不同关联方式加以区分. 作为一位数学家来说，通常满足于了解两个集合是否有交集. 但是在 GIS 中，还需要对有交集和无交集进行更精细的分类. 例如，在图 2.10 中，集合 A 与 B，以及 A'与 B'都有

交集，但它们的交集在本质上却有明显的差别．需要使这些差别更加精确．

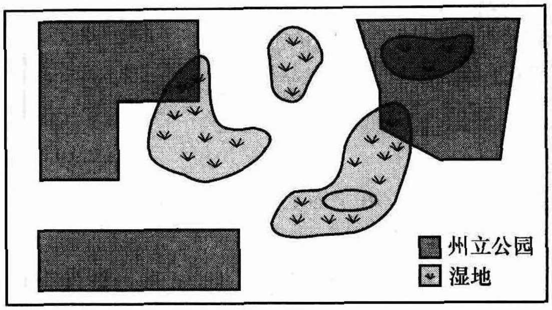


图 2.9 哪些湿地的部分或全部归属于一个州立公园

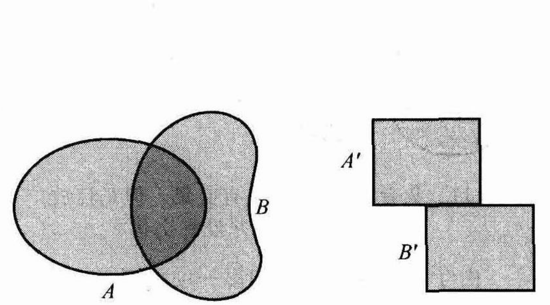


图 2.10 A 与 B 的相交方式不同于 A' 与 B'

此外，对于图 2.11，乍一看来 C 与 D 有交集，但在对我们所见到的状况迅速放大之后却发现它们并没有交集．在一个 GIS 中所存储的信息涉及这些集合之间的关系，与它们在特定状况中如何出现无关。于是，根据所存储的 C 与 D 无交集的信息，GIS 就能确保这两个集合之间的关系，实质上与表示它们的可能导致错误的图形表示，特别是由分辨率很低而显示出来的那些特征无关。

让我们来应对有关 GIS 建模方面的需求．在对 1 维信息建模和进行处理时，计算机系统是非常有效的．在自然界，1 维信息在本质上是数字．而计算机系统对实数系统以及它的算术运算和顺序关系拥有一个正确且行之有效的模型．计算机可以容易地处理有关 1 维信息方面的问题．例如，可以回答："如果我开出一张 1000 美元的支票，我自己的存款账户会透支吗?"以及"新英格兰 6 个州的总人口是多少?"这样的问题．

但是，当信息的状态提升 1 维时，建模就会变得更加困难．一个模型必须能回答诸如"黄石国家公园在哪一个州?"、"伊利诺斯州在佛罗里达州的北面吗?"这样的问题．能够回答这些问题的系统，必须保持地理对象的踪迹，必须能够完成与它们有关的运算，并能够精确地定义诸如"在其中"、"在……的北面"这样的关系．此外，这样一个系统还必须与我们的直觉和对这些对象、运算和关系的理解相一致．显然，这是在建模方面一项重要的需求．

地理信息系统理论是空间信息科学与工程这一领域的一个组成部分．它在近年来经历了惊人的发展．拓扑学在该领域中提供了许多有价值的建模工具．我们提出最早发表在 [Ege] 上的一个简单模型，它在定义和区别两个地理学区域之间的关系时使用了拓扑学的概念．虽然这个模型并不完善，但它却是一个起点．这个模型所提出的对此关系的描述，已经作为 GIS 产业的标准．

在我们提出的这个模型中，我们的兴趣是拓扑空间 X 中的一对闭集 A 与 B，我们的目标是用拓扑概念来考察在 X 中 A 与 B 彼此关联的不同方式．

已知 X 中的闭集 A 与 B，我们考虑 4 个交集：$\partial A\cap\partial B$，$\mathring{A}\cap\mathring{B}$，$\partial A\cap\mathring{B}$，$\mathring{A}\cap\partial B$，考察它们是否为空集．

定义 2.16 对于集合 Y，若 Y 是空集，定义 $C_Y=0$；若 Y 不是空集，定义 $C_Y=1$．已知 X 中的闭集 A 与 B，**X 中 A 与 B 的交值** $I_{A,B}$ 定义为

$$I_{A,B}=(C_{\partial A\cap\partial B},C_{\mathring{A}\cap\mathring{B}},C_{\partial A\cap\mathring{B}},C_{\mathring{A}\cap\partial B}).$$

在平面上一对集合的交值的例子如图 2.12 所示．

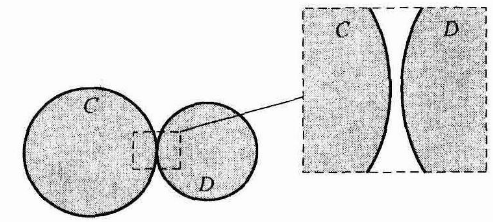


图 2.11 集合 C 与 D 似乎有交集，但是经放大后却显示它们并没有交集

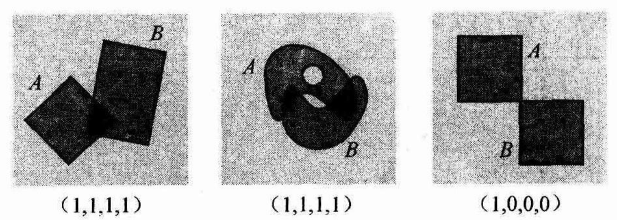


图 2.12 在平面上各对集合的交值

由于在 4 项交值中的每一项可以是 0 或 1，因此交值有 16 种不同的可能性. 此 16 种可能性会导致平面上 16 对闭集. 在图 2.13 中图示了其中 8 种. 在练习 2.34 中，我们要求找出其他 8 种例子.

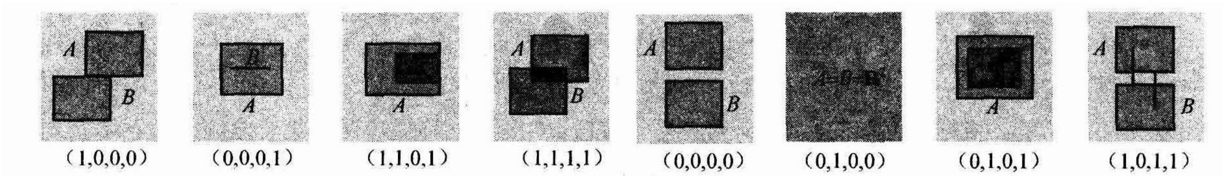


图 2.13 在平面上导致八种可能交值的各对闭集

在诸如 GIS 的应用中，我们要求限制所考虑集合的类型. 例如，我们可能仅希望为图 2.9 所示的那种地理区域建模. 因此我们将排除像图 2.13 所示的有一个线段突出来的那些集合. 虽然当我们考察国家之间的边界时应该允许用无限细的弧，但我们并不要求让它们表示陆地的面积. 我们如何排除所有各种可能性呢？下述定义帮助我们付诸实施.

定义 2.17 若 $A=\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$，则称 A 为**正则闭集**.

例如，闭区间 $[a, b]$，$a<b$，是具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 中的正则闭集，由于它的内部是 (a, b)，而它内部的闭包是原集合 $[a, b]$. 在图 2.14 中左边出现的集合，是在标准拓扑中平面的正则闭子集，而在右边出现的集合则不是.

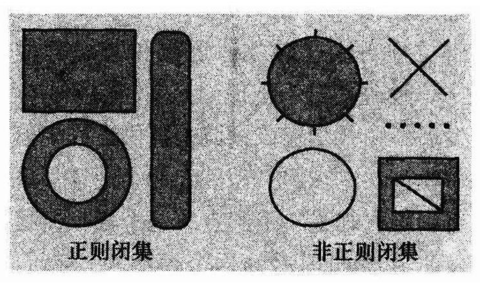


图 2.14 在平面的闭集，一些是正则闭集，另一些不是

平面的正则闭子集没有粘贴的胡须，所有的边界点具有任意接近于内部的点.（见练习 2.35.）在为地理区域建模时，这一特征是一项基本的要求. 对于正则闭集来说，以前我们曾限制在 16 个交值中仅有某几个是可能出现的. 我们借助下列定理和推论，就使此点成为显而易见的了：

定理 2.18 设 A 与 B 是一个拓扑空间 X 的正则闭集. 若 $\partial A\cap\mathring{B}\neq\varnothing$，则 $\mathring{A}\cap\mathring{B}\neq\varnothing$.

证明 首先，我们证明 $\partial A\subset\mathrm{Cl}(\mathring{A})$. 由于 A 是闭集，于是 $\partial A\subset A$. 此外，由正则闭集的定义，$A=\mathrm{Cl}(\mathring{A})$. 因此 $\partial A\subset\mathrm{Cl}(\mathring{A})$. ■

再来证明，若 $\partial A\cap\mathring{B}\neq\varnothing$，则 $\mathring{A}\cap\mathring{B}\neq\varnothing$. 设 $\partial A\cap\mathring{B}\neq\varnothing$，并设 x 是此交集的一个元素. 由于 $x\in\partial A\subset\mathrm{Cl}(\mathring{A})$，于是每个包含 x 的开集交于 $\mathring{A}$. 而 $\mathring{B}$ 是包含 x 的一个开集；因此，$\mathring{B}$ 与 $\mathring{A}$ 有交集. 因此，$\mathring{A}\cap\mathring{B}\neq\varnothing$，这正是我们所要证明的. ■

下列推论显然成立：

推论 2.19 *对于一个拓扑空间 X 的一对正则闭集 A 与 B 来说，交值 (1, 0, 1, 0)，(0, 0, 1, 0)，(1, 0, 0, 1)，(0, 0, 0, 1)，(1, 0, 1, 1) 和 (0, 0, 1, 1) 是不可能出现的.*

10 个交值中的每一个都不能由推论 2.19 排除，这个结论可由平面上那些成对的正则闭集得出. 其中一些如图 2.13 所示，其余可见练习 2.34.

交值为我们提供了区分两个集合可能有交集的不同方式. 但是它却不能区分许多不同的构形. 然而存在这样的情况，交值允许我们对两个集合之间关系的本质作出特定的结论. 例如，容易看出，若 $I_{A,B}=(0, 0, 0, 0)$，那么 A 与 B 是分离集. 对 A 与 B 作某些直接的假定，我们将获得交值所允许的一个集族，对这两个集合的构形的本质，作出其他特定的结论.

定义 2.20 *一个**可平面化的空间区域**是满足下列条件的，$\mathbf{R}^2$ 的一个非空真子集 C：*

(1) 它是正则闭集.

(2) C 的内部不能表示为两个非空开集的并.

我们已经指出过正则闭集的重要性. 在可平面化空间区域的定义中的第二个条件，与连通性有关. 它是一个拓扑学的性质，是第 6 章的课题. 这个条件要求：此集合没有相互分离的内部，例如仅有彼此穿过边界可到达的内部.（见图 2.15.）

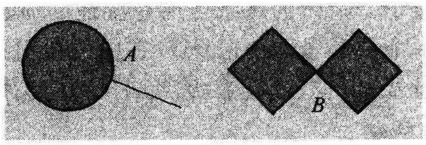


图 2.15 不是可平面化空间区域的集合

闭球和多边形是可平面化空间区域的例子. 有关连通性的这些结论需要证明：这些集合满足成为可平面化空间区域的第二个条件. 在第 6 章，我们将推导这些结论.

在图 2.15 中，我们展示了不是可平面化空间区域的平面子集的例子. 集合 A 不是可平面化空间区域，这是由于它不是正则闭集. 集合 B 不是可平面化空间区域，这是由于它的内部是两个非空分离开集的并.

下列定理指出，如果我们自己仅限于考虑可平面化空间区域，借助交值，就能对所涉及的集合之间的关系作出特定的结论.

定理 2.21 *设 A 与 B 是可平面化空间区域. 对于 A 与 B 来说，只可能出现右列表中左栏中所列的交值. 此外，如果交值列入左栏中，那么 A 与 B 的关系列入相应的右栏的栏目之中.*

交值	关系
(1, 1, 1, 0)	$A\subset B$
(0, 1, 1, 0)	$A\subset \mathrm{Int}(B)$
(1, 1, 0, 1)	$B\subset A$
(0, 1, 0, 1)	$B\subset \mathrm{Int}(A)$
(1, 1, 0, 0)	$A=B$
(0, 0, 0, 0)	$A\cap B=\varnothing$
(1, 0, 0, 0)	$A\cap B=\partial A\cap\partial B$
(0, 1, 1, 1)	$\mathrm{Int}(A)\cap\mathrm{Int}(B)\neq\varnothing$,
(1, 1, 1, 1)	$A\not\subset B$, $B\not\subset A$

此表最后 4 行的结果对于一个拓扑空间 X 的每对闭集 A 与 B 确实成立.（见练习 2.30.）这个定理其余结论的证明，需要在第 6 章建立的有关连通性的结论. 在 6.1 节的一组补充练习中，我们再重提这些结论.

第 5 行的结果特别有趣. 已知两个可平面化空间区域，如果我们知道它们的交值是 (1, 1, 0, 0)，那么我们就可以得出结论，这两个集合必定是相等集.

一个集合成为可平面化空间区域所需的两个性质，是定理 2.21 所要求的. 如果我们不要求这两个性质，那么对于交值 (1, 1, 0, 0)，可能找到不相等的集合 A 与 B.（见练习 2.31.）

Open Geospatial Consortium 是由共同为 GIS 软件建立产业标准的人员所开发的一组软

件. 他们已经对交值加以扩展，采用了一个以拓扑学为基础的函数，考虑如何对彼此有关的两个地理区域进行编码（见［Ryd］）. 我们并未指定“地理区域”的明确含义，但是它们是可平面化空间区域的一些例子.

由于地理区域是可平面化空间区域，定理 2.21 适用. 因此 Open Geospatial Consortium 软件已经采纳了一种语言，来对各个地理区域之间的关系加以描述. 与交值有关的描述性的表达式在下表中已列出. 这些描述性的表达式覆盖了两个地理区域之间关系的所有可能性（由定理 2.21 可知），而且由于它们与特定的交值有关，因而是相互排斥的.

描述性表达式	交值	关系
A 与 B 分离	(0, 0, 0, 0)	$A\cap B\neq\varnothing$
A 与 B 相切	(1, 0, 0, 0)	$A\cap B=\partial A\cap\partial B$
A 等于 B	(1, 1, 0, 0)	$A=B$
A 在 B 内	(1, 1, 1, 0)或(0, 1, 1, 0)	$A\subset B$
A 包含 B	(1, 1, 0, 1)或(0, 1, 0, 1)	$A\supset B$
A 与 B 重叠	(1, 1, 1, 1)或(0, 1, 1, 1)	$\mathrm{Int}(A)\cap\mathrm{Int}(B)\neq\varnothing$, $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

请回忆前面已描述过的状况，其中，GIS 一个用户提出一个请求，希望寻求部分或全部归属于一个州的风景区所有湿地的显示. 作为对此请求的回应，GIS 会对包括一个湿地区域 A 与一个州风景区内区域 B 在内的各对地理区域进行检验，并对所有这些对地理区域作出诸如 A 与 B 相等、A 包含 B 或 A 与 B 部分重叠的回答.

2.4 节练习

2.29 设 $A=[a_1, a_2]$ 及 $B=[b_1, b_2]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的有界闭区间. 对以下的每组交值确定哪种能，哪种不能导致 $\mathbf{R}$ 中的 A 与 B 的 4 种可能的交值. 描述哪些交值能导致，并证明其余的交值不能导致.

(1) (0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0)

(2) (0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)

(3) (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1)

(4) (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)

2.30 设 A 与 B 是拓扑空间 X 的闭集.

(1) 证明：如果 $I_{A,B}=(0, 0, 0, 0)$，那么 $A\cap B=\varnothing$；

(2) 证明：如果 $I_{A,B}=(1, 0, 0, 0)$，那么 $A\cap B=\partial A\cap\partial B$；

(3) 证明：如果 $I_{A,B}=(1, 1, 1, 1)$ 或 $(0, 1, 1, 1)$，那么
$\mathrm{Int}(A)\cap\mathrm{Int}(B)\neq\varnothing$，$A\not\subset B$，$B\not\subset A$.

2.31 本题要求证明：如果我们放弃对于确定 A 与 B 是可平面化空间区域的任一条件，那么 $I_{A,B}=(1, 1, 0, 0)$ 未必蕴涵 $A=B$.

(1) 举平面上闭集 A 与 B 的一个例子，使得 $I_{A,B}=(1, 1, 0, 0)$ 且 $A\neq B$.

(2) 举平面上闭集 A 与 B 的一个例子，其中每个闭集以一个开球为它的内部，使得 $I_{A,B}=(1, 1, 0, 0)$ 且 $A\neq B$.（在第 6 章，我们将证明，在 $\mathbf{R}^2$ 中的一个开球是连通的，其含义是不能表示为两个分离非空开子集的并，因此，一个以开球为它的内部的集合，满足成为可平面化空间区域的第二个条件.）

2.32 证明：如果 U 是一个开集，且 $B=\mathrm{Cl}(U)$，那么 B 是正则闭集.

2.33 证明：闭矩形 $[a, b]\times[c, d]$ 作为平面的一个子集，是正则闭集.

2.34 举平面上一对闭集的例子，导致在图 2.13 中未描述的 8 种交值. 只要有可能，就使用任一对正则闭集.

2.35 (1) 举例说明 ∂A 未必等于 $\partial(\mathrm{Int}(A))$.

(2) 证明：对于正则闭集 A，$\partial A=\partial(\mathrm{Int}(A))$.

第3章

构建新的拓扑空间

在本章，我们从已知的特定拓扑空间出发，考察构建新的拓扑空间的某些方法. 在3.1节，我们说明一个拓扑空间的一个子集如何从空间本身传承一种拓扑. 在3.2节，我们说明在一个新的拓扑空间如何通过取一些拓扑空间的乘积结果，即积空间，从而把它们组合起来. 在3.3节和3.4节中，我们说明如何把一个拓扑空间的几部分粘合在一起，从而得到被称为商空间的一种新空间. 最后在3.5节，我们引入构形空间和相空间，并考察一些例子，看一看它们在物理科学中是如何出现的.

在整个这一章，我们引入许多新的拓扑空间. 就所涉及的拓扑来说，如果对所描述的空间不能加以区分，就继续使用“拓扑等价”的说法. 在第4章，我们将正式用称为同胚的函数，来定义拓扑等价.

3.1 子空间拓扑

已知拓扑空间 X 的一个子集 Y，以下是根据 X 上的拓扑来定义 Y 上的拓扑的一种自然的方式.

定义 3.1 设 X 是一个拓扑空间，而 Y 是 X 的一个子集. 定义 $\mathcal{T}_Y=\{U\cap Y \mid U$ 在 X 中是开集$\}$，称为 Y 上的**子空间拓扑**，而对于此拓扑，称 Y 为 X 的一个**子空间**. 如果 V 是 Y 上子空间拓扑的一个开集，我们就称 $V\subset Y$ **在 Y 中是开的.**

于是，在 Y 上子空间拓扑中的一个集合是开的，如果它是 X 中一个开集与 Y 的交集.

当然，我们需要确认此子空间拓扑确实是一个拓扑：

(1) 首先，我们注意到 $\varnothing$ 与 Y 在 Y 中都是开集，这是由于 $\varnothing=\varnothing\cap Y$，且 $Y=X\cap Y$.

(2) 其次，我们证明，在 Y 中有限多个开集的交，在 Y 中仍是开集. 设在 Y 中 V_1，…，V_n 是开集. 那么对于每个 i，在 X 中存在开集 U_i，使得 $V_i=U_i\cap Y$. 而

$$V_1\cap\cdots\cap V_n=(U_1\cap Y)\cap\cdots\cap(U_n\cap Y)=(U_1\cap\cdots\cap U_n)\cap Y$$

由于 $U_1\cap\cdots\cap U_n$ 在 X 中是开集，于是 $V_1\cap\cdots\cap V_n$ 在与 Y 有交集的 X 中，也是一个开集，因而在 Y 中是开集.

(3) 最后，我们证明，在 Y 中任意多个开集的并，在 Y 中是开集. 设 $\{V_\alpha\}$ 是在 Y 中的开集的一个集族. 那么对于每个 α，在 X 中存在一个开集 U_α，使得 $V_\alpha=U_\alpha\cap Y$. 因此，

$$\bigcup V_\alpha=\bigcup(U_\alpha\cap Y)=(\bigcup U_\alpha)\cap Y$$

这样，$\bigcup U_\alpha$ 在 X 中是开集，由此得出，$\bigcup V_\alpha$ 在与 Y 相交的 X 中是开集. 因此 $\bigcup V_\alpha$ 在 Y

中是开集.

例 3.1 考虑 $I=[0, 1]$ 是具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 中的一个子集. 在 I 上的子空间拓扑中, 在 I 中的开集在与 I 相交的 $\mathbf{R}$ 中是开集. 例如, 形如 (a, b) 的集合, 其中 $0<a<b<1$, 在 I 上的子空间拓扑中是开集 (同样, 在 $\mathbf{R}$ 中也是开集). 而由于 $0<a<1$, 集合 $[0, a)$ 与 $(a, 1]$ 在 I 上的子空间拓扑中仍然是开集, 即使它们在 $\mathbf{R}$ 中不是开集. (见图 3.1.)

例 3.2 考虑从 $\mathbf{R}$ 上标准拓扑传承而来的整数集合 $\mathbf{Z}$ 的子空间拓扑 (见图 3.2.). 由于在 $\mathbf{R}$ 中的开区间在此标准拓扑中是开集, 又由于每个整数包含于一个不包含其他整数的开区间之中, 所以包含每个整数的单点集, 在 $\mathbf{Z}$ 上的子空间拓扑中是开集. 这些集合的任意并是开集. 因此, $\mathbf{Z}$ 的每个子集在 $\mathbf{Z}$ 中是开集, 而 $\mathbf{Z}$ 上的子空间拓扑是离散拓扑.

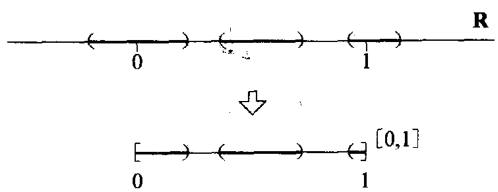


图 3.1 在 $I=[0, 1]$ 上的子空间拓扑

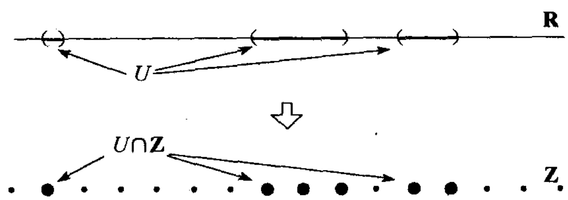


图 3.2 从 $\mathbf{R}$ 传承而来的整数集 $\mathbf{Z}$ 的拓扑

在前两个例子中, 我们可以把从 $\mathbf{R}$ 上标准拓扑传承而来的子空间拓扑, 看作是在对应集合上的标准拓扑. 更一般地, 我们有下列定义:

定义 3.2 设 Y 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集. Y 上的**标准拓扑**, 是由具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间传承而来的拓扑.

于是, 圆、球以及更一般的 n 维球面作为欧氏空间的子空间, 全都具有一种标准拓扑. 这个结论对于圆盘、n 维球、开圆盘及开 n 维球同样成立.

例 3.3 设 $Y=[-1, 0)\cup(0, 1]\subset\mathbf{R}$. 在 Y 上的标准拓扑中, $[-1, 0)$ 与 $(0, 1]$ 都是开集. 因此, 它们的补集分别为 $(0, 1]$ 与 $[-1, 0)$, 在 Y 上的标准拓扑中是闭集. 于是, 在 Y 上的标准拓扑中, 集合 $[-1, 0)$ 与 $(0, 1]$ 既开又闭.

在定义 3.1 中, 我们定义了 "在 Y 中是开的", 下面讨论在一个子空间拓扑中的闭集.

定义 3.3 设 X 是一个拓扑空间, 并设 $Y\subset X$ 有子空间拓扑. 我们说集合 $C\subset Y$ **在 Y 中是闭的**, 如果 C 在 Y 上的子空间拓扑中是闭的.

C 在 Y 中是闭的, 这究竟意味着什么呢? 一如既往, 闭意味着它的补集是开集, 因此如果 $Y-C$ 在 Y 中是开的, 那么集合 $C\subset Y$ 在 Y 中是闭的. 在另一方面, 下列定理指出, 我们通过取 X 中闭集与 Y 的交集, 就可以得到 Y 中的闭集.

定理 3.4 设 X 是一个拓扑空间, 并设 $Y\subset X$ 有子空间拓扑. 那么, 当且仅当对于 X 中的某个闭集 D, 有 $C=D\cap Y$, $C\subset Y$ 在 Y 中是闭的.

证明 见练习 3.3. ■

我们将发现, 用原空间的一组基, 能产生此拓扑空间的一个子集上子空间拓扑的一组基, 这是很有用的结论.

定理 3.5 设 X 是一个拓扑空间, $\mathcal{B}$ 是 X 上拓扑的一组基. 如果 $Y\subset X$, 那么集族

$$\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathscr{B}\}$$

是 Y 上此子空间拓扑的一组基.

证明 首先，注意到$\mathscr{B}_Y$ 是 Y 上此子空间拓扑中的一个开集族．我们用定理 1.13 来证明$\mathscr{B}_Y$ 是此子空间拓扑的一组基．假定 W 是 Y 上此子空间拓扑中的一个开集．设任一 $y \in W$．那么 $W = U \cap Y$，其中 U 在 X 中是开的．在$\mathscr{B}$中存在一个基元素 B，使得 $y \in B \subset U$．（见图 3.3.）于是，$y \in B \cap Y \subset U \cap Y = W$．由于 $B \cap Y \in \mathscr{B}_Y$，由定理 1.13 可得$\mathscr{B}_Y$ 是 Y 上此子空间拓扑中的一组基. ■

例 3.4 考虑包含于具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 中的圆周 S^1．由于开球构成 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑的一组基，它们与 S^1 的交构成 S^1 上标准拓扑的一组基．所得到的基元素是此圆周的开区间，由此圆周中两个角度之间的所有点构成．（见图 3.4.）

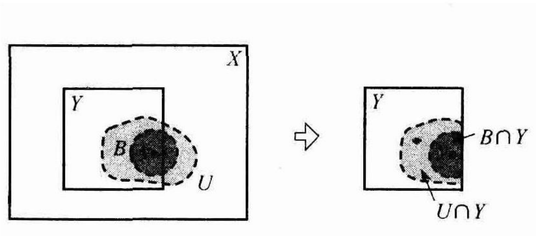


图 3.3 子空间拓扑的传承基元素

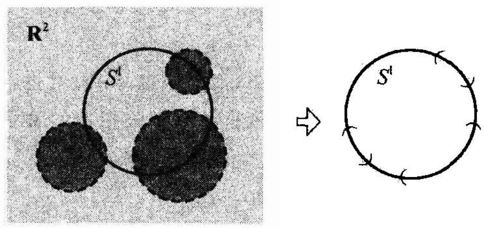


图 3.4 S^1 的基元素是此圆周的开区间

重要注记 当把"此圆周"作为一个拓扑空间时，我们是指 S^1 具有标准拓扑．当我们称"一个圆周"时，是指与此圆周等价的一个空间．这在"此圆盘"替代"一个圆盘"、"此球面"替代"一个球面"时，同样成立.

例 3.5 在 $\mathbf{R}^3$ 中，设 C 是在 xz 平面上以点 (2，0，0) 为圆心以 1 为半径的圆周．考虑当 C 绕 z 轴旋转扫过而成的 $\mathbf{R}^3$ 的子空间．（见图 3.5.）所形成的空间称为**环面**，记为 T.

例 3.6 若 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个曲面，那么由 $\mathbf{R}^3$ 中的开球与 S 取交集所得的 S 中的开补丁的集族（见图 3.6)，是 S 上标准拓扑的一组基.

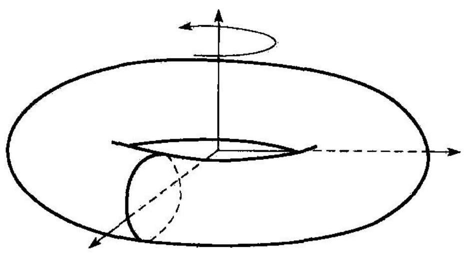


图 3.5 一个圆绕 z 轴旋转扫过而成的环面

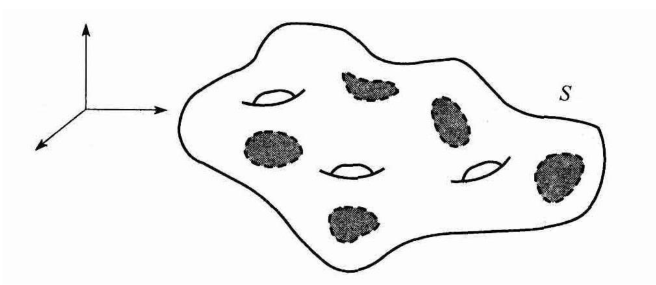


图 3.6 在曲面上的开补丁是标准拓扑的基元素

3.1 节练习

3.1 设 $X = \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$，即平面上的 x 轴．描述此拓扑 X 传承为具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 的一个子空间.

3.2 设 $Y = [-1, 1]$ 有标准拓扑．下列集合中哪些是 Y 中的开集？哪些是 $\mathbf{R}$ 中的开集？

$$A=\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$$

$$B=\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$$

$$C=\left[-1,\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\ 1\right]$$

$$D=\left[-1,\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$$

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n},\ \frac{1}{n}\right)$$

3.3 **证明定理 3.4：** 设 X 是一个拓扑空间，并设 $Y\subset X$ 有子空间拓扑. 那么，当且仅当对于 X 中的某个闭集 D，有 $C=D\cap Y$，$C\subset Y$ 在 Y 中是闭的.

3.4 设 $Y=(0,\ 5]$. 下列 Y 的子集在 Y 的标准拓扑中，哪些是开集？哪些是闭集？哪些既不开又不闭？

(a) $(0,\ 1)$ (b) $(0,\ 1]$ (c) $\{1\}$ (d) $(0,\ 5]$ (e) $(1,\ 2)$

(f) $[1,\ 2)$ (g) $(1,\ 2]$ (h) $[1,\ 2]$ (i) $(4,\ 5]$ (j) $[4,\ 5]$

3.5 设 $Y=(0,\ 5]$ 有传承自具有下限拓扑的 $\mathbf{R}$ 的子空间拓扑. 在 Y 的此拓扑中，在 Y 的标准拓扑中，下列 Y 的子集哪些是开集？哪些是闭集？哪些既不开又不闭？

(a) $(0,\ 1)$ (b) $(0,\ 1]$ (c) $\{1\}$ (d) $(0,\ 5]$ (e) $(1,\ 2)$

(f) $[1,\ 2)$ (g) $(1,\ 2]$ (h) $[1,\ 2]$ (i) $(4,\ 5]$ (j) $[4,\ 5]$

3.6 设 $Y=(0,\ 4]\cup\{5\}$. 在 Y 的标准拓扑中，下列 Y 的子集哪些是开集？哪些是闭集？哪些既不开又不闭？

(a) $(0,\ 1)$ (b) $(0,\ 1]$ (c) $\{1\}$ (d) $(0,\ 4]$ (e) $(1,\ 2)$

(f) $[1,\ 4)$ (g) $(1,\ 4]$ (h) $[1,\ 4]$ (i) $\{4\}$ (j) $\{4,\ 5\}$

3.7 设 X 是一个豪斯多夫空间，而 Y 是 X 的一个子集. 证明：Y 上的子空间拓扑是豪斯多夫拓扑.

3.8 设 X 是一个拓扑空间，而 $Y\subset X$ 有子空间拓扑.

(1) 若 A 是 Y 中的开集，而 Y 在 X 中是开的，证明 A 在 X 中是开集.

(2) 若 A 是 Y 中的闭集，而 Y 在 X 中是闭的，证明 A 在 X 中是闭集.

3.9 设 K 是拓扑空间 K.

(1) 设 $K=\left\{\frac{1}{n}\in\mathbf{R}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}^+\right\}$. 证明：$K$ 上的标准拓扑是离散拓扑.

(2) $K^*=K\cup\{0\}$. 证明：K^* 上的标准拓扑不是离散拓扑.

3.10 证明：有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 上的标准拓扑不是离散拓扑.

3.11 设 A 是 X 的一个子空间，且 $D\subset A$. 我们分别称 $\mathrm{Int}_A D$ 为在 A 上的子空间拓扑中 D 的内部，$\mathrm{Int}_X D$ 为在 X 上的拓扑中 D 的内部. 类似地，我们对闭包定义 $\mathrm{Cl}_A D$ 与 $\mathrm{Cl}_X D$，对边界定义 $\partial_A D$ 与 $\partial_X D$.

(1) 探索 $\mathrm{Int}_A D$ 与 $A\cap\mathrm{Int}_X D$ 之间的关系. 对于每个包含号 $\subset$ 与 $\supset$，证明包含关系成立，否则举出反例.

(2) 探索 $\mathrm{Cl}_A D$ 与 $A\cap\mathrm{Cl}_X D$ 之间的关系. 对于每个包含号 $\subset$ 与 $\supset$，证明包含关系成立，否则举出反例.

(3) 探索 $\partial_A D$ 与 $A\cap\partial_X D$ 之间的关系. 对于每个包含号 $\subset$ 与 $\supset$，证明包含关系成立，否则举出反例.

3.2 积拓扑

给定两个拓扑空间 X 与 Y，我们希望在积 $X\times Y$ 上生成一个天生的拓扑. 首先可能倾向

于取形如 $U\times V$ 的集族$\mathcal{C}$，其中 U 在 X 中是开集，V 在 Y 中是开集，把它作为 $X\times Y$ 上的拓扑．但是$\mathcal{C}$并不是一个拓扑，这是由于两个集合 $U_1\times V_1$ 与 $U_2\times V_2$ 的并对于某个 $U\subset X$ 和 $V\subset Y$来说未必具有 $U\times V$ 的形式（见图 3.7）．然而，若我们以$\mathcal{C}$作为一个基而不是作为整个拓扑，就可以继续进行下去．

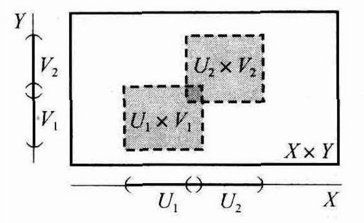


图 3.7 集合 $U_1\times V_1$ 与 $U_2\times V_2$ 的并未必具有 $U\times V$ 的形式

定义 3.6 设 X 与 Y 是拓扑空间，而 $X\times Y$ 是它们的积．$X\times Y$ 上的积拓扑，是由基 $\mathcal{B}=\{U\times V\mid U$ 在 X 中是开集，V 在 Y 中是开集$\}$ 生成的拓扑．

当然，我们必须验证$\mathcal{B}$确实是积 $X\times Y$ 上一个拓扑的基．

定理 3.7 集族$\mathcal{B}$是 $X\times Y$ 上一个拓扑的基．

证明 每个点 $(x,\ y)$ 在 $X\times Y$ 中，而 $X\times Y\in\mathcal{B}$．因此，作为基的第一个条件得以满足．

再设 $(x,\ y)$ 在$\mathcal{B}$的两个元素的交集之中．即 $(x,\ y)\in(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)$，其中 U_1 和 U_2 在 X 中是开集，V_1 和 V_2 在 Y 中是开集．设 $U_3=U_1\cap U_2$，$V_3=V_1\cap V_2$．那么 U_3 在 X 中是开集，V_3 在 Y 中是开集，因而 $U_3\times V_3\in\mathcal{B}$．而

$$U_3\times V_3=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)=(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2),$$

因而 $(x,\ y)\in U_3\times V_3\subset(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)$．于是作为基的第二个条件得以满足．

因此，$\mathcal{B}$是 $X\times Y$ 上一个拓扑的基． ■

例 3.7 设 $X=\{a,\ b,\ c\}$ 与 $Y=\{1,\ 2\}$ 分别具有拓扑 $\{\varnothing,\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{b,\ c\},\ X\}$ 与 $\{\varnothing,\ \{1\},\ Y\}$．$X\times Y$ 上积拓扑的一个基如图 3.8 所示．在 $X\times Y$ 上积拓扑中的每个非空开集，是所示基元素的一个并集．

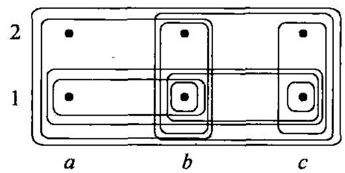


图 3.8 $X\times Y$ 上积拓扑中的一个基

重要注记 正如我们在本节最初所指出的，在积拓扑中不仅开集的积是开集，而且那些集连同它们所有可能的并，都是构成此积拓扑的开集．

同开集一样，在此积拓扑中，闭集的积是闭集．（见练习 3.19.）尽管如此，但是在这里不考虑所有的闭集，因为在此积拓扑中存在一些闭集，它们不能表示为闭集的积．例如，在例 3.7 中，集合 $\{a,\ 2\}$，$\{c,\ 1\}$，$\{c,\ 2\}$ 在此积拓扑中是一个闭集，但是它却不是闭集的积．

在定义 3.6 中，我们用来定义积拓扑的基$\mathcal{B}$比较大，由于我们是通过对 X 中的每个开集 U 与 Y 中每个开集 V 配对而得到的．此外，正如以下定理所指出的，通过利用在 X 和 Y 上拓扑的基，我们可以为这个积拓扑找到较小的基，而不是用整个拓扑本身．

定理 3.8 若$\mathcal{C}$是 X 的一个基，$\mathcal{D}$是 Y 的一个基．那么，

$$\mathcal{E}=\{C\times D\mid C\in\mathcal{C}\text{且 }D\in\mathcal{D}\}$$

是 $X\times Y$ 上积拓扑生成的一个基．

证明 任一集合 $C\times D\in\mathcal{E}$在此积拓扑中是一个开集；因此由定理 1.13，足以证明对于在 $X\times Y$ 中的每个开集 W，及任一点 $(x,\ y)\in W$，在$\mathcal{E}$中存在一个集合 $C\times D$，使得 $(x,\ y)\in C\times D\subset W$．但是由于 W 在 $X\times Y$ 中是开集，我们又知道在 X 中存在开集 U，在 Y 中存在开集

V，使得 $(x, y) \in U \times V \subset W$. 因此，$x \in U$，且 $y \in V$. 由于 U 在 X 中是开集，因此存在一个基元素 $C \in \mathcal{C}$，使得 $x \in C \subset U$. 类似地，由于 V 在 Y 中是开集，所以存在一个基元素 $D \in \mathcal{D}$，使得 $y \in D \subset V$. 于是，$(x, y) \in C \times D \subset U \times V \subset W$. 因此，由定理 1.13，$\mathcal{E} = \{C \times D \mid C \in \mathcal{C}$ 且 $D \in \mathcal{D}\}$ 是 $X \times Y$ 上积拓扑的一个基. ■

例 3.8 设 $I = [0, 1]$ 作为 $\mathbf{R}$ 的一个子空间有标准拓扑. 积空间 $I \times I$ 称为**单位正方形**. (见图 3.9.)

重要注记 当图示一个积空间时，我们可以想象为是与第一个空间中每一个点对应的第二个空间的拷贝，反之亦然.

例 3.9 设 S^1 是一个圆周，并设 $I = [0, 1]$ 具有标准拓扑. 于是 $S^1 \times I$ 如图 3.10 所示. 我们可以认为它是一个圆周，在此圆周上的每个点带有正交的区间. 这样看来，它是具有圆周价值的一些区间. 也可以把它认为是在每一点有与圆周正交的一个区间. 因此它又是具有区间价值的一个圆周. 这样所产生的拓扑空间称为**圆环**.

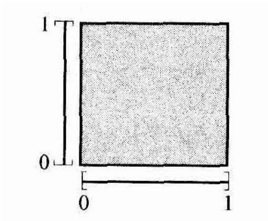


图 3.9 单位正方形 $I \times I$

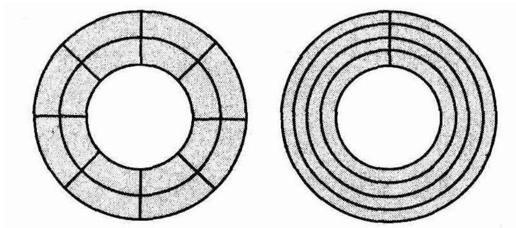


图 3.10 $S^1 \times I$ 的图示

积空间 $S^1 \times (0, 1)$ 是具有最里面和最外面可移动圆周的圆环. 我们把它称为**开圆环**.

例 3.10 考虑积空间 $S^1 \times S^1$，其中 S^1 是圆周. 对于前一个 S^1 中的每一个点，有一个与后一个 S^1 对应的圆周. (见图 3.11.) 由于每个 S^1 都有由在此圆周中的开区间生成的拓扑，由定理 3.8 可得，$S^1 \times S^1$ 具有由矩形开补丁所组成的一组基，如图所示. 所产生的空间类似于例 3.5 中所介绍的环面；事实上，它们是拓扑等价的.

例 3.11 设 D 作为平面的一个子空间是圆盘. 积空间 $S^1 \times D$ 称为**实心环**. (见图 3.12.) 如果我们认为环面是一个油炸圈饼的表面的话，那么，此实心环就是整个油炸圈饼本身.

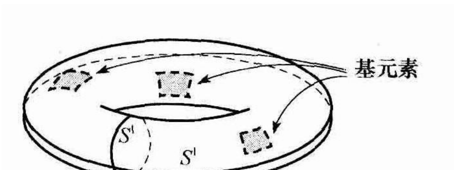


图 3.11 积空间 $S^1 \times S^1$ 是一个环面

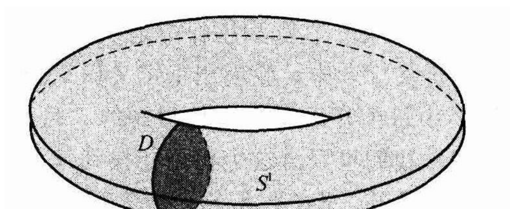


图 3.12 积空间 $S^1 \times D$ 是实心环

设 A 与 B 分别是一个拓扑空间 X 与 Y 的子集. 在 $A \times B$ 上我们有两种方式设置拓扑. 一方面，我们可以把 $A \times B$ 看作为积 $X \times Y$ 的一个子空间；另一方面，我们可以把 $A \times B$ 看作为子空间的积，$A \subset X$ 且 $B \subset Y$. 以下定理指出由两种途径产生的是同一拓扑.

定理 3.9 设 X 与 Y 是拓扑空间，并设 $A \subset X$ 且 $B \subset Y$. 那么，$A \times B$ 上的拓扑作为积

$X\times Y$的一个子空间与$A\times B$上积拓扑是一样的，其中A有传承自X的子空间拓扑，而B有传承自Y的子空间拓扑.

证明 见练习 3.15. ■

用来定义两个空间积的方法，可以推广到n个拓扑空间的积$X_1\times\cdots\times X_n$. 显然，集族

$$\mathcal{B}=\{U_1\times\cdots\times U_n \mid 对于任一 i, U_i 在 X_i 中是开集\}$$

是$X_1\times\cdots\times X_n$上一个拓扑的基. 此时，我们对于定理 3.8 可作一个类比. 特别，如果对于每个$i=1$，…，n，$\mathcal{B}_i$是X_i的一组基，那么集族$\mathcal{B}'=\{B_1\times\cdots\times B_n \mid 对于 i=1, \cdots, n, B_i\in\mathcal{B}_i\}$是$X_1\times\cdots\times X_n$的一组基.

已知拓扑空间X，Y和Z，空间$(X\times Y)\times Z$是空间$(X\times Y)$与Z的积，空间$X\times(Y\times Z)$是空间X与$(Y\times Z)$的积，而空间$X\times Y\times Z$是3个空间X，Y与Z的积，这在前面已叙述过. 这3个空间当然是拓扑等价的（见练习 4.34）. 因此，我们不必对这些空间加以区分，因而总是用最后的、不加括号的那种表示法来记多重空间的积.

在 1.2 节，我们把$\mathbf{R}^n$上的标准拓扑定义为由开球的基所生成的拓扑，而此开球本身由$\mathbf{R}^n$上的欧氏距离公式来定义. 我们在 1.2 节曾指出过，同一拓扑可通过由$\mathbf{R}$中的开区间所组成的基产生. 于是得到，$\mathbf{R}^n$上的标准拓扑，与通过由具有标准拓扑的$\mathbf{R}$的n个拷贝的积所产生的积拓扑相同.

例 3.12 n**维环面**T^n是由圆周S^1的n个拷贝的积所得到的拓扑空间.

以下的定理十分明确地指出，子集积的内部是此子集内部的积.

定理 3.10 设A与B分别是拓扑空间X与Y的子集. 那么，$\text{Int}(A\times B)=\text{Int}(A)\times\text{Int}(B)$.

请注意，在此定理的陈述中，Int( ) 是对以下3个分离的拓扑空间取内部：$\text{Int}(A\times B)$是在$X\times Y$的内部；$\text{Int}(A)$是在X的内部；$\text{Int}(B)$是在Y的内部.

证明 由于$\text{Int}(A)$是包含于A的一个开集，$\text{Int}(B)$是包含于B的一个开集，于是得到$\text{Int}(A)\times\text{Int}(B)$是在积拓扑中的一个开集，而且包含于$A\times B$. 因此$\text{Int}(A)\times\text{Int}(B)\subset\text{Int}(A\times B)$.

再设$(x, y)\in\text{Int}(A\times B)$. 下面证明$(x, y)\in\text{Int}(A)\times\text{Int}(B)$. 由于$(x, y)\in\text{Int}(A\times B)$，于是$(x, y)$包含于$A\times B$之中的一个开集内，因而包含于$A\times B$之中的一个基元素内. 所以，存在分别在$X$与$Y$之中为开集的$U$与$V$，使得$(x, y)\in U\times V\subset A\times B$. 这样，$x$是包含于$A$之中的一个开集$U$的元素；$y$是包含于$B$之中的一个开集$V$的元素. 由此得出$x\in\text{Int}(A)$且$y\in\text{Int}(B)$. 因此，$(x, y)\in\text{Int}(A)\times\text{Int}(B)$. 所以，$\text{Int}(A)\times\text{Int}(B)\subset\text{Int}(A\times B)$.

由于我们已经同时得到$\text{Int}(A)\times\text{Int}(B)\subset\text{Int}(A\times B)$与$\text{Int}(A\times B)\subset\text{Int}(A)\times\text{Int}(B)$，因此定理得证. ■

对于集合积的闭包与边界，存在与定理 3.10 相平行的结果，这在练习 3.20 与 3.22 中再加以考虑.

3.2 节练习

3.12 $\mathbf{R}^2$上的有限补拓扑与由积$\mathbf{R}_{fc}\times\mathbf{R}_{fc}$所产生的$\mathbf{R}^2$上的积拓扑相同吗？其中$\mathbf{R}_{fc}$是具有有限补拓扑的$\mathbf{R}$. 并验证你的答案.

3.13 设$X=PP\mathbf{R}^2_{(0,0)}$是以原点为特殊点的$\mathbf{R}^2$上的特殊点拓扑.（见练习 1.7.）X与由$\mathbf{R}$与自身的积所产生拓扑相同吗？其中每个$\mathbf{R}$有特殊点拓扑$PP\mathbf{R}_0$.

3.14 证明：在 1.4 节所引进的数字平面，是由数字轴的两个拷贝的积所产生的拓扑空间.

3.15 **证明定理 3.9**：设 X 与 Y 是拓扑空间，并设 $A\subset X$ 且 $B\subset Y$. 那么，$A\times B$ 上的拓扑作为积 $X\times Y$ 的一个子空间与 $A\times B$ 上的积拓扑是一样的，其中 A 有传承自 X 的子空间拓扑，B 有传承自 Y 的子空间拓扑.

3.16 设 S^2 是球面，D 是圆盘，T 是环面，S^1 是圆周，而 $I=[0,1]$ 有标准拓扑. 画出积空间 $S^2\times I$，$T\times I$，$S^1\times I\times I$ 和 $S^1\times D$ 的图示.

3.17 若 L 是平面上的一条直线，描述传承自 $\mathbf{R}_l\times\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{R}_l\times\mathbf{R}_l$ 的子空间拓扑，其中 $\mathbf{R}_l$ 是在下限拓扑中的实轴. 注意此结果依赖于此直线的斜率. 在所有情况下，它都是一种常见的拓扑.

3.18 证明：若 X 与 Y 是豪斯多夫空间，那么积空间 $X\times Y$ 也是豪斯多夫空间.

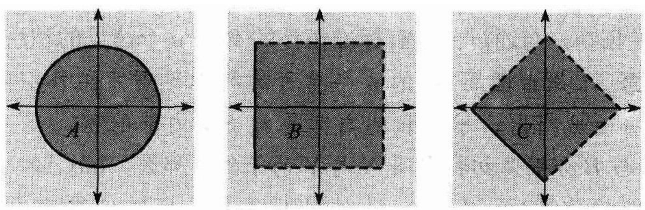
3.19 证明：若 A 在 X 中是闭集，B 在 Y 中是闭集，那么 $A\times B$ 在 $X\times Y$ 中是闭集.

3.20 证明：若 $A\subset X$ 且 $B\subset Y$，那么 $\mathrm{Cl}(A\times B)=\mathrm{Cl}(A)\times\mathrm{Cl}(B)$.

3.21 考虑图 3.13 所示的集合 A，B 与 C. A 是平面上的圆盘，B 是集合 $[-1,1)\times(-1,1)$，而

$$C=\{(x,y)\mid -1\leqslant x+y<1\text{ 且 }-1<x-y<1\}$$

确定在此平面上由 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$、$\mathbf{R}_l\times\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{R}_l\times\mathbf{R}_l$ 给定的每个集合究竟是全为开集、全为闭集、全不为开集或全不为闭集，其中 $\mathbf{R}_l$ 是在下限拓扑中的实轴？



a) b) c)

图 3.13

3.22 设 $A\subset X$ 且 $B\subset Y$.

(1) 举例说明 $\partial(A\times B)=\partial(A)\times\partial(B)$.

(2) 推导和证明用 $\partial(A)$，$\partial(B)$，A 和 B 表示 $\partial(A\times B)$ 的关系式.

3.3 商拓扑

商拓扑的概念使我们能从已经引入的拓扑空间出发，构建一类附加的拓扑空间. 为了简单起见，我们创建一个拓扑模型，这个模型模仿把一个或多个对象的几个部分紧紧地粘在一起的过程. 最著名的一个例子是环面，它是通过将一张正方形的纸的相对的两边粘合在一起得到的.（见图 3.14.）

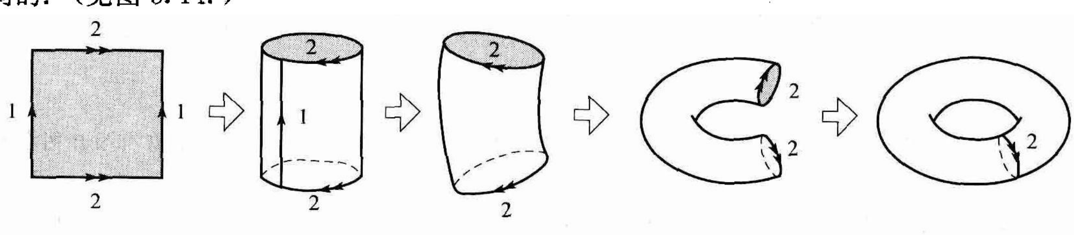


图 3.14 把一个正方形相对的两边粘合在一起得到环面

商拓扑的定义如下：

定义 3.11 设 X 是一个拓扑空间，而 A 是一个集合（它不必是 X 的一个子集）. 设 p：$X\to A$是一个满射. 当且仅当 $p^{-1}(U)$ 是 X 中的开集，定义 A 的一个子集 U 为 A 中的开集. 这样产生的 A 中的开集族，称为**由 p 生成的商拓扑**，而函数 p 称为**商映射**. 拓扑空间 A 称为**商空间**.

拓扑的这一定义未必能使我们明了，如何才能把一个正方形相对的两边粘合在一起而得到环面，但是在例 3.20 中我们将详细了解得到环面的步骤. 首先，我们验证此商拓扑是一个拓扑.

定理 3.12 设 p：$X\to A$ 是一个商映射. 由 p 生成的 A 上的商拓扑是一个拓扑.

证明 我们验证作为一个拓扑要满足的 3 个条件：

(1) 集合 $p^{-1}(\varnothing)=\varnothing$在 X 中是开集. 集合 $p^{-1}(A)=X$ 在 X 中是开集. 所以$\varnothing$和 A 在商拓扑中是开集.

(2) 设在集族 $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$中的每一个集合在 A 上的商拓扑中是开集. 那么 $p^{-1}(\bigcup(U_\beta))=\bigcup p^{-1}(U_\beta)$，它是 X 中集的并，因而在 X 中是开集. 于是，$\bigcup(U_\beta)$ 在此商拓扑中是开集. 由此得出，在此商拓扑中的任意并是此商拓扑中的一个开集.

(3) 设集合 $U_i(i=1,\cdots,n)$ 在 A 上的商拓扑中是开集. 那么，$p^{-1}(\bigcap(U_i))=\bigcap p^{-1}(U_i)$ 是 X 中开集的有限交，因而在 X 中是开集. 因此，$\bigcap U_i$ 在此商拓扑中是开集，于是在此商拓扑中的有限交，是此商拓扑中的一个开集.

所以，商拓扑是 A 上的一个拓扑. ■

例 3.13 已知标准拓扑 $\mathbf{R}$，且由

$$p(x)=\begin{cases}a & 若\ x<0,\\ b & 若\ x=0,\\ c & 若\ x>0\end{cases}$$

定义 p：$\mathbf{R}\to\{a,b,c\}$.

所得到的在 $\{a,b,c\}$ 上的商拓扑如图 3.15 所示. 子集 $\{a\}$，$\{c\}$，$\{a,c\}$ 全都是开集，因为它们的原象在 R 中是开集. 但是，$\{b\}$ 不是开集，由于它在 $\mathbf{R}$ 中不是开集.

例 3.14 设 $\mathbf{R}$ 有一个标准拓扑，定义 p：$\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$. 当 x 是整数时，$p(x)=x$；当 $x\in(n-1,n+1)$，而 n 是奇整数时，$p(x)=n$. （见图 3.16.）所以 p 是整数本身，而 p 是把非整数映射到与它最接近的奇整数.

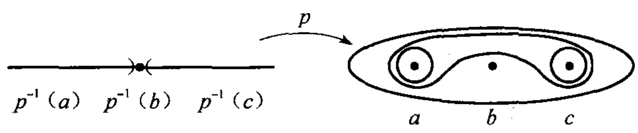


图 3.15 由函数 p 引入的 $\{a,b,c\}$ 上的商拓扑

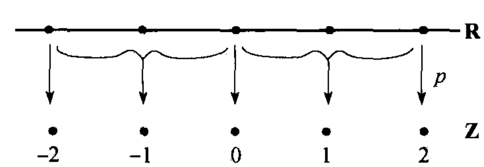


图 3.16 函数 p：$\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$

在所得到的 $\mathbf{Z}$ 上的商拓扑中，如果 n 是奇整数，由于 $p^{-1}(\{n\})=(n-1,n+1)$，则 $\{n\}$ 是开集；如果 n 是偶整数，由于 $p^{-1}(\{n\})$在 $\mathbf{R}$ 中不是开集，则 $\{n\}$ 不是开集. 在此商拓扑

中，包含一个偶整数的最小开集是集合 $\{n-1, n, n+1\}$.

于是，在 $\mathbf{Z}$ 上由 p 引入的商拓扑，是练习 1.10 中介绍过的数字轴拓扑. 此商映射展示了从此数字轴通向它的一个离散模型的自然途径，这是数字图像处理的一个至关重要的理念(见 1.4 节和 11.3 节). 此数字轴被分成几个开片断，当 n 是奇数时，是区间 $(n-1, n+1)$；当 n 是偶数时，是这些片断间的边界，即点 n. 于是在此商空间中，对于奇数 n，这些片断成为单点开集 $\{n\}$；对于偶数 n，这些片断间的边界成为单点闭集 $\{n\}$.

设 X 是一个拓扑空间. 我们对定义在 X 的分拆上的商空间非常感兴趣. 特别是，设 X^* 是 X 的其并为 X 本身的互相分离的一个子集族，并设 $p: X\to X^*$ 是满射，它把 X 中的每个点映射到对应的包含它的 X^* 的元素. 那么 p 诱导出 X^* 上的一个商空间. 我们认为，从 X 上的拓扑通向 X^* 上一个商拓扑的过程，是在此分拆中取每个子集 S，并把 S 中的所有点相互视为同一，从而把 S 分解为此商空间中的单点.（见图 3.17.）X^* 中的点集 U，在 X^* 上的商拓扑中是开集，正如对应于 U 中的点，X 子集的并是 X 中的一个开集一样.

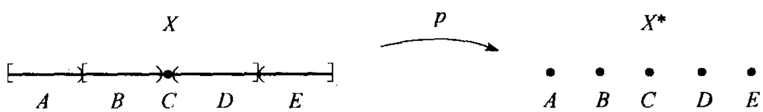


图 3.17 在此分拆中把每个集合分解为此商空间中的一个点

例 3.15 在图 3.18 中，我们说明定义在一个分拆上的商空间. 设 $X=\{a, b, c, d, e\}$ 具有拓扑

$$\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},X\},$$

而 $A=\{a, b\}$，$B=\{c, d, e\}$，设 X^* 是由 $X^*=\{A, B\}$ 定义的 X 的一个分拆. 注意 X^* 是一个两点集. 由于 $\{a, b\}$ 在 X 中是开集，而 $\{c, d, e\}$ 不是，因此，在 X^* 上的商拓扑中的开集只有 $\varnothing$，$\{A\}$ 及 X^* 本身.

例 3.16 设 $X=[0, 1]$，考虑由单点集 $\{x\}$，其中 $0<x<1$，以及两点集 $D=\{0, 1\}$ 所组成的分拆 X^*.（见图 3.19.）那么，在 X^* 上的商拓扑中，我们认为 D 是一个单点，正如我们把 $[0, 1]$ 的端点粘合在一起一样.

X^* 的一个不包含 D 的子集，是单点的一个子集族，而它在 X^* 中是开集，正如那些单点集的并，是 $(0, 1)$ 的一个开子集一样.

X^* 的包含 D 的一个子集，当组成此子集的所有集合的并是 $[0, 1]$ 的一个开子集时，X^* 的上述这个子集在 X^* 中是开集. 这一个开子集，必定包含 0 与 1，因而必定包含区间 $[0, a)$ 与 $(b, 1]$，它们在 $[0, 1]$ 上的子空间拓扑中是开集. 所产生空间拓扑等价于圆周 S^1.

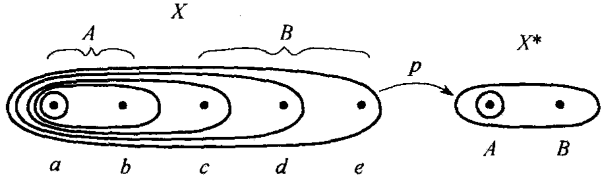


图 3.18 空间 X 与由分拆 $X^*=\{A, B\}$ 所确定的商空间

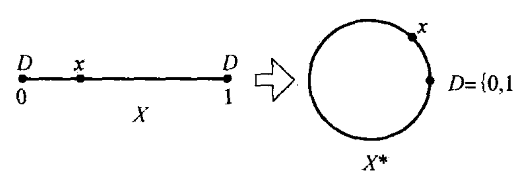


图 3.19 把点 0 与 1 粘合在一起形成 $[0, 1]$ 上的商拓扑

例 3.17 在上例中，我们把一个区间的端点粘合在一起得到一个单点．这是更一般的形成所谓拓扑图的构造的一个例子．仔细说来，一个**拓扑图** G，是一个由 G 的称为**顶点**的有限集与 $\mathbf{R}$ 中相互分离的有界闭区间的一个有限集组合在一起，并以某种方式把这些区间的端点粘合在一起，从而构成的商空间（见图 3.20）．被粘合的区间，称为 G 的**边**．

在第 13 章，我们将进一步考察拓扑图和它们在图论中的作用．

例 3.18 在例 3.16 中，我们通过把在实轴上一个区间的端点视为同一点而得到一个圆周．在这里，我们用一个与以数字轴来产生称为数字圆的过程相类似的方式来加以描述．

特别地，**数字区间**是 $\mathbf{Z}$ 的具有传承自数字轴拓扑的子空间拓扑的一个子集 $\{m, m+1, \cdots, n\}$．设 I_n 是形如 $\{1, 2, \cdots, n-1, n\}$ 的数字区间．如果 $n \geqslant 5$ 是一个奇数，那么通过把 I_n 中的端点 1 与 2 视为同一而形成的拓扑空间 C_{n-1}，称为**数字圆**．在图 3.21 中，我们图示了 I_7 与 C_6 以及各自的基．由定义，一个数字圆包含一个为偶数的点．

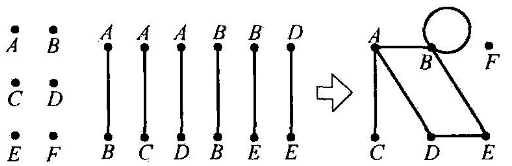


图 3.20 通过把一些区间的端点粘合在一起而形成的一个拓扑图

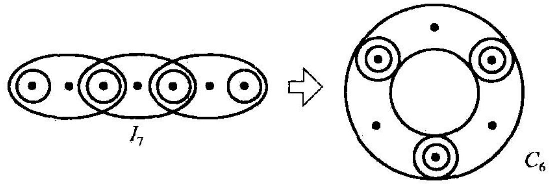


图 3.21 数字圆 C_6 是数字区间 I_7 的商空间

在练习 3.31 中，我们考察一个在我们选用一个一般的数字区间 $\{m, m+1, \cdots, n\}$，并把它的端点视为同一点而得到的拓扑空间．而数字圆仅当 m 与 n 都是奇数时才出现．

例 3.19 现在我们考察定义在 $I \times I$ 上的两个不同的商空间．在第一种情况下，我们用选取下列形式的子集来定义一个分拆：

(1) $A_{x,y}=\{(x, y)\}$，对于 x，y，使得 $0<x<1$ 且 $0 \leqslant y \leqslant 1$.

(2) $B_y=\{(0, y), (1, y)\}$，对于每个 y，使得 $0 \leqslant y \leqslant 1$.

在此商拓扑中，如图 3.22 所示，B_y 使正方形的左边与右边相粘合．结果是与圆环拓扑等价的一个空间．

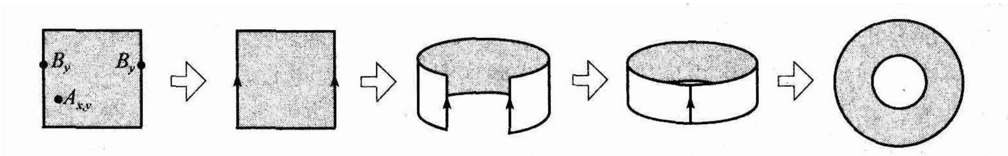


图 3.22 把一个正方形的左边与右边相粘合形成圆环

在第二种情况下，我们用选取下列形式的子集来定义一个分拆：

(1) $A_{x,y}=\{(x, y)\}$，对于 x，y，使得 $0<x<1$ 且 $0 \leqslant y \leqslant 1$.

(2) $B_y^*=\{(0, y), (1, 1-y)\}$，对于每个 y，使得 $0 \leqslant y \leqslant 1$.

此时 B_y^* 使正方形的左边与右边也相粘合．但是正如我们在图 3.22 中所见到的，为了实现粘合，我们需要拧半圈使得相对的两边确实搭在一起．所得到的结果就是著名的**默比乌斯带**.

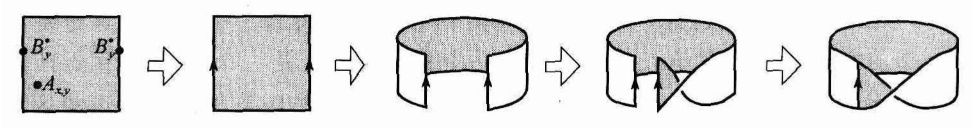


图 3.23　让一个正方形的左边与右边相粘合就得到默比乌斯带

在与例 3.19 相类似的场合，我们通过在一对边中每一边都标注指向箭头所进行的上述粘合，意味着相粘合的点视为同一点．于是，我们以一对一的方式来使两边的点匹配，使得所粘合的边的方向一致．

例 3.20　用选取下列形式的子集来定义在 $I\times I$ 上的一个分拆：

(1) $A_{x,y}=\{(x,\ y)\}$，对于 x，y，使得 $0<x<1$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$．

(2) $B_y=\{(0,\ y),\ (1,\ y)\}$，对于每个 y，使得 $0<y<1$．

(3) $C_x=\{(x,\ 0),\ (x,\ 1)\}$，对于每个 x，使得 $0<x<1$．

(4) $D=\{(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1)\}$．

在此商拓扑中，(2) 中的两点子集使得此正方形的左边与右边相粘合；而 (3) 中的两点子集使得此正方形的顶边与底边相粘合．(见图 3.24.) 此外，(4) 中的 4 点子集使得此正方形的 4 个角点与单个的点相粘合．因而我们所得到的拓扑空间是选取一个正方形并把它相对的边粘合起来的结果．正如以前在图 3.14 所示的那样，这样产生的结果是环面．

在图 3.24 中，此正方形的 4 个角点视为同一点，虽然我们没有详细表示出来．请注意，把标上 1 的边，与标上 2 的边相粘合，把上述全部 4 个角点相互视为同一点．

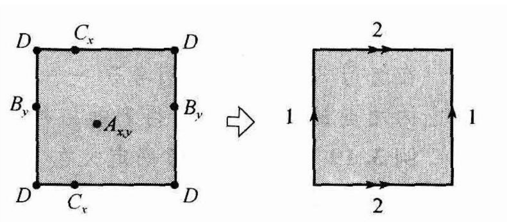


图 3.24　对正方形作分拆得到环面

环面的上述表示法的优点是，我们可以认为，这与在 3 维空间中的环面周围运动未曾留下保持粘合痕迹的平坦的 2 维表达式相像．我们每次到达此正方形顶边上的一个点时，就被送往底边上的对应点．这个过程允许我们能在比原先所在的环境要少一维的场所来观察一个空间．我们在第 14 章将发现，当对高维空间实现可视化时，以这种方式来观察一个空间特别有用．

把正方形的一对对边视为同一的想法，出现在某些计算机游戏中．如果我们在屏幕周围移动并离开屏幕的左边，就会在右边的同一高度再次出现．如果我们在屏幕的上边，那么就会在底边再次出现．因此，在事实上这些游戏确实是在环面上进行．

在下一节，我们将考察更多的例子，它们是通过把在多边形各边上的点视为同一点而得到的．我们还将考察一些 3 维的例子，它们是通过粘合一个立方体的各个面而得到的．

3.3 节练习

3.23　如果 $\mathbf{R}$ 有标准拓扑，由

$$p(x)=\begin{cases} a & x>2, \\ b & x=2, \\ c & 0\leqslant x<2, \\ d & -1<x<0, \\ e & x\leqslant -1 \end{cases}$$

定义

$$p: \mathbf{R} \to \{a, b, c, d, e\}.$$

(1) 列出在 $\{a, b, c, d, e\}$ 上商拓扑中的开集.

(2) 假定 $\mathbf{R}$ 有下限拓扑. 在 $\{a, b, c, d, e\}$ 上所得到的商拓扑中的开集是什么?

3.24 设 $X=\mathbf{R}$ 有标准拓扑. 取分拆

$$X^* = \{\cdots, (-1, 0], (0, 1], (1, 2], \cdots\}.$$

请描述所得到 X^* 上的商拓扑中的开集.

3.25 通过取从原点出发的每条光线作为分拆的一个元素, 试定义 $X=\mathbf{R}^2-\{O\}$ 的分拆. (见图 3.25.) 请问, 我们在前面已遇到的哪个拓扑空间看起来与由此分拆所产生的商空间拓扑等价?

3.26 请用图 3.26 所示的环面正方形模型, 来为在此环面的表面上进行的"连城"游戏(圈叉游戏)设计一个规则. 请问, 怎样的新的同一行的 3 个数是此游戏所允许的, 而在标准游戏中却是不允许的?

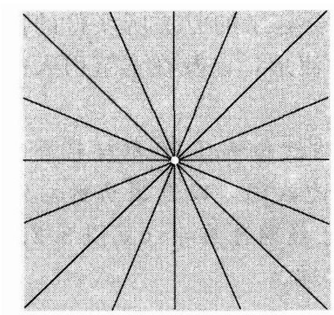


图 3.25 $X=\mathbf{R}^2-\{O\}$ 的分拆

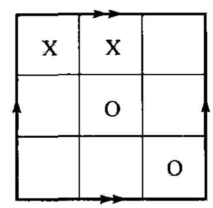


图 3.26 在环面上的"连城"游戏

3.27 举例子说明一个豪斯多夫空间的商空间未必是豪斯多夫空间.

3.28 若 $x-y\in\mathbf{Z}$, 考虑在 $\mathbf{R}$ 上由 $x\sim y$ 定义的等价关系. 请描述以此等价关系对 $\mathbf{R}$ 进行分拆而形成的商空间.

3.29 若 $x_1+x_2=w_1+w_2$, 考虑在 $\mathbf{R}^2$ 上由 $(x_1, x_2)\sim(w_1, w_2)$ 定义的等价关系. 请描述以此等价关系对 $\mathbf{R}^2$ 分拆而形成的商空间.

3.30 若 $x_1^2+x_2^2=w_1^2+w_2^2$, 考虑在 $\mathbf{R}^2$ 上由 $(x_1, x_2)\sim(w_1, w_2)$ 定义的等价关系. 请描述以此等价关系对 $\mathbf{R}^2$ 分拆而形成的商空间.

3.31 考虑 m, n 或奇或偶的四种情况. 并描述由把一般的数字区间 $\{m, m+1, \cdots, n\}$ 的端点 m 与 n 视为同一点而得到的拓扑空间.

3.32 (1) 证明: 数字轴可以作为来自 $\mathbf{R}$ 在标准拓扑中一个分拆而成的商空间得到.

(2) 证明: 在 1.4 节中使引入的数字平面, 可以作为来自 $\mathbf{R}^2$ 在标准拓扑中一个分拆而成的商空间得到.

3.33 在以下各种情况下, 对所得到的商空间加以描述并画出图来. 假定那些点仅与它们自身被视为同一点, 除非明确地说与另一些点被视为同一点.

(1) 带边界点的圆盘相互被视为同一点, 形成一个单点.

(2) 具有每对对心点的圆周 S^1 相互被视为同一点.

(3) 作为 $\mathbf{R}$ 的一个子空间, 区间 $[0, 4]$ 具有被视为同一点的整数点.

(4) 作为 $\mathbf{R}$ 的一个子空间, 区间 $[0, 9]$ 具有相互被视为同一点的偶整数而构成一个点; 具有相互被视为同一点的奇整数而构成一个不同的点.

(5) 带 $[-1, 1]$ 的实轴收缩到一个点.

(6) 带 $[-2, -1]\cup[1, 2]$ 的实轴收缩到一个点.

(7) 带 (−1, 1) 的实轴收缩到一个点.

(8) 带圆周 S^1 的平面 $\mathbf{R}^2$ 收缩到一个点.

(9) 带圆周 S^1 的平面 $\mathbf{R}^2$ 及原点的实轴收缩到一个点.

(10) 带北极和南极的球面相互被视为同一点.

(11) 带赤道的球面收缩到一个点.

3.34 一个光学字符识别程序设法从它的一个计算机图像来识别一个字符（例如字母表的一个字母）. 每个字母形状的拓扑性质，有助于进行这种识别. 请为字母表的每个字母创建拓扑图形表示，并在每种情况下使用边数尽可能少的拓扑图.

3.4 有关商空间的更多例子

我们已经用描述如何通过粘合一个正方形的相对边获得一个圆环面结束了上一节的讨论. 本节将考察另一些通过把一些熟悉的几何图形的各部分粘合起来的方法所获得的商空间. 拓扑空间的所有这些例子，称为流形. 在第 14 章，我们将对流形，以及在本节引入的其他一些概念详细加以研究.

例 3.21 把正方形的对边视为同一，并把它的左边与右边像例 3.20 那样粘合起来，但是现在由于顶边与底边粘合在一起，使得顶边的左端与底边的右端，以及顶边的右端与底边的左端也粘合在了一起. 换句话说，顶边在与底边粘合之前已经翻过筋斗（见图 3.27）. 这样形成的拓扑空间，称为**克莱因瓶**，它因数学家 F. 克莱因而得名.

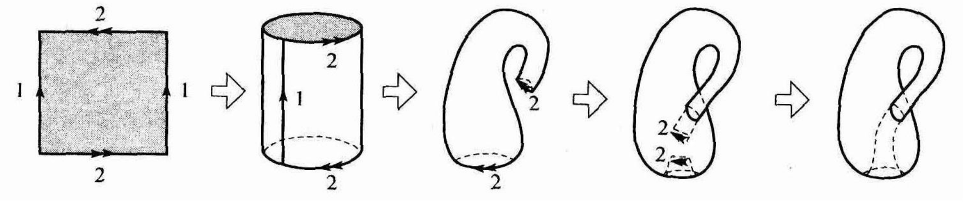


图 3.27 把一个正方形的各边粘合起来获得克莱因瓶的一种表示法

在图 3.27 中，我们说明了如何把克莱因瓶粘合在一起的方法. 首先把此正方形的左边与右边粘合成一个圆柱面. 然后，当我们打算把圆柱面顶端的圆周与底部的圆周，通过像形成环面一样的方法来弯曲此圆柱面时，发现这两个圆周的箭头就不匹配了. 在 3 维空间中使箭头成功匹配的唯一方法，是允许此圆柱面穿过自身，就像取代固态橡皮胶布的肥皂泡的膜一样，于是就可以成功地把这两个圆周粘合在一起，使得箭头匹配了. 但是，真正的克莱因瓶当然没有与它自身相交的一个圆周，而这个物体却有自相交的圆周. 事实上，在 3 维空间中真正的克莱因瓶并不存在. 在 4 维空间，它能不经自身相交而作出来（见 11 章）. 在 3 维空间中，上述这种自相交的表示法，是我们所能达到的最佳水平了.

例 3.22 以下我们考虑另外两种由商空间得到的曲面，一个是我们熟悉的，另一个是我们不熟悉的，而且有些非同寻常. 这两种情况都选取圆盘，并把它的边界分成两个粘合在一起的半圆周.（见图 3.28 与图 3.29.）

首先考虑如图 3.28 所示那样粘合而成的商空间. 此时，我们最感兴趣的是换成一个（袋口有系绳的）钱包，以获得一个与此球面拓扑等价的一个曲面.

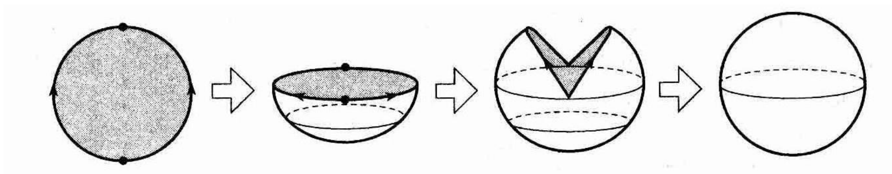


图 3.28 粘合一个圆盘的边界得到一个球面

再考虑如图 3.29 所示那样粘合而得到的商空间. 所得到的拓扑空间称为**射影平面**, 记为 P. 正如克莱因瓶的例子一样, 在 3 维空间不能作出此射影平面. 对于此射影平面的可视化, 在 3 维空间我们至多能做到的, 是创建它的一个允许自相交的表达式.

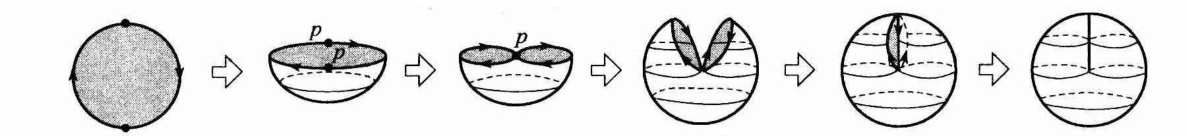


图 3.29 把一个圆盘的边界相粘合以获得此射影平面的一个表达式

我们以图示的 P 的作法开始, 把标记为 p 的那些点粘合在一起. 所得到的结果是沿着它的边缘捏出来的一个杯子. 现在有两个圆周需要粘合, 但是令人遗憾的是, 当我们使这两个圆周面对面时, 却发现它们上面的箭头完全不匹配, 因而不能直接把它们粘合. 然而, 我们能把左半圆周的背面与右半圆周的正面粘合起来, 正如按图示的从第二个到最后一个步骤所进行的那样, 而剩余的每个圆周的另一半不粘合. 为了完成粘合, 需要推移曲面的一部分穿过它自身. 在图示的最后一个步骤, 把余下的半圆周粘合在一起, 按我们的描述为, 似乎就像是沿着同一条竖直线段发生的一样, 另两个半圆周在那里粘合在一起. 然而真正发生的却是, 此曲面沿着那条线段穿过它自身推移, 使得这些粘合是分隔开的.

例 3.23 考虑把球面上的对心点 (每对点 x 与 $-x$) 视为同一点所得到的拓扑空间. 我们证明, 所得到的结果与射影平面是拓扑等价的.

由于赤道已在图 3.30 中表示出来, 请注意以下两点:

(1) 在开北半球上的每点与开南半球上的对心点视为同一点.

(2) 在赤道上的每点与它在赤道上的对心点视为同一点.

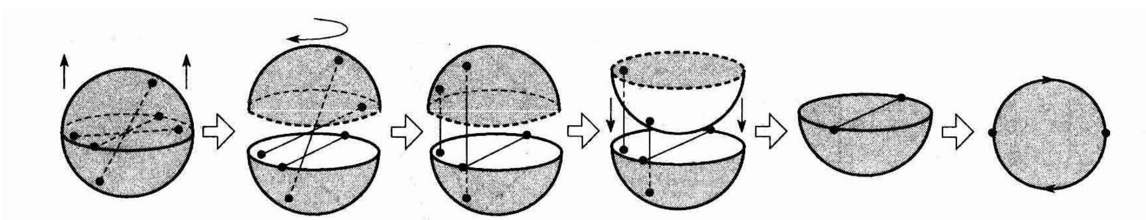


图 3.30 把球面上的对心点视为同一点形成一个射影平面

我们可以使开北半球移动, 让它旋转, 并让它上下颠倒, 那么就能如图所示, 在开北半球上直接进行粘合. 因此留下的是一个杯子, 它的边缘按图 3.30 中的箭头粘合在一起. 这等价于有带半圆周边界的一个圆盘, 如图 3.29 所示粘合在一起. 所以, 所得到的空间拓扑等价于此射影平面, 这正是我们所要证明的.

给定两个曲面 S_1, S_2, 有一种自然的方式把它们连接得到一个新的曲面. 下面对它加以

描述，但到第 14 章再给出它的定义. 从 S_1，S_2 出发，移动一个圆盘的内部，留下一个围绕一个圆周的洞. 再用商映射把这两个围绕的圆周粘合起来.（见图 3.31.）所得到的结果称为 S_1 与 S_2 的**连通和**，并记为 $S_1 \# S_2$.

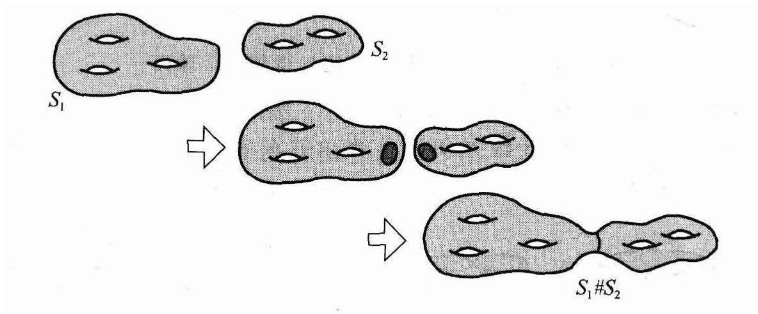


图 3.31 两个曲面的连通和

例 3.24 在图 3.32 中，我们表示了曲面 $T\#T$，即对两个环面的连通和.

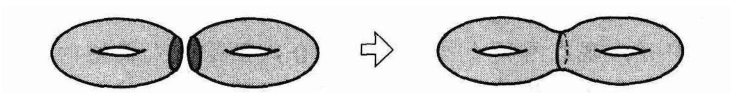


图 3.32 两个环面的连通和

借助称为**切割和粘接**的过程，我们可以把 $T\#T$ 表达为如图 3.33 所示的，把各边粘合在一起而形成的一个多边形. 我们从两种形式的圆环面开始，先按图 3.33a 所示，把它表示为各边粘合在一起而形成的正方形；然后按图 3.33b 所示，从每个正方形中挖去一个圆盘的内部；我们选择那些圆盘，使得每个圆盘的圆周边界，与对应正方形上顶边上以及右边上的顶点相连接. 这是为了方便起见. 最后，打开这些圆周，并按图 3.33c 所示把此正方形伸展成 5 边形. 对于所形成的每条新边，一旦我们在这些边上完成了所有的粘合，就仍然把两个端点相互视为同一点. 因此在事实上，这些边中的每一条在每个曲面中保留一个圆周. 接下来把这两条新边粘合在一起. 这等价于取两个环面的连通和，由于我们把两个（其内部已经挖去的）圆盘的边界粘合在一起. 因此，在图 3.33d 中已经把 $T\#T$ 表示为把各对边粘合在一起而形成的一个 8 边形了.

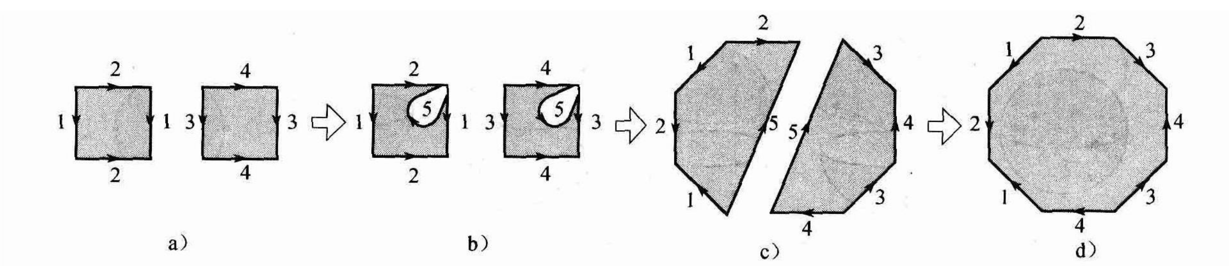


图 3.33 把一个 8 边形各对边粘合在一起而得到的两个环面的连通和

例 3.25 当我们取两个射影平面的连通和时，会得到什么结果呢？在图 3.34 中，通过切割和粘合发现，在第（5）个步骤，$P\#P$ 可以表示为它的各边已粘合在一起的正方形. 如果我们如（6）所示沿正方形的对角线把它割开，并把标记为 2 的边粘合在一起，那么结果是，把其各条边粘合在一起的正方形产生一个像例 3.21 中那样的克莱因瓶. 所以，两个射影平面

的连通和，拓扑等价于一个克莱因瓶.

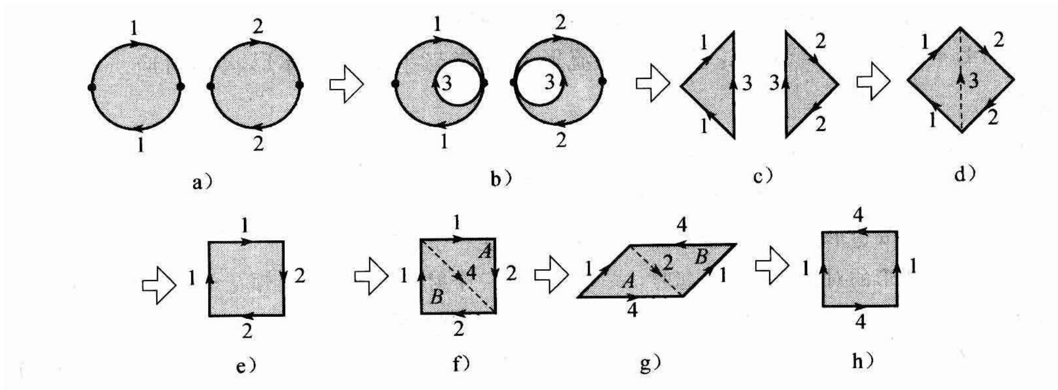


图 3.34　两个射影平面的连通和拓扑等价于一个克莱因瓶

在图 3.35 中，我们表明了，通过切割和粘合从一个射影平面中挖去一个圆盘的内部，就产生一条默比乌斯带. 因此，取两个射影平面的连通和，就如同把两条默比乌斯带沿它们的边粘合起来一样. 所得到的结果，拓扑等价于一个克莱因瓶.

例 3.26　考虑如图 3.36 上左端所示，由把一个立方体 $I\times I\times I$ 相对的面视为同一面而得到的商空间 X. 在 3 维空间中不能建立相应的物体. 但这样粘合的结果却是有明确定义的拓扑空间. 我们可以按如下的方法来识别所得到的拓扑空间：把视为同一面的前面和后面如图 3.36 所示粘合在一起. 我们得到如图所示的一个实心环 $S^1\times I\times I$，其中圆环的顶部与底部以及圆环的内部与外部均视为同一. 在 $S^1\times I\times I$ 中，在圆周 S^1 上的每个点有一个正方形 $I\times I$. 在商空间 X 中，圆环的顶部与底部以及圆环的内部与外部视为同一，如图所示，分别相应于每个这样的正方形顶边与底边以及两个侧边视为同一. 每个正方形视为同一的结果是一个环面. 因此，我们可以把 X 看成为圆周 S^1 与一个环面 T 的积. 由于环面是 $S^1\times S^1$，于是 X 拓扑等价于 3 维环面 $S^1\times S^1\times S^1$.

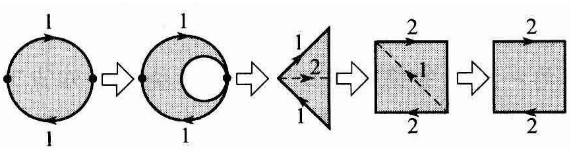


图 3.35　从一个射影平面中挖去一个圆盘的内部产生一条默比乌斯带

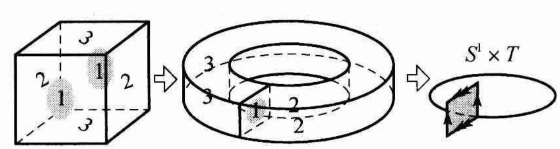


图 3.36　如图所示的把立方体的对边视为相同而形成 3 维环面

例 3.27　考虑如图 3.37 所示，由把一个立方体 $I\times I\times I$ 相对的面视为同一面而得到的商空间. 如果我们取一条线段从此立方体的左面的中心移动到右面的中心，那么当把此空间粘合在一起时，此线段就成为一个圆周. 如果我们取中心位于那条线段上的圆柱面，那么当把此空间粘合在一起时，位于此圆柱面两端的圆周就翻一个筋斗，形成一个克莱因瓶. 所以，在此空间内存在收缩于一个核心圆周的同心克莱因瓶的一个族.

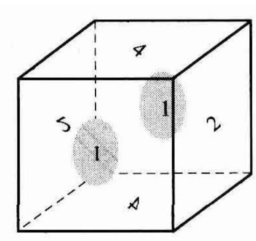


图 3.37　粘合一个立方体的各面得到 $S^1\times P$

在练习 3.38 中，我们要求证明此拓扑空间等价于一个圆周与一个射影平面的积 $S^1 \times P$.

在练习 3.26 与 3.27 中的空间是 3 维流形的一些例子. 我们将在 14.3 节进一步研究 3 维流形，而在 14.4 节和 14.5 节讨论哪些 3 维流形有可能与宇宙的整体形状相对应.

3.4 节练习

3.35 作 $T\#T$ 的草图，说明应该在何处粘合例 3.33 中所出现的 8 边形的边.

3.36 (1) 说明将一个 6 边形的对边与直径粘合在一起产生一个环面.

(2) 说明将一个 6 边形的对边粘合并翻一个筋斗就产生一个射影平面.

3.37 给出当一个 6 边形的对边粘合在一起时，一个环面与一个射影平面的连通和 $T\#P$ 的表达式.

3.38 证明：在练习 3.27 中的商空间拓扑，等价于一个圆与一个射影平面的积 $S^1\#P$.

3.39 说明如何在一个立方体上定义一个商空间，以形成一个圆与一个克莱因瓶的积 $S^1\times K$. 检验你粘合的立方体产生 $S^1\times K$.

3.5 构形空间与相空间

拓扑学与物理学之间有广泛、深刻的联系. 要面面俱到地阐述拓扑学在物理学中的应用可能需要洋洋万言，而为了理解大部分复杂高深的应用，需要在拓扑学上有精深的造诣. 在许多方面，这两个领域之间存在着非常密切的关系。拓扑学的许多概念受到物理学应用研究的推动应运而生，而许多物理学应用借助拓扑学的概念得到深入的理解.

在物理学中的大部分基本拓扑结构是**构形空间**的拓扑结构. 在研究一个系统时，我们通常需要涉及一组变量，它们与我们所感兴趣的一类事物的位置，以及配置有关. 例如，我们可能要涉及一个工业机器人手臂各部件的位置和定向. 构形空间是使我们能够实现追踪此变量的一种拓扑空间. 除了位置以外，我们还要考虑在一个系统中一些物体的速度和惯性，这就要用到一个同时包含位置和惯性变量的空间，这样的空间称为此系统的**相空间**.

在本节，我们考察构形空间和相空间的几个例子，并说明我们已经引进的、在应用中确实出现的某些拓扑空间和拓扑结构是如何实现的.

例 3.28 首先考虑以平面上一点为固定端点的一根杆的简单系统，此杆环绕这个端点可以自由旋转（见图 3.38）. 对于此杆的每个位置，我们联想起以此枢轴点为中心的圆周上的一个点，而对此圆周上的每个点，又联想到它相应于此杆的唯一位置. 因此，在平面上此杆的位置可通过构形空间 S^1 来建模.

例 3.29 现在考虑图 3.39 所示的平面二杆系统. 杆 A 有一个自由端，并以平面上的一点为固定端点，杆可以环绕此端点旋转. 杆 B 与杆 A 的自由端在一个允许转动的关节处连接.

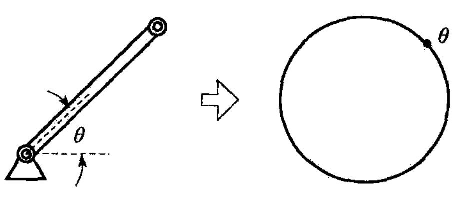


图 3.38 一端固定在平面上的旋转杆的构形空间是圆周

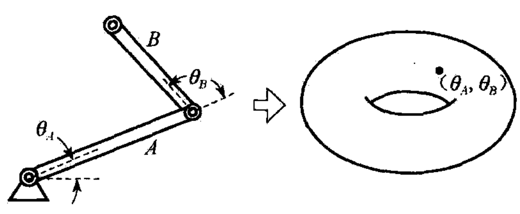


图 3.39 二杆系统的构形空间是环面

由于杆 A 的固定端以及杆 B 的连接端都允许在整个圆周的范围内旋转，因此这个系统的构形空间是 $S^1 \times S^1$，即环面．对于在此环面上的每个点（θ_A，θ_B），存在这个系统的一个构形，而此系统的每个构形，对应于在此环面上的唯一点．

重要的是，要避免出现把例 3.29 中的构形空间，与此平面上由此系统的自由端所扫出的空间相混淆的情况．（见图 3.40.）设想在杆 B 的自由端放一支钢笔，并在我们扫视这个系统所有可能的构形时，观察此钢笔会描绘出怎样的空间．如果杆 A 与杆 B 的长度不同，那么，钢笔就在此平面内描绘出一个圆环．而当杆 A 与杆 B 的长度相同时，钢笔在此平面内就描绘出一个圆盘．这个“被描绘出”的空间称为此系统的**运算空间**．我们将在 4.3 节进一步探索构形空间与运算空间之间的关系．

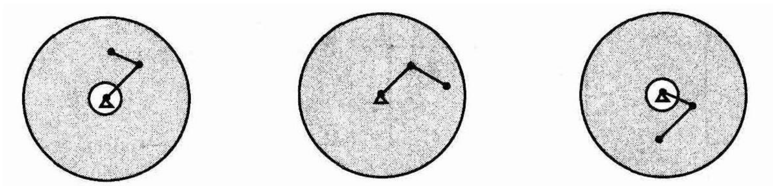


图 3.40　二杆系统的运算空间是一个圆环或一个圆盘

在例 3.29 中的系统称为**连杆机构**．一套连杆机构是一组刚性部件，它们在关节处连接在一起，在那里这些部件可相互自由运动．在 18、19 世纪，连杆机构由于几何性质而具有数学意义．在 19 世纪下半叶，随着工业革命的兴起，连杆机构由于能为机械设计提供重要的部件，因而在应用上也引起了兴趣．连杆机构还在许多机械系统中使用．例如，一套连杆机构能把电机的旋转运动，转换为汽车挡风板刮水器的左右往复运动．对数学各领域探索中所产生的一系列问题，连杆机构仍然具有它的数学意义．（例如，见［Con］和［Thu2］.）

由于制造过程变得越来越复杂和自动化，导致机械部件也有同样的趋势．机器人手臂常常用来完成重复的任务，这是由于与人类相比，机器人干起活来更便宜、更准确并且更精确的缘故．在下一个例子和练习 3.40 中，我们考察与机器人手臂有关的一些构形空间．

例 3.30　在图 3.41 中，我们描述一个可以按两个角度和一个长度而改变的机器人手臂．

机器人手臂的基座可以全方位旋转 360 度．对应的构形空间坐标，是圆周 S^1 上的某一个点．手臂可以旋转 90 度，因而对应的构形空间坐标被限定于区间［0，90］之中．它的手臂可以从 0 厘米延伸到 25 厘米，所以它的构形空间坐标被限定于区间［0，25］之中．于是，这个机器人手臂的构形空间，是图 3.42 所示的 $S^1 \times$［0，90］$\times$［0，25］．它等价于 $S^1 \times I \times I$，即一个实心环．

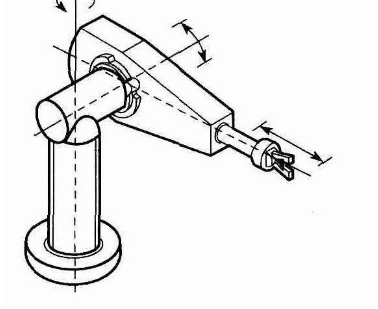


图 3.41　机器人手臂

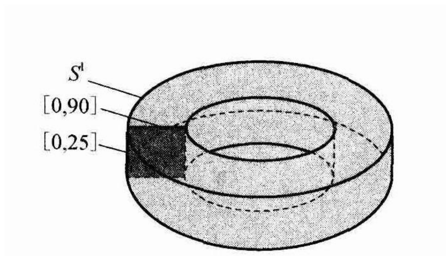


图 3.42　机器人手臂的构形空间是一个实心环

例 3.31 下面考察在金属片卷曲方面的一个应用. 设我们有一块正方形的金属片，可以沿着如图 3.43 所示的竖直轴和水平轴卷曲. 设 θ_H 是此正方形的上半部关于下半部所卷的角，$\theta_H=0$ 表示完全卷到正面的方式；$\theta_H=2\pi$ 表示完全卷到背面的方式；$\theta_H=\pi$ 对应于如图所示未卷的情况. 类似地，我们设 θ_V 是此正方形的左半部关于右半部所卷的角.

我们作一个在物理上合理的假定，即仅当此正方形沿水平轴以 $\theta_H=0$，π 或 2π 卷曲时，我们才可以沿竖直轴卷曲. 在我们沿水平轴卷曲时，作相应的假定. 所有可能的一对卷曲角 (θ_H, θ_V) 的构形空间，是如图 3.44 所示的由 3 条竖直线段和 3 条水平线段所组成的 $\theta_H\theta_V$ 平面的子空间.

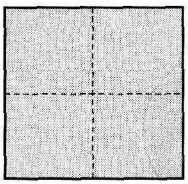


图 3.43 正方形可以沿着竖直轴和水平轴卷曲

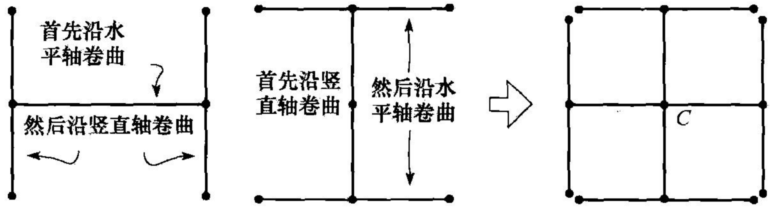


图 3.44 所有可能的一对卷曲角 (θ_H, θ_V) 的构形空间

对图 3.44 的构形空间可作如下的描述：首先沿水平轴卷曲，然后（如果可能的话）沿竖直轴卷曲，所对应的构形空间如图 3.44 之左所示. 首先沿竖直轴卷曲，然后沿水平轴卷曲，所对应的构形空间如图 3.44 之中所示. 对于这些空间中的每一个，中心点表示未卷曲的构形，因而，这些中心点重合，所导致的构形空间 C 如图 3.44 之右所示. 重要的是知道“角点”不重合. 例如，沿竖直轴卷曲 0 度再沿水平轴卷曲 0 度，不会如按相反的次序作同一对卷曲导致同样的最终被卷曲之物（除非那时我们允许被卷曲之物再作刚性运动.）

补充练习 假定金属薄片在卷曲之后，我们允许在 3 维空间中的此被卷曲的薄片作刚性运动.

(1) 在构形空间的图上，指出哪些构形空间的点随后与每个其他的点被视为同一的，由于它们导致同样的最终被卷曲之物.

(2) 画出按 (1) 的方式确认所得到的商空间的草图.

(3) 现在假定我们可以区分金属薄片的正面和背面（例如正面涂白色而背面涂黑色）在构形空间的图上，指出哪些构形空间的点随后与每个其他的点被视为同一的，由于它们导致同样的最终被卷曲且着色之物.

(4) 画出按 (3) 的方式确认所得到的商空间的草图.

例 3.32 在本例中，我们考虑如图 3.45 所示的在一条无限长铁丝上运动的一个小珠. 此时，我们不仅关注这个小珠的位置，而且还想探究它的惯性. 于是需要两个变量，一个是位置 $x\in\mathbf{R}$，另一个是惯性 $p\in\mathbf{R}$. 这里，我们有一个相空间而不是构形空间. 此相空间是 $\{(x, p) \mid x, p\in\mathbf{R}\}$. 当然，这恰好是积空间 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$.

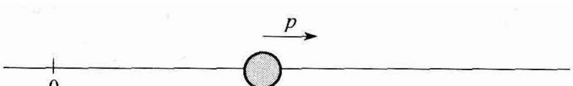


图 3.45 在一条无限长直线上运动的一个小珠

例 3.33 设质量为 m 的一个物体垂直上升或下降，在重力的影响下接近地面. 设 x 是此物体在地面上的高度，p 是它的惯性. 那么它的相空间由 $\{(x, p) \mid x, p\in\mathbf{R}, x\geqslant 0\} = \mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ 给出. 对于这个系统中的运动假定总能量是守恒的. 总能量表示为势能 mgx（其中 g 是重力加速度）与动能 $\frac{p^2}{2m}$ 之和. 于是，当我们考察相空间探究此物体位置和惯性的改变时，发现探究必须严格限于 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ 的形如

$$E_C = \left\{(x,p)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R} \,\middle|\, mgx+\frac{p^2}{2m}=C, C\geqslant 0\right\}$$

的子空间.（见图 3.46.）集合 E_C 把相空间分拆为能量恒定的抛物线，沿着这些抛物线在整个相空间追踪此系统必定处于运动状态的线索.

通常在对一个已知系统进行研究时，守恒的量（例如上例中的总能量）确定了有助于对此系统进行探讨的构形空间或相空间的子空间.

例 3.34 设我们有一个由两个不同的原子所组成的分子 M，希望在 3 维空间中记录它的位置和定向.（见图 3.47.）对此分子，我们想起了在 3 维空间中位于它的质心的那个点. 这使我们能在 3 维空间为此分子定位，但是一旦它的质心被确定，如果要为此分子定向，还需要更多的信息. 这可以通过对于所有可能的方向，在 2 维球面上物色一个点来实现：

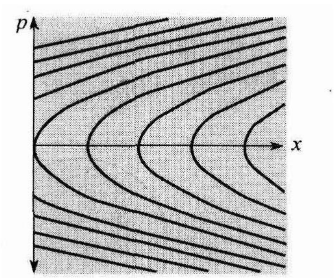


图 3.46 在一个上升或下降的物体的相空间中能量守恒的曲线

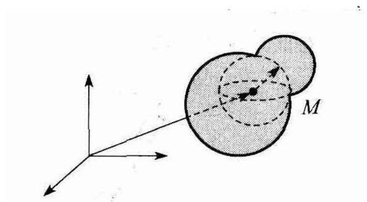


图 3.47

在上述两个原子中取其中之一，并对于此分子的每个方向，确定一个从质心指向所选定原子的一个向量. 对于这个向量（因此对这个方向），当向量的终点位于球面中心时，在球面上确定此向量所指向的点. 按照这种方式，每个方向对应于球面上不同的点. 因此在 3 维空间中记录分子的位置和方向的构形空间是 $\mathbf{R}^3\times S^2$.

例 3.35 设在例 3.34 中的分子由两个相同的原子组成. 在 $\mathbf{R}^3$ 中的每个点对应于分子质心的一个可能的位置. 而在 $\mathbf{R}^3$ 中的每个位置，在此球面上的点对应于此分子所有可能的方向. 然而，由于此分子的对称性，在此球面上的每对对心点，对应于不能区分的构形. 于是，通过把标志分子方向的每个球面上的对心点视为相同，就能“缩减”此构形空间. 因此这个构形空间是 $\mathbf{R}^3\times P$，其中 P 是射影平面.

如例 3.35 一样，在物理学与化学中，利用系统的对称性得到作为另一个空间商空间的构形空间或相空间是很常见的.

3.5 节练习

3.40 分别为以下由图 3.48 所示的 3 个机器人手臂确定构形空间：

(1) 机器人手臂有可旋转整个圆周的两个部件. 整个机器人手臂可以沿着底座导轨移动 50 厘米长. 机器人手臂的高度，可以从它的最低位置提升 20 厘米.

(2) 机器人手臂有 4 个可移动的部件，每个可旋转整个圆周.

(3) 机器人手臂有两个可移动的部件，每个可旋转整个圆周. 此机器人手臂可以从竖直位置转到水平位置，即旋转 90 度.

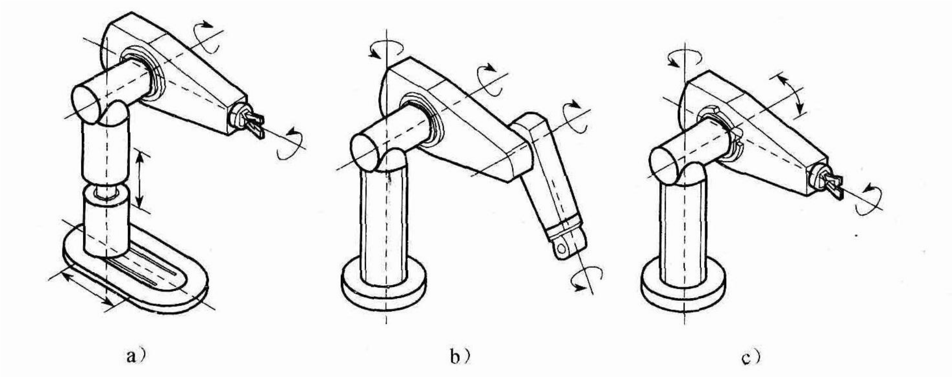


图 3.48 3 种机器人手臂

3.41 考虑图 3.49 所示的系统. 它由具有一个自由端和依附在 1 米长的导轨上的另一附着端的杆所组成，此附着端可沿此导轨上滑动，而且此杆可绕附着端旋转整个圆周. 请确定此系统的构形空间.

3.42 设我们有一片圆盘状的金属片，它可沿图 3.50 所示的 3 个轴卷曲. 请描述并画出由此圆盘所有可能的卷曲角度所形成的构形空间.

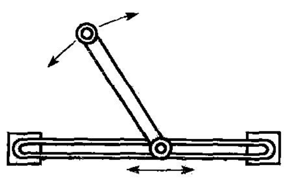


图 3.49 在导轨上的一根旋转杆

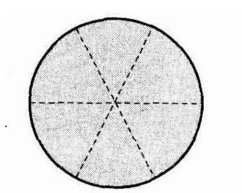


图 3.50 圆盘可沿图示的各个轴卷曲

3.43 请描述一个小珠在一个圆形铁丝上运动的（位置和惯性）相空间.

3.44 确定在平面上一个水分子的位置和定向的构形空间.

第4章

连续函数与同胚

至今，我们已经定义了与拓扑空间和它们的子集有关的各种概念，我们还想考虑把一个拓扑空间映射成另一个拓扑空间的函数．连续性的概念在拓扑学中是最重要的概念之一．

在一个集合上的拓扑，是建立有关集合邻近性概念的一种结构．拓扑空间之间的连续函数专门用于讨论邻近性，此性质反映了这样的概念，即一个连续函数把一个空间中接近的点映射成另一个空间中接近的点．我们将在4.1节给出连续性的一个拓扑学的定义，并提出与连续性有关的一些结论和例子．

具有连续逆映射的一个连续双射函数称为同胚．这种函数为我们提供了有关拓扑等价这一最重要的概念．在4.2节，我们将对同胚和拓扑等价作介绍并加以研究．

我们以讨论正向运动学映射的4.3节作为本章的结束．此映射是在机械系统的研究中起极重要作用的一种连续函数．

4.1 连续性

我们对连续性的最早的正式探索，通常来自微积分或数学分析的课程．这些课程主要讨论把实轴 $\mathbf{R}$ 映射到其自身的函数．它的标准定义如下：

定义 4.1 一个函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，当且仅当对于每个 $x_0\in\mathbf{R}$ 和任一 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

换句话说，如果对于任一 x_0 和 $\varepsilon>0$，f 是连续的，我们就可以找到一个 $\delta>0$，使得如果 x 充分接近于 x_0(相距不超过 δ)，那么 $f(x)$ 接近于 $f(x_0)$（相距不超过 ε)．这通常称为**连续性的 $\varepsilon-\delta$ 定义**．它是在分析中起关键作用的极有用的一个概念．

以下我们对作为一个拓扑空间映成另一个拓扑空间的函数的连续性，提供一个更一般的定义．以下所述的连续性的这个拓扑学定义表达十分简明，与关于 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射的 $\varepsilon-\delta$ 定义等价．

定义 4.2 设 X 和 Y 是拓扑空间，函数 f：$X\to Y$ 是**连续**的，如果对于在 Y 中的每个开集 V，$f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集．

我们称此定义为**连续性的开集定义**．换句话可简单地表达为，f 是连续的，如果每个开集的原象是开集．

例 4.1 设 $X=\{a, b, c, d\}$ 和 $Y=\{1, 2, 3\}$ 有如图4.1所示的拓扑．设函数 f，g，h：$X\to Y$ 分别定义为

$$f(a)=1,\ f(b)=1,\ f(c)=2,\ f(d)=2;$$
$$g(a)=2,\ g(b)=2,\ g(c)=1,\ g(d)=3;$$
$$h(a)=1,\ h(b)=2,\ h(c)=2,\ h(d)=3.$$

函数 f：$X\to Y$ 是连续的，由于容易验证在 Y 中的每个开集在 X 中仍是开集. 类似地，g 也是连续的. 但是，h 却不是连续的，由于 $\{2\}$ 在 Y 中是开集，而 $h^{-1}(\{2\})=\{b, c\}$ 在 X 中并不是开集.

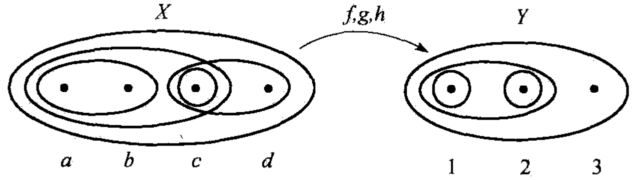


图 4.1 把 X 映成 Y 的函数 f，g 和 h

例 4.2 设 X 和 Y 是拓扑空间，

(1) 由 $\mathrm{id}(x)=x$ 定义的恒等函数 id：$X\to X$ 是连续的.

(2) 选取 $y_0\in Y$，并考虑由 $C(x)=y_0$（对于任一 $x\in X$）定义的常值函数 C：$X\to Y$. 我们来证明 C 是连续的. 设 V 在 Y 中是开集，那么当 $y_0\in V$ 时，$C^{-1}(V)=X$；而当 $y_0\notin V$ 时，$C^{-1}(V)=\varnothing$. 因此 $C^{-1}(V)$ 在 X 中是开集，C 是连续的.

确定函数是否连续，并不仅仅借助于定义此函数的公式或关系. 定义域上的拓扑和值域上的拓扑也是很重要的. 考虑下列例子.

例 4.3 设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}_{fc}$ 由 $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$ 给出，其中定义域 $\mathbf{R}$ 有标准拓扑，而值域 $\mathbf{R}_{fc}$ 是有限补拓扑中的实轴. 函数 f 是连续的，由于 $V=\mathbf{R}-\{x_1, \cdots, x_m\}$ 在有限补拓扑中是一个开集，于是 $f^{-1}(V)=\mathbf{R}-\{2x_1+1, \cdots, 2x_m+1\}$，而它在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 中是一个开集.

再设 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}_l$ 由 $g(x)=\dfrac{x-1}{2}$ 给出，其中定义域 $\mathbf{R}$ 有标准拓扑，而值域 $\mathbf{R}_l$ 是下限拓扑中的实轴. 函数 g 由与 f 同样的公式表示，但是 g 不是连续的. 集合 $[0, 1)$ 在 $\mathbf{R}_l$ 中是开集，但 $g^{-1}([0, 1))=[1, 3)$ 在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 中并不是开集.

例 4.4 设 X 和 Y 是拓扑空间，而 Y 是 X 的子空间. 由 $i(y)=y$ 给出的包含函数 i：$Y\to X$ 是连续的. 为什么呢？如果我们在 X 中取一个开集 U，那么 $i^{-1}(U)=U\cap Y$，而由 Y 上子空间拓扑的定义，$U\cap Y$ 在 Y 中是开集. 事实上，Y 上的子空间拓扑在 Y 上是最粗的拓扑，对于此拓扑，包含函数 i 是连续的（见练习 4.5 (1)).

设 p：$X\to A$ 是从拓扑空间 X 到 A 的一个集合的满射函数，并设 A 有由 p 诱导而得的商空间. 那么 p 是连续的. 为什么呢？由商拓扑的定义，一个集合 V 是开集，当且仅当 $P^{-1}(V)$ 在 X 中是开集. 因此 A 中每一个开集的原象在 A 中当然是开集. 事实上，A 上的商拓扑是 A 上最细的拓扑，对于此拓扑，p 是连续的.（见练习 4.5 (2)).

由定义，函数 f：$X\to Y$ 是连续的，如果在 Y 中的每个开集在 X 中也是开集. 然而，检验 Y 中的每个开集在 X 中有一个开原象，超出了实际的需要. 正如以下定理所指出的，为了证明此 f 是连续的，只要考虑在 Y 一个固定基之中的集合就可以了，说明每个基元素的原象在 X 中是开集.

定理 4.3 设 X 和 Y 是拓扑空间，而 $\mathcal{B}$ 是 Y 上此拓扑的一个基. 那么，f：$X\to Y$ 是连续的，当且仅当对于任一 $B\in\mathcal{B}$，$f^{-1}(B)$ 在 X 中是开集.

证明 设 f：$X\to Y$ 是连续的．那么对于在 Y 中的每个开集 V，$f^{-1}(V)$在 X 中是开集．由于每个基元素 B 在 Y 中是开集，于是对于所有 $B\in\mathcal{B}$，$f^{-1}(B)$在 X 中是开集．

再设对于任一 $B\in\mathcal{B}$，$f^{-1}(B)$在 X 中是开集．我们来证明 f 是连续的．设 V 是 Y 中的一个开集．那么 V 是基元素的一个并，例如 $V=\bigcup B_\alpha$．因此，

$$f^{-1}(V)=f^{-1}(\bigcup B_\alpha)=\bigcup f^{-1}(B_\alpha).$$

由假定，任一 $f^{-1}(B_\alpha)$在 X 中是开集，因此正是它们的并．所以 $f^{-1}(V)$在 X 中是开集，从而 Y 中每个开集的原象在 X 中是开集．因此 f 是连续的． ∎

例 4.5 在标准拓扑中，函数 $f(x)=x+2$，$g(x)=2x$ 及 $h(x)=x^2$ 都是把 $\mathbf{R}$ 映成 $\mathbf{R}$ 的连续函数．

这是为什么呢？设 $L(a,b)$，其中 $a<b$，是在此标准拓扑的一个基元素．那么

$$f^{-1}((a,b))=(a-2,b-2),$$

$$g^{-1}((a,b))=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right),$$

$$h^{-1}((a,b))=\begin{cases}(-\sqrt{b},-\sqrt{a})\cup(\sqrt{a},\sqrt{b}) & \text{若 } a\geqslant 0,\\ (-\sqrt{b},\sqrt{b}) & \text{若 } a<0 \text{ 且 } b>0,\\ \varnothing & \text{若 } b\leqslant 0.\end{cases}$$

在上述每种情况下，一个任意基元素的原象是一个开集．于是每个函数是连续的．

例 4.6 相乘是一个连续函数，即由 $f(x,y)=xy$ 给出的函数 f：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是连续的．它在 $\mathbf{R}^2$ 中的原象是集合

$$f^{-1}((a,b))=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,a<xy<b\}.$$

这是夹在两条双曲线之间的集合．当 a 与 b 都是正数时的例子，如图 4.2 所示．

显而易见，$f^{-1}((a,b))$是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个开子集．我们可以通过证明对于任一点 $(p,q)\in f^{-1}((a,b))$，存在中心位于 (p,q) 且包含于$\in f^{-1}((a,b))$的正方形（见图 4.2)，来证明上述这种明显性．事实上，如果我们设 $m=\min\{b-pq,\ pq-a\}$并选取 $\delta>0$，使得$\delta|p|$，$\delta|q|$和 $3\delta^2$ 都小于$\frac{m}{3}$，那么可以证明 $(p-\delta,\ p+\delta)\times(q-\delta,\ q+\delta)\subset f^{-1}((a,b))$．（见练习 4.15.）

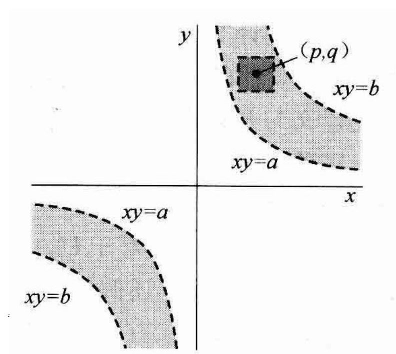


图 4.2 当 a 与 b 都是正数时的原象 $f^{-1}((a,b))=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,a<xy<b\}$

实函数相加也是连续的．（见练习 4.14.）把相乘和相加的连续性相结合，就可以得到下面的定理：

定理 4.4 设 $\mathbf{R}$ 有标准拓扑．那么，每个多项式函数 p：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，其中 $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$．证明见练习 4.13～4.17． ∎

连续性的开集定义以及由它所得到的一些结论，可用来证明有理函数、三角函数和它的反函数、指数函数和对数函数，在它们被定义的定义域上都是连续的．在这里我们不证明这些结果，但本书随后的部分全都要用到这些结论．

连续性的拓扑学的定义叙述很简单，但这个定义如何反映连续函数保持邻近性的想法，可能让你感到惊奇. 以下的定理提供了某种视角，指明一个连续函数把一个闭包中的点，映射到此集合原象闭包中的点.

定理 4.5 设 $f: X\to Y$ 是连续的，且 $A\subset X$. 如果 $x\in \mathrm{Cl}(A)$，那么 $f(x)\in \mathrm{Cl}(f(A))$.（见图 4.3.）

证明 设 $f: X\to Y$ 是连续的，$x\in X$ 且 $A\subset X$. 我们来证明，如果 $f(x)\notin \mathrm{Cl}(f(A))$，那么 $x\notin \mathrm{Cl}(A)$. 于是假定 $f(x)\notin \mathrm{Cl}(f(A))$. 由定理 2.5，存在包含 $f(x)$ 但与 $f(A)$ 不相交的一个开集 U. 由此可得，$f^{-1}(U)$ 是包含 x 但与 A 不相交的一个开集. 因此 $x\notin \mathrm{Cl}(A)$，于是得到所要的结论. ■

接下来我们考虑在把 **R** 映成 **R** 的函数的情况下，连续性的开集定义与连续性的 $\varepsilon-\delta$ 定义之间的等价性. 把 $\varepsilon-\delta$ 定义翻译为拓扑学的术语，可以表述如下：

$\varepsilon-\delta$ 定义的译文 设 X 和 Y 是拓扑空间. 函数 $f: X\to Y$ 是连续的，如果对于任一 $x\in X$ 和任一包含 $f(x)$ 的开集 U，存在 x 的一个邻域 V，使得 $f(V)\subset U$.（见图 4.4.）

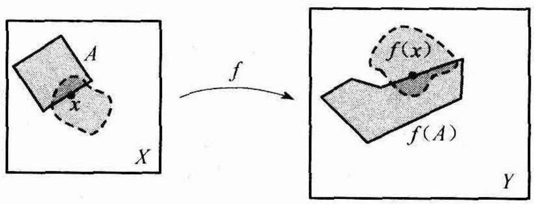


图 4.3 如果 $x\in \mathrm{Cl}(A)$，那么 $f(x)\in \mathrm{Cl}(f(A))$

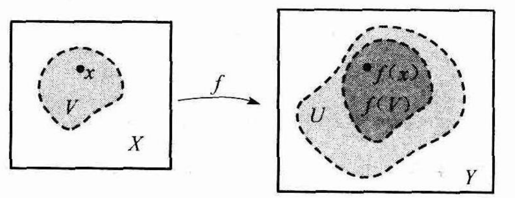


图 4.4 对于任一包含 $f(x)$ 的 U，存在包含 x 的 V，使得 $f(V)\subset U$

在上述译文中，开集 U 所起的作用，是在 $\varepsilon-\delta$ 定义中 ε 区间所起的作用. 对于函数 f: **R**→**R**，连续性的 $\varepsilon-\delta$ 定义与此译文的等价性是易于证明的.（见练习 4.3.）以下的定理我们证明此译文与开集定义的等价性.

定理 4.6 一个函数 $f: X\to Y$ 按连续性的开集定义是连续的，当且仅当对于任一 $x\in X$，和任一包含 $f(x)$ 的开集 U，存在 x 的一个邻域 V，使得 $f(V)\subset U$.

证明 首先，设对于 U，函数 $f: X\to Y$ 的开集定义成立. 并设 $x\in X$，且已知包含 $f(x)$ 的一个开集 $U\subset Y$. 还假定 $V=f^{-1}(U)$. 由于 f 是连续的，由开集的定义可得 $x\in V$，且 V 在 X 中是开集. 显然，$f(V)\subset U$，因而所要的结论得以证明.

再设对于任一 $x\in X$ 和任一包含 $f(x)$ 的开集 U，存在 x 的一个邻域 V，使得 $f(V)\subset U$. 以下我们来证明，对于 Y 中的每个开集 W，$f^{-1}(W)$ 在 X 中是开集. 于是设 W 是 Y 中的任意开集. 为了证明 $f^{-1}(W)$ 在 X 中是开集，选择任一 $x\in f^{-1}(W)$. 于是得到 $f(x)\in W$，因而在 X 中存在 x 的一个邻域 V_x，使得 $f(V_x)\subset W$，或等价地使得 $V_x\subset f^{-1}(W)$. 因此，对于任一 $x\in f^{-1}(W)$，存在一个开集 V_x，使得 $x\in V_x\subset f^{-1}(W)$. 定理 1.4 蕴涵 $f^{-1}(W)$ 在 X 中是开集. ■

通过连续函数把收敛序列映射到收敛序列这一事实，阐述了专门用于讨论邻近性的连续性的另一含义，如以下定理所示：

定理 4.7 设 $f: X\to Y$ 是连续的. 如果 X 中的一个序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 收敛于点 x，那

么，Y 中的一个序列 $(f(x_1), f(x_2), \cdots)$ 收敛于 $f(x)$.

证明 设 U 是 Y 中 $f(x)$ 的任一邻域. 由于 f 是连续的，因此 $f^{-1}(U)$ 在 X 中是开集. 此外，$f(x)\in U$ 蕴涵 $x\in f^{-1}(U)$. 序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 收敛于 x；于是存在 $N\in \mathbf{Z}^+$，使得对于所有 $n\geqslant N$，$x_n\in f^{-1}(U)$. 于是得出对于所有 $n\geqslant N$，$f(x_n)\in U$，因而序列 $(f(x_1), f(x_2), \cdots)$ 收敛于 $f(x)$. ■

重要注记 一个连续函数未必把开集映射到开集. 例如，由函数 $f(x)=x^2$ 给出的 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是连续的，但是开集 $(-1, 1)$ 的原象是 $[0, 1)$，它并非开集.

以下定理指出，连续性的开集定义有一个等价的闭集版本.

定理 4.8 设 X 和 Y 是拓扑空间. 函数 f: $X\to Y$ 是连续的，当且仅当对于每个闭集 $C\subset Y$，$f^{-1}(C)$ 在 X 中是闭集. (见练习 4.2.)

证明 连续函数的复合函数是连续的，可直截了当地得到证明. 特别地，我们有以下定理：

定理 4.9 设 f: $X\to Y$ 且 g: $Y\to Z$ 是连续的. 那么复合函数 $g\circ f$: $X\to Z$ 是连续的.

证明 设 f: $X\to Y$ 且 g: $Y\to Z$ 是连续的. 并设 U 是 Z 中的一个开集. 那么，$(g\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$. 由于 g 是连续的，$g^{-1}(U)$ 在 Y 中是开集. 因而 f 是连续的，$f^{-1}(g^{-1}(U))$ 在 X 中是开集. 于是，对于 Z 中任一个开集 U，$(g\circ f)^{-1}(U)$ 在 X 中是开集，蕴涵$g\circ f$是连续的. ■

我们将发现，下列引理很有用. 它称为粘贴引理，因为它提供了能把连续函数 f: $A\to Y$ 和 g: $B\to Y$ 粘贴在一起，得到一个连续函数 h: $A\cup B\to Y$ 的条件，h 是定义在 f 和 g 定义域的并上的函数. (见图 4.5.)

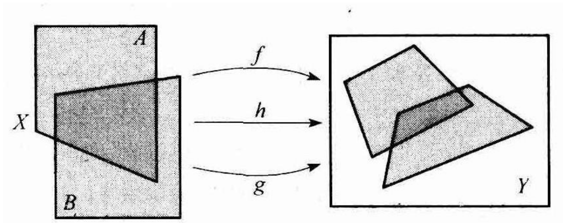


图 4.5 把函数 f: $A\to Y$ 和 g: $B\to Y$ 粘贴在一起来定义 h: $A\cup B\to Y$

引理 4.10(粘接引理) 设 X 是拓扑空间，A 与 B 是使得 $A\cup B=X$ 的 X 的闭子空间. 假定 f: $A\to Y$ 和 g: $B\to Y$ 是连续函数，且对于在 $A\cap B$ 中的所有 x，$f(x)=g(x)$. 那么由

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{若 } x\in A, \\ g(x) & \text{若 } x\in B \end{cases}$$

定义的 h: $X\to Y$ 是一个连续函数.

证明 由定理 4.8 就足以证明，如果 C 在 Y 中为闭，那么 $h^{-1}(C)$ 在 X 中为闭. 于是设 C 在 Y 中为闭. 注意到 $h^{-1}(C)=f^{-1}(C)\cup g^{-1}(C)$. 由于 f 是连续的，由定理 4.8 可知 $f^{-1}(C)$ 在 A 中为闭. 而定理 3.4 蕴涵 $f^{-1}(C)=D\cap A$，其中 D 在 X 中为闭. 这样，D 与 A 在 X 中均为闭，且 $f^{-1}(C)=D\cap A$；因此，$f^{-1}(C)$在 X 中为闭. 同样，$g^{-1}(C)$在 X 中为闭. 所以，$h^{-1}(C)$是在 X 中两个闭集的并，因而在 X 中仍然为闭. 于是得到：h 是一个连续函数. ■

例 4.7 由

$$h(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{若 } x\geqslant 0, \\ -x & \text{若 } x\leqslant 0 \end{cases}$$

定义的绝对值函数 h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由定义在 $\mathbf{R}$ 的闭子集上的两个连续函数组成. 一个是由$f(x)=-x$

定义的函数 f：$(-\infty, 0] \to \mathbf{R}$，另一个是由 $g(x)=x$ 定义的函数 g：$[0, \infty] \to \mathbf{R}$. 这两个函数在 $x=0$ 处相连接，在那里它们吻合. 因此所得到的函数 h 是连续的.

4.1 节练习

4.1 (1) 设 X 具有离散拓扑，而 Y 为任一拓扑空间. 证明每个函数 f：$X \to Y$ 是连续的.

(2) 设 Y 具有平凡拓扑，而 X 为任一拓扑空间. 证明每个函数 f：$X \to Y$ 是连续的.

4.2 **证明定理 4.8**：设 X 和 Y 是拓扑空间. 函数 f：$X \to Y$ 是连续的当且仅当对于每个闭集 $C \subset Y$，$f^{-1}(C)$ 在 X 中是闭集.

4.3 证明函数 f：$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 按连续性的 $\varepsilon-\delta$ 定义是连续的，当且仅当对于任一 $x \in \mathbf{R}$ 和每个包含 $f(x)$ 的开集 U，存在 x 的一个邻域 V，使得 $f(V) \subset U$.

4.4 就下列函数连续与否作出证明：

(1) 由 $f(x)=3x-5$ 定义的函数 f：$\mathbf{R}_l \to \mathbf{R}$，其中 $\mathbf{R}_l$ 是具有下限拓扑的实轴.

(2) 由 $g(x)=3x-5$ 定义的函数 g：$\mathbf{R}_{fc} \to \mathbf{R}$，其中 $\mathbf{R}_{fc}$ 是具有有限补拓扑的实轴.

4.5 (1) 设 X 是一个拓扑空间，并设 Y 是 X 的一个子集. 证明 Y 上的子空间拓扑是 Y 上最粗的拓扑，且使得由 $i(y)=y$ 定义的包含函数 i：$Y \to X$ 为连续的. 即证明，如果 $\mathcal{T}$ 是 Y 上的子空间拓扑，而 $\mathcal{T}'$ 是使得 i 为连续的 Y 上的子空间拓扑，那么 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

(2) 设 p：$X \to A$ 是从一个拓扑空间 X 到一个集合 A 的满射函数. 证明由 p 诱导而来的 A 上的商空间是 A 上最细的拓扑，且使得函数 p 是连续的. 即证明，如果 $\mathcal{T}$ 是 A 上的商空间，而 $\mathcal{T}'$ 是使得 p 为连续的 A 上的一个拓扑，那么 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

4.6 (1) 设 X 和 Y 是拓扑空间，并设 $X \times Y$ 是相应的积空间. 由 $p_x(x, y)=x$ 及 $p_y(x, y)=y$ 定义的射影函数 p_x：$X \times Y \to X$，及 p_y：$X \times Y \to Y$. 证明 p_x 及 p_y 是连续函数.

(2) 证明 $X \times Y$ 上的积空间是使得 p_x 及 p_y 都是连续函数的 $X \times Y$ 上的最粗的拓扑. 即证明，如果 $\mathcal{T}$ 是 $X \times Y$ 上的积拓扑，而 $\mathcal{T}'$ 是使得 p_x 及 p_y 都是连续函数的 $X \times Y$ 上的一个拓扑 i 为连续的 Y 上的子空间拓扑，那么 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

4.7 设 X 是一个具有拓扑 $\mathcal{T}_1$，$\mathcal{T}_2$ 的空间. 设 id：$X \to X$ 是恒等式 $\mathrm{id}(x)=x$，并假设定义域 X 具有拓扑 $\mathcal{T}_1$，而值域 X 具有拓扑 $\mathcal{T}_2$. 证明当且仅当 $\mathcal{T}_1$ 细于 $\mathcal{T}_2$，id 是连续函数.

4.8 设 f：$X \to Y$ 是一个连续函数. 如果 x 是 X 的一个子集 A 的极限点，$f(x)$ 是 Y 中 $f(A)$ 的一个极限点是否为真？如果为真，请给出证明，否则请举一反例.

4.9 设 f，g：$X \to Y$ 都是连续函数. 假定 Y 是豪斯多夫空间，且存在 X 的一个稠密子集 D，使得对于所有 $x \in D$，$f(x)=g(x)$. 请证明对于所有 $x \in X$，$f(x)=g(x)$.

4.10 设 f：$X \to Y$ 是一个函数. f 的图形是由 $G=\{x, f(x) \mid x \in X\}$ 给出的 $X \times Y$ 的子集. 证明：如果 f 是连续的，而 Y 是豪斯多夫空间，那么 G 在 $X \times Y$ 中是闭集.（注：在练习 7.13 中，我们将考虑它的逆命题，假定 Y 还满足一个称为紧致性的性质.）

4.11 设 f：$X \to Y$ 是一个连续函数，而 A 是 X 的一个子空间. 证明：f 对 A 的约束 $f|_A$：$A \to Y$ 是一个连续函数.

4.12 (1) 如果把 A 与 B 在 X 中都是闭集的假定换成在 X 中都是开集，证明粘接引理成立.

(2) 如果放弃 A 与 B 在 X 中都是闭集的假定，举一反例说明粘接引理不成立.

4.13 (1) 设 f_1：$X \to Y_1$ 与 f_2：$X \to Y_2$ 都是连续函数. 证明：由 $h(x)=(f_1(x), f_2(x))$ 定义的函数 h：$X \to Y_1 \times Y_2$ 也是连续函数.

(2) 把 (1) 的结果推广到 n 个函数的情况，$n>2$.

4.14 证明：由 $f(x, y)=x+y$ 定义的相加函数 f：$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数.

4.15 设 f 是相乘函数 $f(x,y)=x.\ y$. 通过以下在例 4.6 中已概述过的步骤，完成 f 连续性的证明：

(1) 当 p 与 q 都是正数，而 δ 如例 4.6 所述，那么 $(p-\delta, p+\delta)\times(q-\delta, q+\delta)\subset f^{-1}((a,b))$.

(2) 考虑 p 与 q 为正、负的其余的可能情况，证明 $(p-\delta, p+\delta)\times(q-\delta, q+\delta)\subset f^{-1}((a,b))$（注：在此可以通过对称性来论证. 例如，$p$ 与 q 都为负的情况与最初 p 与 q 都为正的情况相对称）.

4.16 利用练习 4.6、练习 4.13 和 4.14 以及定理 4.14 证明：有限个连续函数的和与积仍是连续函数. 即设 $f_1, \cdots, f_m$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的. 证明分别由 $S(x)=f_1(x)+\cdots+f_m(x)$ 与 $P(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$ 定义的 S：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 与 P：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的.

4.17 利用练习 4.16 证明，由 $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 给出的每个多项式函数 p：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的.

补充练习：函数序列

在拓扑学和分析学中，函数序列起重要的作用. 例如，由幂级数定义的函数，诸如 $\sin(x)$ 和 e^x，可以用连续函数来表示，这是由于它们是收敛的多项式序列的极限，而多项式本身就是连续函数. 在本课程中，我们用收敛的函数序列来证明蒂茨延拓定理，在第 7 章的补充练习中将遇到此定理.

在以下的练习中，我们考虑一些条件，能确保连续函数的序列收敛于连续函数. 作为起步，考虑函数序列 (s_n)，其中，对于每个 $n=1,2,3,\cdots$，函数 s_n：$[0,1]\to[0,1]$ 定义为

$$s_n(x)=\begin{cases} nx & 若\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1 & 若\ \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

SE4.18 画出 s_1，s_2 与 s_3 的草图，并证明对于所有 $n=1,2,3,\cdots$，s_n 是连续函数.

定义 4.11 设 X 和 Y 是拓扑空间. 函数 f_n：$X\to Y$ 的序列 (f_n) 称为**（逐点）收敛**于函数 f：$X\to Y$，如果对于每个 $x\in X$，在 Y 中序列 $(f_n(x))$ 收敛于 $f(x)$.

SE4.19 序列 (s_n) 收敛于函数 s：$[0,1]\to[0,1]$. 试确定 s，并证明 s 是不连续的.

于是，连续函数的序列未必收敛于连续函数. 然而，如果各个序列 $(f_n(x))$ 以均匀的速率收敛，那么我们能肯定极限函数是连续的. 由以下的定义，在定义域为 $\mathbf{R}$ 的特定场合，上述结论是不言自明的.

定义 4.12 一个函数序列 f_n：$X\to\mathbf{R}$ 称为**一致收敛**于 f：$X\to\mathbf{R}$，如果对于任一 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得对于每个 $x\in X$ 和 $n\geqslant N$，都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

通过图形的方式就可以把一致收敛背后的构想清晰地描绘出来. 如果 (f_n) 一致收敛于 f，那么对于每条竖直厚度为 2ε、中心位于 f 的图形上的带子，存在 $N\in\mathbf{Z}^+$ 使得对于每个 $n\geqslant N$，f_n 的图形都在这条带子之内.（见图 4.6.）

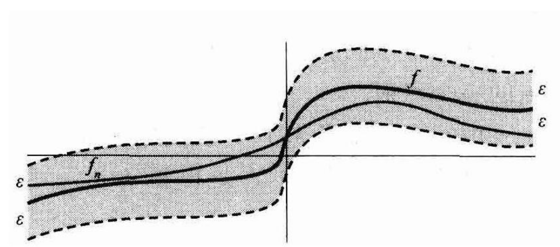


图 4.6 f_n 的图形与 f 的图形在相距 ε 的范围之内

SE4.20 证明前面所定义的函数序列 (s_n) 不一致收敛.

定理 4.13（一致收敛定理） 如果 (f_n) 是连续函数 f_n：$X\to\mathbf{R}$ 的一个一致收敛于 f：$X\to\mathbf{R}$ 的序列，那么 f 是连续的.

证明 设 $U\subset\mathbf{R}$ 是一个开集. 我们来证明对于每个 $x\in f^{-1}(U)$，存在一个开集 $V_x\subset X$，使得 $x\in V_x\subset f^{-1}(U)$. 设任一 $x\in f^{-1}(U)$，取 $\varepsilon>0$ 使得

$$(f(x^*)-\varepsilon, f(x^*)+\varepsilon)\subset U.$$

由于一致收敛，我们可以找到 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得对于每个 $n\geqslant N$ 和 $s\in X$，都有

$$|f_n(s)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

再取 $n'\geqslant N$. 设$U'=\left(f_{n'}(x)-\frac{\varepsilon}{3},\ f_{n'}(x)+\frac{\varepsilon}{3}\right)$，并设 $V_x=f_{n'}^{-1}(U')$. 我们断言，V_x 在 X 中为开，包含 x，且满足 $f(V_x)\subset U$(见 SE4.21). 由这个断言就可得到，对于每个 $x\in f^{-1}(U)$，在 X 中存在一个开集 V_x，使得 $x\in V_x\subset f^{-1}(U)$. 所以 U 在 X 中是开集，蕴涵 f 是连续的. ■

SE4.21 在定理 4.13 的证明中，验证 V_x 如所要求的那样，在 X 中为开，包含 x 且满足 $f(V_x)\subset U$.

4.2 同胚

在这一节，我们定义同胚，即为拓扑等价提供最基本概念的，拓扑空间之间的一个映射. 同胚关注的是由一种拓扑给出的所有性质，进而确定在两个拓扑空间点之间和开集之间的对应关系.

定义 4.14 *设 X 和 Y 是拓扑空间，并设 f：$X\to Y$ 是具有逆映射 f^{-1}：$Y\to X$ 的一个双射. 如果 f 与 f^{-1} 都是连续函数，那么称 f 是一个*__同胚__*. 如果在 X 与 Y 之间存在一个同胚，我们就称 X 与 Y 是*__同胚的__*或是*__拓扑等价的__*，并记为 $X\cong Y$.*

设 f：$X\to Y$ 是一个双射函数. 为使 f^{-1}：$Y\to X$ 是连续的，必须对于在 X 中的每个开集 U 满足 $(f^{-1})^{-1}(U)$ 在 Y 中是开集. 但是由于 f 是一个双射函数，对于 $U\subset X$，$(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)$. 于是，对于在 X 中的每个开集 U，$f(U)$ 在 Y 中必定是开集. 因此，当 f 是一个双射函数，说 f^{-1}是连续的，等价于说：在映射 f 下，每个开集的原象是一个开集. 同样，当 f 是一个双射函数时，说 f 是连续的，等价于说：在逆映射函数 f^{-1}下，每个开集的原象是一个开集. (见图 4.7.)

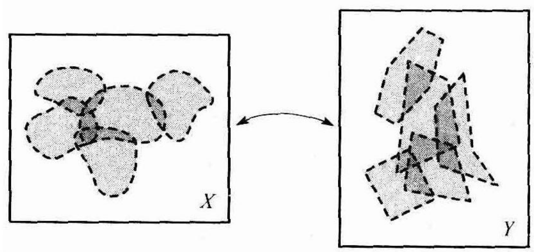


图 4.7 一个同胚把开集映射到开集

如果你选修过一门抽象代数的课程，就可能遇到过群同胚的概念，它是群之间的等价性. 群同胚是为讨论由每个群上的乘法运算所给出的代数结构，而对群的元素所实施的一个双射. 类似地，一个同胚是为讨论由每个拓扑空间的开集族所给出的拓扑结构，而对拓扑空间所实施的一个双射.

由于有了定义 4.14，就使原先我们非正式使用的用语“拓扑等价”变得更确切了.

例 4.8 设 X 和 Y 是由图 4.8 所示的三点集上的拓扑空间. 由 $f(a)=1$，$f(b)=2$，$f(c)=3$ 定义 f：$X\to Y$. 那么 f 是一个同胚，由于它是此三点上的一个双射，且是 X 与 Y 中开集之间的一个双射.

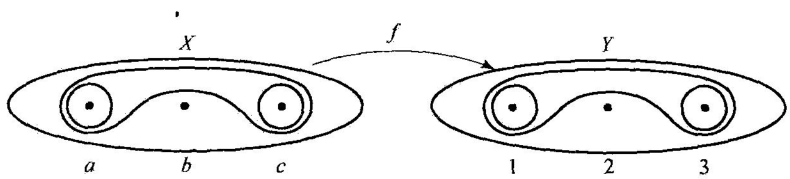


图 4.8 X 到 Y 的一个同胚

例 4.9 图 4.9 所示的在三点集 $X=\{a, b, c\}$ 上的两个拓扑空间，虽然所包含 X 的子集族不同，但它们却等价，这是因为由 $f(a)=c$，$f(b)=b$ 定义的 f：$X\to X$ 是一个同胚.

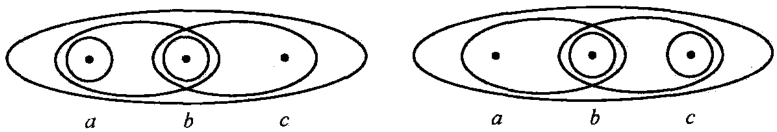


图 4.9　在 $X=\{a, b, c\}$ 上的两个同胚拓扑

例 4.10　用 $f(x)=3x+1$ 定义函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 此函数是具有反函数 $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3}$ 的一个双射.（见练习 0.12.）由于 f 和 f^{-1} 都是 $\mathbf{R}$ 上的多项式，由定理 4.4，它们都是连续的. 因此 f 是一个同胚.

由于 f 是一个同胚，它保持了 $\mathbf{R}$ 的拓扑性质. 添上一个 3 的倍数并向右移 1 个单位，并不改变实轴的基本拓扑性质.

以下有关同胚的基本事实整合在一起，可推出拓扑等价是所有拓扑空间的集合上的一种等价关系.（见练习 4.28.）

(1) 由 $\mathrm{id}(x)=x$ 定义的函数 id：$X\to X$ 是一个同胚.

(2) 如果 f：$X\to Y$ 是一个同胚，那么 f^{-1}：$Y\to X$ 也是一个同胚.

(3) 如果 f：$X\to Y$ 及 g：$Y\to Z$ 是一个同胚，那么 $g\circ f$：$X\to Z$ 也是一个同胚.

例 4.11　设 $(-1, 1)$ 具有标准拓扑，以 $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ 定义函数 f：$\mathbf{R}\to(-1, 1)$. f 的图形如图 4.10 所示. 由此图容易看出，f 是 $\mathbf{R}$ 与 $(-1, 1)$ 之间的一个双射. 而且显然，对于 f 与 f^{-1} 来说，开区间的原象是开区间. 因此 f 与 f^{-1} 都是连续的，于是 f 是 $\mathbf{R}$ 与 $(-1, 1)$ 之间的一个同胚.

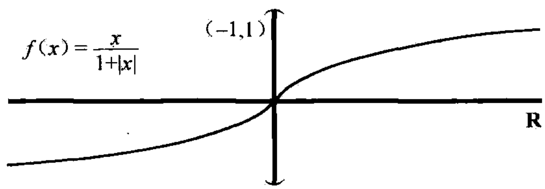


图 4.10　$\mathbf{R}$ 与 $(-1, 1)$ 之间的一个同胚

例 4.12　不仅 $(-1, 1)$ 是与 $\mathbf{R}$ 是同胚的，而且每个非空开集也是与 $\mathbf{R}$ 同胚的. 事实上，考虑下列具有标准拓扑的区间族（假定 a 与 b 是任意实数，$a<b$）：

(1) 开区间：(a, b)，$(-\infty, a)$，(a, ∞)，$\mathbf{R}$.

(2) 有界闭区间：$[a, b]$.

(3) 半开半闭区间、半开半闭无界区间 $[a, b)$，$(a, b]$，$(-\infty, a)$，$[a, \infty)$.

在每种区间族 (1)、(2)、(3) 之中，所有的空间是等价的. 我们用图 4.11 举例来说明同胚，并进一步讨论它们的等价性.

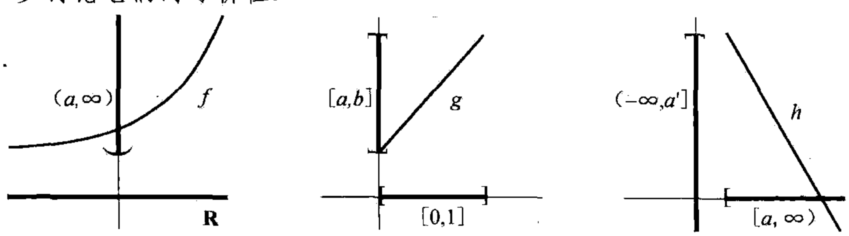


图 4.11　同胚 f，g 和 h

由 $f(x)=e^x+a$ 定义的函数 f：$\mathbf{R}\to(a,\infty)$ 是一个同胚．这样，$\mathbf{R}$ 与任一区间 (a,∞) 是同胚的．由于拓扑等价是一种等价关系，由此还可得出：任一区间 (a,∞) 与其他任一形如 (a',∞) 的区间是同胚的．

由 $g(x)=(b-a)x+a$ 定义的线性函数 g：$[0,1]\to(a,b)$ 是 $[0,1]$ 与 (a,b) 之间的一个同胚．所以任一区间 $[a,b]$ 与 $[0,1]$ 是同胚的．因而任一区间 $[a,b]$ 与其他任一有界闭区间 $[a',b'](a'<b')$ 是同胚的．

此外，由 $h(x)=-x+a'+a$ 定义的函数 h：$[a,\infty)\to(-\infty,a']$ 是 $[a,\infty)$ 与 $(-\infty,a']$ 之间的一个同胚．于是，如果 I_1，I_2 是形如 $[a,\infty)$ 或 $(-\infty,a']$ 的区间，那么 I_1 与 I_2 是同胚的．

在练习 4.25 与 4.26 中，要求定义同胚以建立其余的拓扑等价，要求所有各类的区间子空间是拓扑等价的．

从一个族到另一个族，$\mathbf{R}$ 的区间子空间不是同胚的．尽管这在直觉上是明显的，但在我们能明确证明此点以前，还需要进一步研究拓扑概念．我们将在第 6 章做这项工作．（见练习 6.27.）

例 4.13 设具有标准拓扑的 $[0,2\pi)$ 与 S^1 分别是 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}^2$ 的子空间．我们把 S^1 中的每个点记为 p_θ，其中 p_θ 表示 S^1 上从正实轴起逆时针方向测量的，角度为 $\theta\in\mathbf{R}$ 的点．如图 4.12 所示，由 $f(\theta)=p_\theta$ 定义 f：$[0,2\pi)\to S^1$．显然 f 是一个双射．

f 是否连续？回答是连续的．通过观察 S^1 上此拓扑的任意基元素的原象，就可以发现这一结果．这一基元素可以表示为 $B=\{p_\theta\in S^1\mid a<\theta<b,\ a,\ b\in\mathbf{R}\}$．我们考虑 B 的两种情况：p_0 在 B 中，或不在 B 中，其中 p_0 对应于 $\theta=0$．如果 $p_0\notin B$，那么 $f^{-1}(B)$ 是 $[0,2\pi)$ 之内的一个开集．如果 $p_0\in B$，那么 $f^{-1}(B)$ 具有 $[0,2\pi)\cup(g,2\pi)$ 的形式．无论哪种情况，$f^{-1}(B)$ 在此标准拓扑中是 $[0,2\pi)$ 的一个开集．由此得出 f 是连续的．

但 f^{-1} 是否连续呢？回答是不连续！半开半闭区间 $\left[0,\frac{1}{4}\right)$ 在定义域 $[0,2\pi)$ 中是开集，但 $f\left(\left[0,\frac{1}{4}\right)\right)$ 在 S^1 中却不是开集．因此，f 不是一个同胚．

事实上，在这两个空间之间没有同胚，因此它们不是拓扑等价的．当我们在第 6 章建立涉及连通性的某些性质时，将会发现如何证明这一结论．

例 4.14 在如图 4.13 所示的每种情况的标准拓扑中，平面拓扑等价于开右半平面 $H=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x>0\}$ 及开圆盘 $\mathring{D}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$．

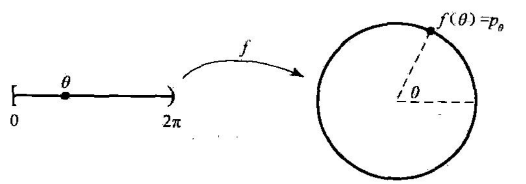


图 4.12 从 $[0,2\pi)$ 到 S^1 上的连续双射不是同胚

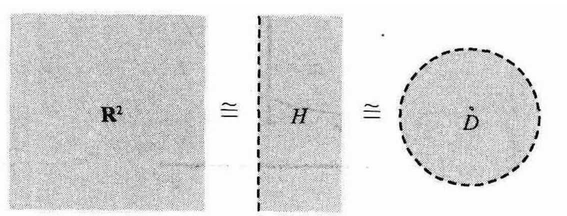


图 4.13 平面与开右半平面及开圆盘同胚

由 $f(x, y)=(e^x, y)$ 定义的函数 f：$\mathbf{R}^2 \to H$，是 $\mathbf{R}^2$ 与 H 之间的一个同胚．它是把竖轴射到竖轴的 $\mathbf{R}^2$ 到 H 的映射，如下所示：

（1）左半平面映射到 H 中的一条带子，其中 $0<x<1$.

（2）y 轴映射到直线 $x=1$.

（3）右半平面映射到 H 中的区域，其中 $x>1$.

由 $g(r, \theta)=\left(\frac{r}{1+r}, \theta\right)$ 定义的函数 g：$\mathbf{R}^2 \to \mathring{D}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathring{D}$ 之间的一个同胚．它把全平面迅速向内收缩而与此开圆盘 $\mathring{D}$ 重合.

例 4.15 如图 4.14 所示，一个正方体的表面与球面同胚．如果我们认为每个面的中心位于 3 维空间的原点，那么由 $f(p)=\frac{p}{|p|}$ 定义的函数 f：$C \to S^2$ 是一个同胚．正如我们在图中所看到的，f 把 C 中的点双射到 S^2 中的点，且把 C 中的开集族双射到 S^2 中的开集族.

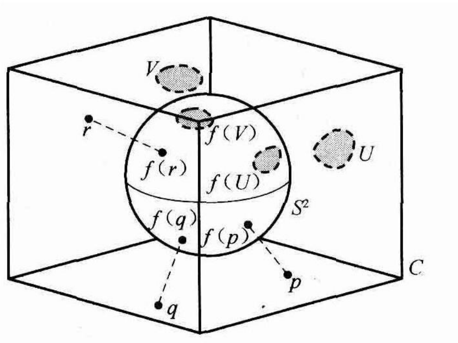


图 4.14 正方体的表面与球面同胚

在以下的例子中，我们发现从一个球面挖去一个点，将产生一个与平面同胚的空间.

例 4.16 在 $\mathbf{R}^3$ 中，设 $N=(0, 0, 1)$ 是位于球面 S^2 北极的点．设 $X=S^2-\{N\}$，并让 X 有传承自 $\mathbf{R}^3$ 的子空间拓扑．此空间称为**有孔球面**．我们来证明 X 与平面 $\mathbf{R}^2$ 同胚．请注意，作为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间，xy 平面自然与 $\mathbf{R}^2$ 同胚，所以我们把 $\mathbf{R}^2$ 视为这样的子空间.

我们在下面定义函数 f：$X \to \mathbf{R}^2$．对于 X 中的每个点 $p=(x, y, z)$，作从 N 点出发穿过 p 的射线．我们定义 $f(p)$ 是此射线穿过平面的唯一点．（见图 4.15.）此映射称为**球极平面射影**．在练习 4.27 中要求为 f 推导一个特定的公式.

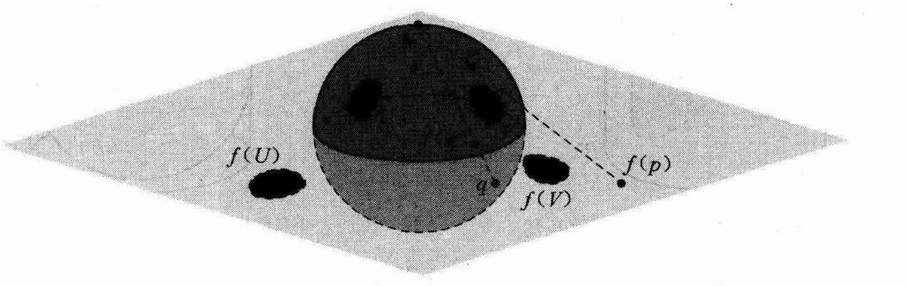


图 4.15 球极平面射影

由此图所示，f 显然是一个双射，而且 f 把 X 中的开集族双射到平面中的开集族．因此，f 是从 X 到此平面的一个同胚．所以，从此球面挖去一个点，将产生一个拓扑等价于平面的空间.

在以下的例子中，我们将发现如何折叠一个圆柱面的边，从而产生与此球面同胚的一个空间.

例 4.17 设 X 是 $\mathbf{R}^3$ 中的圆柱面 $S^1 \times [-1, 1]$．我们通过定义由下列集合组成的 X 的一

个分拆来创建一个商空间：

(1) 集合 $\{(x, y, z)\}$ 的每个点，其中 $z\in(-1, 1)$ 而 $(x, y)\in S^1$.

(2) 在圆柱面顶端的集合 $T=\{(x, y, 1) \mid (x, y)\in S^1\}$.

(3) 在圆柱面底端的集合 $B=\{(x, y, -1) \mid (x, y)\in S^1\}$.

在 X^* 上一个商拓扑是由函数 $p: X\to X^*$ 定义的. 此函数把 X 中的每个点，映射到把这些点包含在内的 X^* 之中的集合.

我们用图 4.16 图示了 X^* 和其中开集的两个例子. 由于把 X 与 X^* 视为相同的，所以集合 T 与 B 分别收缩于单独的点 T^* 与 B^*. 在 X^* 中不包含 T^* 或 B^* 的一个开集 U，与相应的 X 中的开集 $p^{-1}(U)$，在本质上是相同的. 一个在 X^* 中的开集 V 包含点 T^*，但不包含点 B^*，这与 X 中的一个开集 $p^{-1}(V)$ 包含子集 T，却与 B 相分离的情况相对应. 我们可以用类似的方式确定 X^* 中的另一些开集.

我们来证明商空间 X^* 与球面 S^2 同胚. 如图 4.17 所示，在 3 维空间中，圆柱面环绕球面，此两个曲面都以 z 轴为竖直的中心轴. 此外，圆柱面与球面相截于中心在 xy 平面的原点、半径为 1 的圆周，而此球面的北极与南极，分别位于此圆柱面的顶端 (T) 与底端 (B) 的中心.

为了得到同胚 $g: X^*\to S^2$，我们首先定义函数 $f: X\to S^2$，再用 f 来定义 g. 函数 f 通过把圆柱面 $X=S^1\times[-1, 1]$ 上的每个点 p 沿着一条水平轴射影的方法来定义. 把 z 轴直接指向球面上的点 $f(p)$. 我们可以把此函数用 $\mathbf{R}^3$ 中的极坐标表示为 $f(1, \theta, z)=(\sqrt{1-z^2}, \theta, z)$. 如图 4.17 所示，函数 f 把此圆柱面映射到具有以下性质的球面：

(1) 位于顶端与底端圆周之间的此圆柱面的开子集，被双射到挖去北极与南极后的球面.

(2) 此圆柱面的整个顶端的圆周，即集合 T，映射到北极 N.

(3) 此圆柱面的整个底端的圆周，即集合 B，映射到南极 S.

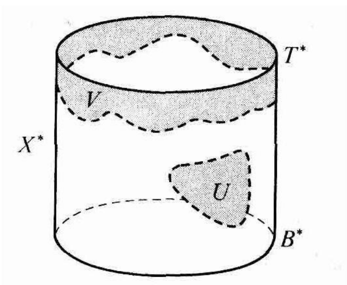


图 4.16 集合 U 与 V 是 X^* 中的开集

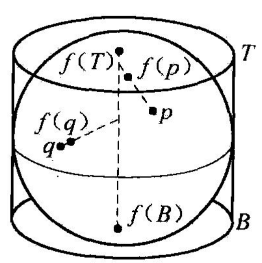


图 4.17 圆柱面被 f 映射到球面

由于在圆周 T 与 B 上 f 是常数，又由于这些集合都被认为是 X^* 中的单个元素，于是得出 f 诱导一个双射函数 $g: X^*\to S^2$.

为了证明 g 是一个同胚，我们检验 g 与 g^{-1} 把开集映射到开集. 设 U 是 X^* 中的一个开集，并设它既不包含点 T^* 也不包含点 B^*. 那么 $g(U)$ 在 S^2 中是与 N 及 S 都相分离的一个开集 (见图 4.18). 然而，如果 V 在包含 T^* 的 X^* 中是一个开集，那么，g 把 V 映射到包含 N 在内的 S^2 中的一个开集. 对于 X^* 中开集的另一种情况是类似的. 此外，同样方式的论证可用于证明 g^{-1} 把 S^2 中的开集映射到 X^* 中的开集. 因此，g 是 X^* 与 S^2 之间的一个同胚.

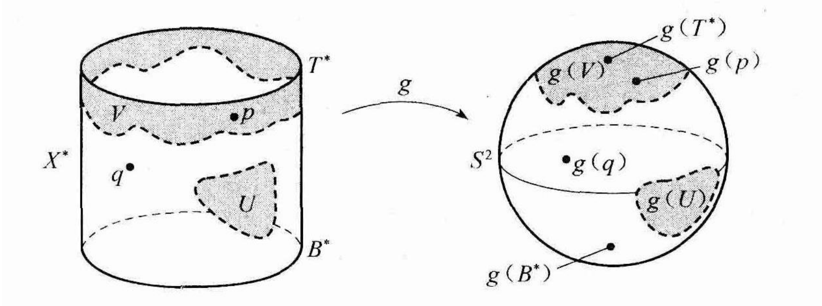


图 4.18　商空间与球面 S^2 同胚

例 4.18　在图 4.19 中，我们看到在 3 维空间中的两条带子都具有标准拓扑．由于我们从一条带子到另一条带子不能实现橡皮胶布那样的变形，它们看来似乎在拓扑学上是不同的，但在事实上它们却是同胚的．我们通过以下的步骤，即对第一条带子沿着线段 S 切开，又同时对所形成的狭带不加扭曲，然后再把切开的线段重新粘贴在一起，使它们恢复原先的样子，来定义从第一条带子到第二条带子的一个映射．此映射在通过上述过程描述的第一条带子上取一个点，而把第一条带子上的点映射到终止于第二条带子上的那个点．此映射是这两条带子之间以及这两条带子中的开集族之间的一个双射，因而是一个同胚．

在图 4.19 中左边的带子不是默比乌斯带．此带是在把它的两端粘贴在一起之前，通过拧一个整圈而做成．而默比乌斯带是在把它的两端粘贴在一起前，通过拧半个圈而做成．（见例 3.19.）

例 4.18 提供了在拓扑学中有关等价的一个重要特征．如果我们切割一个物体，可能留下一个在拓扑上与原来的物体不等价的物体．但是，如果把切开的物体沿着它任一边上的点适当地重新粘贴在一起，使它们恢复切割以前的样子，那么不管在那时进行多少次扭曲和变形，结果是与原来的物体同胚．

虽然同胚表示两个拓扑空间之间最基本的等价关系，但当大多数人把拓扑学认为是橡皮胶布几何学时，同胚不是他们所想象的等价关系．正如我们已经指出过的，在图 4.19 中所出现的两条带子，作为橡皮胶布不能从一条变形为另一条，但它们却是同胚的．通过橡皮胶布来理解等价的理念，将在第 12 章借助一个连续、参数化的同胚族，即称为“合痕”的概念，加以精确化．

对例 4.18 中，位于 3 维空间中的两条带子存在的明显差别，需要加以考虑．我们可以通过对这两条带子的边，即图 4.20 所示的曲线 E_1，E_2 进行考察，来观察这一差别．在此图的左边，

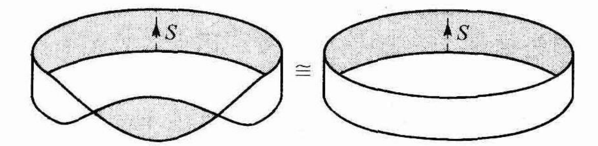


图 4.19　在 3 维空间中同胚的两条带子

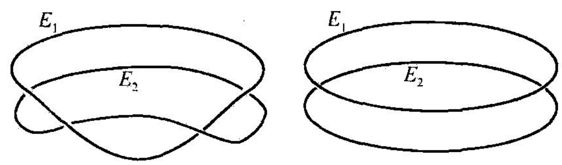


图 4.20　在图左，边 E_1 与 E_2 是相连的，而在图右，此两边不相连

两条带子的边是相环绕的；而在此图的右边，两条带子的边却不相环绕. 我们将在第 14 章用连通数的概念来建立这一理念.

一个拓扑空间位于另一个空间的内部这一概念，由以下定义得到：

定义 4.15 X 在 Y 中的**嵌入**是一个函数 f：$X \to Y$，它把 X 同胚地映射到 Y 中的子空间 $f(X)$.

我们把嵌入 f：$X \to Y$ 看成是如图 4.21 所示的在 Y 之中放入 X 的一个拷贝.

在图 4.19 中所出现的每一条带子，看成是在 3 维空间中的一个圆周环嵌入的原象. 而这些带子与 $\mathbf{R}^3$ 的子空间同胚，在第 12 章，一旦我们定义了嵌入之间等价的概念后将发现上述对应的嵌入是不同的.

定义 4.16 设 X 是一个拓扑空间. 如果 f：$[-1, 1] \to X$ 是一个嵌入，那么 f 的原象称为 X 中的一段**弧**，而如果 f：$S^1 \to X$ 是一个嵌入，那么 f 的原象，称为 X 中的一条**简单闭曲线**（见图 4.22）.

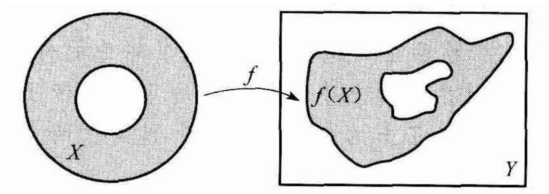


图 4.21 X 嵌入 Y

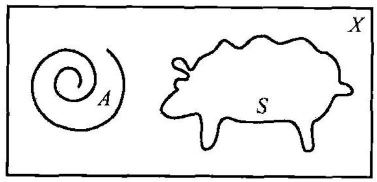


图 4.22 X 中的一段弧和一条简单闭曲线

在图 4.23 中，我们描述在 3 维空间中的几条简单闭曲线. 嵌入 f：$S^1 \to \mathbf{R}^3$ 十分自然地被认为是一些纽结，以及纽结理论的研究对象. 我们将在第 11 章和第 12 章的纽结理论之中，进一步讨论嵌入.

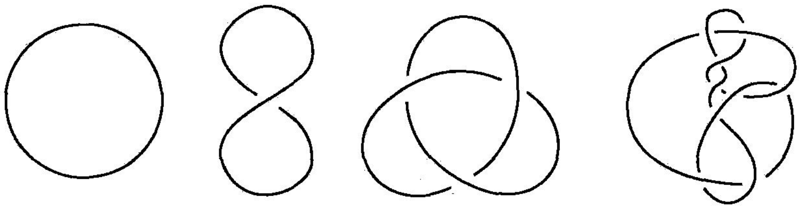


图 4.23 在 3 维空间中这些纽结是圆周的嵌入

同胚拥有为拓扑空间而定义的某些性质. 以下的定理提供了一个例子.

定理 4.17 如果 f：$X \to Y$ 是一个同胚，且 X 是一个豪斯多夫空间，那么 Y 也是一个豪斯多夫空间.

证明 设 X 是一个豪斯多夫空间，$X \to Y$ 是一个同胚. 设 x 与 y 是 Y 中两个不同的点. 那么 $f^{-1}(x)$ 与 $f^{-1}(y)$ 是 X 中两个不同的点. 于是，存在分别包含 $f^{-1}(x)$ 与 $f^{-1}(y)$ 的分离开集 U 与 V. 由此得出，$f(U)$ 与 $f(V)$ 是分别包含 x 与 y 的分离开集. 因此，Y 是一个豪斯多夫空间. ■

定理 4.17 蕴涵：在标准拓扑中的 $\mathbf{R}$，与在有限补拓扑中的 $\mathbf{R}$ 不同胚，这是由于前者是豪斯多夫空间而后者却不是.

同胚所拥有的拓扑空间的一个性质称为**拓扑性质**. 定理 4.17 蕴涵："是豪斯多夫空间"

是一种拓扑性质. 通常，像豪斯多夫空间那样，用开集定义的性质是一种拓扑性质.

正如我们在本节中许多例子所看到的，我们可以通过定义两个拓扑空间之间的同胚来证明它们是同胚的. 反过来，为了证明两个拓扑空间不同胚，必须证明没有一个函数同胚于它们之间所定义的函数. 然而，要考虑这些空间之间的每个函数就太难了. 变通的办法是，正如我们论证在标准拓扑中的 **R**，与在有限补拓扑中的 **R** 不同胚那样，我们发现，如果一种拓扑性质被一个空间拥有，而不被另一空间拥有，那么这两个拓扑空间不同胚.

4.2 节练习

4.22 考虑在两点集合 $X=\{a, b\}$ 上所有可能的拓扑. 指出哪一种是同胚的.

4.23 找出在三点集合 $X=\{a, b, c\}$ 上不同的拓扑，每个集合由 5 个开集（包括 X 与 $\varnothing$）组成，使得其中两种拓扑相互是同胚的，但第三种与另两种不同胚.

4.24 证明双射 $f: X\to Y$ 是一个同胚，当且仅当 f 与 f^{-1} 把闭集映射到闭集.

4.25 (1) 请为 **R** 与区间 $(-\infty, a)$ 之间的一个同胚提出一个公式.

(2) 请为 **R** 与区间 (a, b) 之间的一个同胚提出一个公式，其中 $a<b$.

(3) 已知例 4.12 及本题前两部分中的一个同胚. 请证明，如果 I_1，I_2 是练习 4.12 中集族 (1) 内的区间，那么 I_1 与 I_2 是拓扑等价的.

4.26 (1) 请为 $(0, \infty)$ 与区间 $[a, b)$ 之间的一个同胚提出一个公式，其中 $a<b$.

(2) 请为 $(-\infty, 0)$ 与区间 $(a, b]$ 之间的一个同胚提出一个公式，其中 $a<b$.

(3) 已知例 4.12 及本题前两部分中的一个同胚. 请证明，如果 I_1，I_2 是练习 4.12 中集族 (3) 内的区间，那么 I_1 与 I_2 是拓扑等价的.

4.27 请为例 4.16 中的球极平面射影提出一个明确的公式.

4.28 证明以下的每个论断，然后用它们证明，拓扑等价是在所有拓扑空间的集族上的等价关系：

(1) 由 $\mathrm{id}(x)=x$ 定义的函数 $\mathrm{id}: X\to X$ 是一个同胚.

(2) 如果 $f: X\to Y$ 是一个同胚，那么 $f^{-1}: Y\to X$ 也是一个同胚.

(3) 如果 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$ 是同胚的. 那么 $g\circ f: X\to Z$ 也是一个同胚.

4.29 证明在标准拓扑中，$\mathbf{R}^2-\{O\}$ 与 $S^1\times\mathbf{R}$ 是同胚的.

4.30 找出 **R** 上两种不同的拓扑，使得第一种严格细于第二种，但它们中的每一种相互同胚.

4.31 (1) 请证明：存在包含有限多个点的非空开集，是一种拓扑性质.

(2) 请证明：数轴与具有有限补拓扑的 **R** 不同胚.

4.32 请证明：如以下的命题所指出的，同胚保持内部、闭包和边界：

(1) 如果 $f: X\to Y$ 是一个同胚，那么对于每个 $A\subset X$，$f(\mathrm{Int}(A))=\mathrm{Int}(f(A))$.

(2) 如果 $f: X\to Y$ 是一个同胚，那么对于每个 $A\subset X$，$f(\mathrm{Cl}(A))=\mathrm{Cl}(f(A))$.

(3) 如果 $f: X\to Y$ 是一个同胚，那么对于每个 $A\subset X$，$f(\partial(A))=\partial(f(A))$.

4.33 设对于 Y 中所有的 y，$X\times Y$ 被分拆为形如 $X\times\{y\}$ 的子集. 如果我们把此分拆中的集族记为 $(X\times Y)^*$. 证明：具有所得到商拓扑的 $(X\times Y)^*$，与 Y 同胚.

4.34 设 X，Y 和 Z 是拓扑空间. 证明以下三个积空间：$(X\times Y)\times Z$，$X\times(Y\times Z)$，$X\times Y\times Z$ 相互是同胚的.

4.35 在第 3 章，我们引进了环面的以下三种表示：

(1) 此环面定义为在例 3.5 中的，$\mathbf{R}^3$ 的一个子空间.

(2) 定义为例 3.10 中的积空间 $S^1\times S^1$.

(3) 定义为例 3.20 中把一个正方形的边粘合而得到的一个商空间.

通过定义这些空间之间的同胚，来验证它们是相互拓扑等价的.

4.36 本题我们要确认同胚空间的积是同胚的. 设 f: $X\to Y$ 与 g: $X'\to Y'$都是一个同胚. 证明：由 $h(x, x')=(f(x), g(x'))$定义的 h: $X\times X'\to Y\times Y'$是一个同胚.

4.37 以用一族拓扑图来表示字母表中的字母为开端.（见练习 3.34.）通过视觉观察来确定这一族拓扑图中哪些拓扑图是同胚的，哪些不是. 然后按照拓扑等价把它们整合为等价类.（注：在第 6 章，我们将得到一些性质，使我们能够证实来自本题中不同等价类的拓扑图是不同胚的，见练习 6.31.）

4.3 机器人学的正向运动学映射

在机器人学领域，存在一种必然会定义的，称为正向运动学映射的连续函数，它在设计连杆机构、机器人臂和其他类似机械装置的运动时起作用. 在这一节，我们通过几个例子考察涉及此函数的某些有趣的性质和问题.

请回忆在例 3.29 中已经提出过的连杆机构，它有两根杆，再次在图 4.24 中图示. 在本节，我们总假定杆 B 短于杆 A. 此系统的构形空间是环面 $S^1\times S^1$，在这里，第一个 S^1，对应于杆 A 绕它的固定端旋转角度为 θ_A 的圆周，而第二个 S^1，对应于杆 B 绕它固定在杆 A 上的端点而旋转角度为 θ_B 的圆周.

此连杆机构的运算空间，是由杆 B 的端点所描述的空间. 在这种特殊情况下，我们可以把此连杆机构想象为一个牵引装置，而把此构形空间想象为，我们可以在杆 B 的端点用一支笔涂色的所有点的集合. 这样形成的运算空间是一个圆环.（见图 3.40.）

通常，在研究一个机械或机器人臂的设计时，我们关心的是在此机构上的特殊点，在那里配备了一个工具提供特定的功能，诸如喷漆、托起一个部件、钻一个孔等等. 这样的点称为**端点操纵装置**，而此运算空间是由此端点操纵装置所描述的空间. 为了我们的目的，把端点操纵装置看作为一个点，在那里有一根在牵引装置上的笔，这就足够了.

对于一个机械装置构形空间中的每个点，我们联想起在运算空间中与端点操纵装置相对应的点. 于是，函数 f 已被定义，它称为此机械装置的**正向运动学映射**. 当然，可以假定正向运动学映射是连续的，这是由于，在此构形空间中挨在一起的点，与此运算空间中挨在一起的点相对应. 在上述二杆连杆机构的情况下，f 是如图 4.25 所示的，从环面到圆周环的一个连续映射.

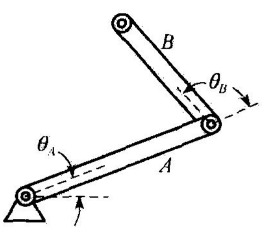


图 4.24 二杆连杆机构

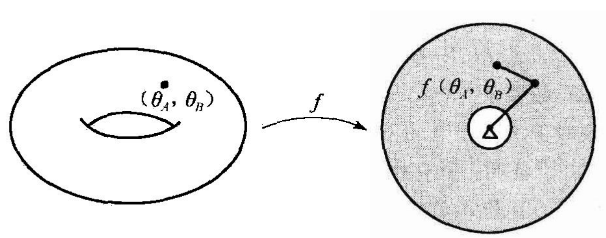


图 4.25 二杆连杆机构的正向运动学映射

机器人学领域的一个重要问题是，一个机械装置运算空间中的已知路径，是否能用端点操纵装置来描述. 在上述例子中我们可能要问，是否存在一种方法来控制此构形空间的变量

θ_A 和 θ_B，从而在此运算空间的圆环中产生一条已知的路径（见图 4.26）呢？换句话说，试问此连杆机构能不能在此圆环中画出一条已知的路径来呢？

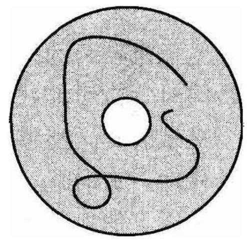


图 4.26 连杆机构能不能描绘出已知的路径

让我们把上述想法在数学上进一步精确化.

定义 4.18 设 Y 是一个拓扑空间. 并设 $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ 具有标准拓扑. Y 中的一条**路径**是一个连续函数 p：$[0, 1] \to Y$. 我们称此路径以 $p(0)$ 为**起点**，以 $p(1)$ 为**终点**.（见图 4.27.）

我们可以认为，一条路径是从时刻 0 到时刻 1 在 Y 中描绘出的一条轨道. 而一条路径是一个函数，我们常使用路径这个术语来称呼一条路径的原象.

设我们有具有构形空间 C、运算空间 O 及正向运动学映射 f：$C \to O$ 的一套连杆机构. 已知运算空间的一条路径 p：$[0, 1] \to O$，试问与路径描绘有关的以下一个问题：是否存在一条构形空间的路径 q：$[0, 1] \to C$，使得 $p = f \circ g$?（见图 4.28.）如果这样的 q 存在的话，我们就称 q 描述 p.

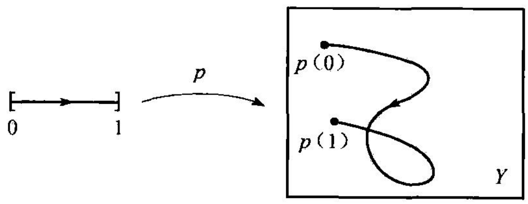


图 4.27 Y 中的一条路径

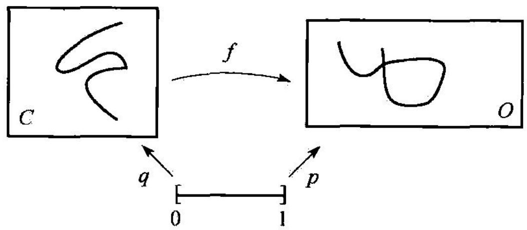


图 4.28 如果 $p = f \circ g$ 则路径 q 描绘路径 p

说起 q 描述 p，就意味着，存在通过在此构形空间指定路径 q 的方法来使此连杆移动，从而在此运算空间中就得到所希望的路径 p. 寻求与给定运算空间路径相对应的构形空间路径的问题，称为**逆向运动学问题.**

例 4.19 考虑在图 4.24 中所示的二杆连杆机构. 我们把构形空间环面表示为一个正方形，此正方形如 3.3 节中那样，把它的各边视为相同的. 此正方形的水平方向，对应于角度 θ_A；而竖直方向，则对应于角度 θ_B.

设 p 是如图 4.29 所示的，在此运算空间中的一条圆形路径. 那么，p 可以用一条与固定在 θ^* 处保持角度 θ_A 的构形空间路径 q 来描述，而 θ_B 从 0 变为 2π.

再设 p 是如图 4.30 所示的，环绕此运算空间圆环的中心的一条圆形路径. 在此时，p 可以用一条与固定在 θ^* 处保持角度 θ_B 的构形空间路径 q 来描述，而 θ_A 从 0 变为 2π.

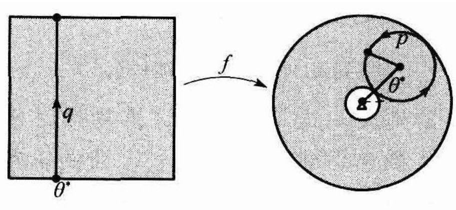


图 4.29 构形空间路径 q 描述出运算空间路径 p

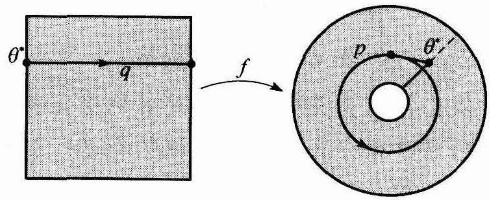


图 4.30 构形空间路径 q 描述运算空间路径 p

考虑如图 4.31 所示的两条运算空间路径. 路径 p_1 是与此圆环的内圆和外圆相切的一条圆形路径. p_2 有两条以杆 B 的长度为半径的圆弧. 在练习 4.38 中, 我们请读者寻求描述这些运算空间路径的构形空间路径.

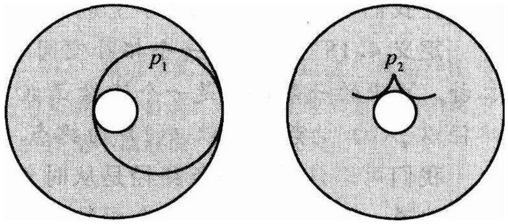


图 4.31 描述图示路径的构形空间路径存在吗

同时, 有可能找到一条构形空间的路径, 使得一个机械装置, 能够沿着在运算空间中一条特定的路径移动, 有时此过程源自此机械装置不可靠的构形. 在以下的例子中, 我们就会发现这一情况, 并看出它如何对航天飞行的导航系统产生影响.

例 4.20 考虑图 4.32 所示的机械装置. 设此机械装置的元件可以如图所标明的方式那样转动. 这种能转动的元件称为万向架, 而由于每个支架都可以绕轴转动 360 度, 所以, 此机械装置的构形空间为 $S^1 \times S^1 \times S^1$, 即 3 维环面.

此机械装置的运算空间, 是由内支架上指针的顶端所描画出的空间. 此指针的另一端, 位于全部的三根轴上, 因而是固定的. 此外容易看出, 此指针的顶端在可以面向 3 维空间的任意方向, 因而此运算空间是一个球面.

同时, 此机械装置允许此指针指向任意方向. 存在一些构形, 由于这些构形运动的自由度受到限制. 机械装置的这些构形导致**框架自锁**的现象, 并如图 4.33 所示, 当 3 个支架共面时, 出现此现象. 由于此万向架这样被装配起来, 所以无论是外支架还是内支架的旋转, 都源于此指针在此运算空间, 即球面的赤道上所画出的一条路径. 与此相对照, 中间支架的旋转, 使此指针固定在同一点 x. 于是, 此机械装置的每种光滑运动, 通过这种构形就形成一条在点 x 与图示的赤道相切的路径. 因此, 如果此机械装置完全实施这种构形, 并产生一条与此赤道不相切的路径, 那么此机械装置必定中止于这种构形. 与这一构形对应的构形空间的点, 称为正向运动学映射的**奇点**.

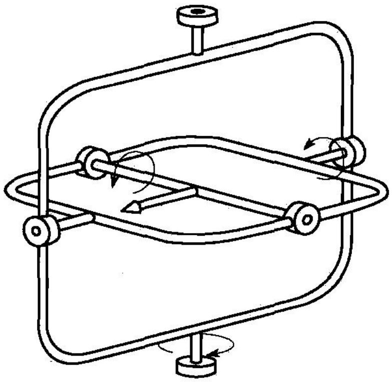


图 4.32 3 维万向架

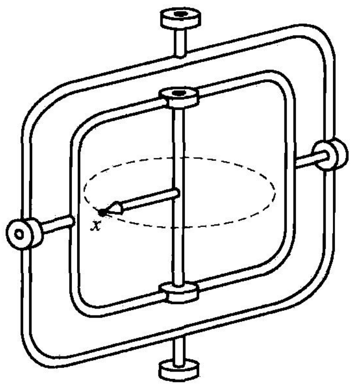


图 4.33 框架自锁构形

我们没有为正向运动学映射的奇点提供一个正式的定义, 这是由于, 这需要探讨来自微分几何学和微分拓扑这些领域的概念. 然而, 重要的是要意识到, 奇点是与此机械装置的构形相对应的, 构形空间中的点, 而不是在此运算空间中的点. 在本例中, 如果此万向架是按图 4.32 那样装配起来的话, 那么在运算空间中对应的点, 就是在图 4.33 所示框架自锁中的

同一点 x. 在图 4.32 中的构形不是奇异的，而且也未对寻求通过 x 的路径提出限制.

在 20 世纪 60 年代后期和 70 年代前期，在美国航空航天总署开展有人操纵的登月航天飞行活动期间，在框架自锁有关的构形方面及航空航天技术方面提出了挑战. 每个航天飞行器的导航系统包括一个类似于图 4.32 所示的万向架机械装置. 虽然我们仅对这样的系统作了简单的概述，但是由此构形空间中的奇点所引出的问题，在本质上是一样的.

航天系统的惯性测量单元（IMU），如图 4.34 所示，附属于此航天器之中，并包含一个 3 维万向架. 其内支架放置 IMU 的主要功能元件——稳定的平台. 在此稳定的平台内存在具有两个重要作用的电子和机械系统. 第一个作用是为空间导航确定一个参照系，第二个作用是因为为了防止框架自锁，当航天器连续改变方向时，这些系统使此稳定的平台保持在一个固定的方向，因而保持此参照系恒定.

当此万向架装置处于图 4.35 所示的奇异位置时，就会出现框架自锁. 在此奇异位置，如果此航天器转向到垂直于此万向架平面的一个轴，那么这 3 个支架就会在它们所在的平面扭在一起，保持此框架的自锁构形，并使稳定平台转动，导致参照系丧失. 事实上，包括这样一个旋转部件的航天器的每种运动，自锁引起参照系的丧失.

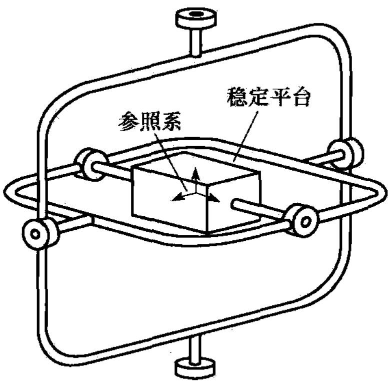
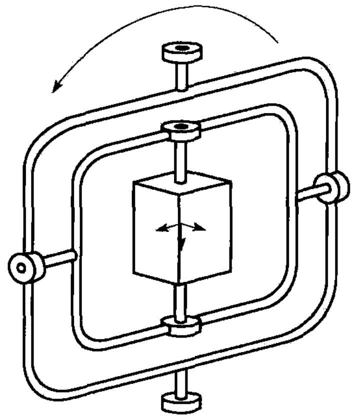


图 4.34 惯性测量单元（IMU）的结构


图 4.35 由于框架自锁构形而引起稳定平台转动从而导致参照系丧失

框架自锁与这些航天飞行器有这样一种关系，也就是当框架自锁即将出现时，用作一种警示器，以便让航天人作出变更. 于是，这些航天人就能让航天器连续改变方向，从而使 IMU 摆脱框架自锁，因而转为重新设置参照系的紧迫任务.

本节中的上述例子表明，正向运动学映射的分析，在机械系统的设计中是重要的. 正向运动学映射就可以为一个有待考虑的机械装置不可能的、受到限制的构形，或可能存在问题的构形提供关键的信息.

4.3 节练习

4.38 考虑图 4.24 中的二杆连杆机构及图 4.31 所示的两条运算空间路径. 在此构形空间环面的图中，分别画出描述路径 p_1，p_2 的路径 q_1，q_2 的草图.

4.39 考虑图 4.24 中的二杆连杆机构. 如果当构形为（θ_A，θ_B）时，通过固定 θ_A 而让 θ_B 改变的方式所得到

的运算空间路径，与通过固定 θ_B 而让 θ_A 改变的方式所得到的运算空间路径相垂直，此连杆机构的一种构形（θ_A，θ_B）是一种奇异构形．试确定此连杆机构的这种奇异构形．

4.40 考虑图 4.36（1）所示的称为瓦特 4 联杆机构运动的连杆机构．每一根杆 A 与 B 都有一端被按在平面上，而另一端与杆 C 的一个端点相连．在每个被按住的点和每个连接点，各杆都可以转动．设想我们在杆 C 的中点有一支笔．按图示，θ_A 是杆 A 从水平轴起按逆时针方向测量的角，θ_B 与杆 B 的关系同样如此．这个构形空间，是与此连杆机构所有可能的构形相对应的角度偶（θ_A，θ_B）的集合．在图 4.36（2）中，它被表示为 $\theta_A\theta_B$ 平面的一个子空间．运算空间是由这支笔所描绘出的此平面的子空间，这已在图 4.36（3）中描绘出来．请你为此连杆机构建立一个运行模型，以观察它是如何操作的．

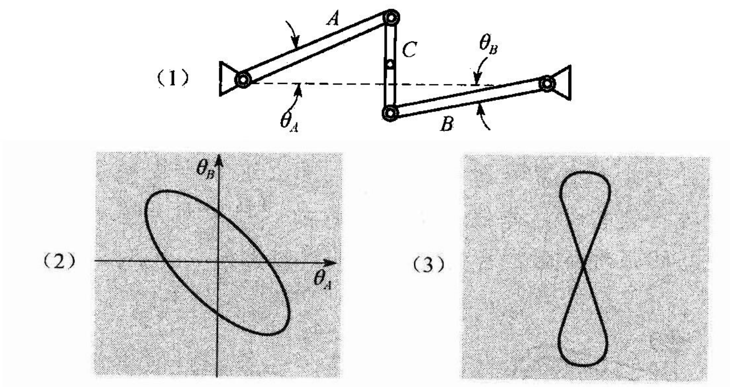


图 4.36 瓦特 4 联杆机构及其构形空间与运算空间

（1）考虑构形空间点（θ_A，θ_B）的集合．解释并说明为什么这里有 θ_A 的两个值，而与 θ_B 对应的值只有一个．

（2）通过在构形空间示意图上选取一组点，展示瓦特 4 联杆机构运动的正向运动学映射，并说明它们把何处映射到运算空间的 8 字形上．在你的点之中，包括了在此构形空间中映成此 8 字形中交叉点的两个点．

第5章

度量空间

最一般和最有用的拓扑空间要数所谓的度量空间了．这个概念来自对基本集合中点之间距离的测量．测量距离的概念，超出了通过拉伸一根卷尺来确定两个物体相隔有多远的观念．例如，像我们将看到的，通过考虑两个函数图形之间的面积，可以度量它们之间的距离；两个词之间的距离，可以通过计算从一个词到另一个词需要改变多少个字母来度量．对一个集合元素之间的距离加以度量并进行比较的能力，通常是难以达到的．因为度量空间的结构比一般的拓扑空间更复杂．

度量空间在分析学的数学领域中起重要的作用，并出现于众多有趣的应用场合．在 5.2 节，我们将介绍它们在研究纠错码，以及去氧核糖核酸（DNA）序列中的应用．

首先，在 5.1 节，我们介绍度量作为本章的开始．然后，在 5.2 节讨论应用，在 5.3 节考察度量空间的性质，在 5.4 节介绍可度量化的概念．

5.1 度量

定义 5.1 集合 A 上的一个**度量**，是具有下列性质的函数 d：$X\times X\to\mathbf{R}$：

（1）对于所有 x，$y\in X$，$d(x, y)\geqslant 0$，等号当且仅当 $x=y$ 时成立．

（2）对于所有 x，$y\in X$，$d(x, y)=d(y, x)$．

（3）对于所有 x，$y\in X$，$d(x, y)+d(y, z)\geqslant d(x, z)$（三角不等式）．

我们称 $d(x, y)$ 为 x，y **之间的距离**，并称由集合 X 与度量 d 组成的 (X, d) 为一个**度量空间**．

请注意，当我们测量点之间的距离时，d 具有我们预期的性质．两点之间的距离至少为 0，而仅当这两个点是同一点时，它等于 0．从点 x 到点 y 的距离，与从点 y 到点 x 的距离是相等的．最后，从 x 到 y，然后再从 y 到 z 的距离，绝不会短于直接从 x 到 z 的距离．

例 5.1 在 $\mathbf{R}$ 上定义 $d(x, y)=|x-y|$．这称为 $\mathbf{R}$ 上的**欧氏度量**或**标准度量**．对于一个度量来说，条件（1）与（2）可以直接得到的．而三角不等式通过考虑各自分离的有序的 3 个点 x，y，z，就能很容易地验证．例如，当 $y\leqslant x\leqslant z$ 时，我们有

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= (x-y)+(z-y) \\ &\geqslant z-y \\ &\geqslant z-x \\ &= d(x,z). \end{aligned}$$

例 5.2 我们引入在平面 $\mathbf{R}^2$ 上定义的 3 种不同的度量. 用图 5.1 来说明如何测量点 $p=(p_1, p_2)$ 与点 $q=(q_1, q_2)$ 之间的距离.

在 0.4 节中我们已定义

$$d(p,q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$$

为欧氏距离公式. 我们指出, d 满足使之成为平面上一种度量的 3 种性质. 我们称 d 为 $\mathbf{R}^2$ 上的**欧氏度量**或**标准度量**. 由这种度量测量出的, 是平面上的点之间的直线距离.

以下再定义 $d_T(p, q)=|p_1-q_1|+|p_2-q_2|$. 要证明 d_T 满足一个度量的 3 种性质是一件轻而易举的事 (见练习 5.1). 这种度量称为**出租车度量**或**曼哈顿度量**, 这是由于它所测量的是垂直行进的总距离加上水平行进的总距离, 正如你在一个城市中被限制在东西向和南北向的水平向和垂直向的街道行进一样.

最后定义 $d_M(p, q)=\max\{|p_1-q_1|, |p_2-q_2|\}$. 函数 d_M 是一种度量 (见练习 5.2), 它称为**最大值度量**. 此时两点之间的距离, 是它们坐标之差的最大值.

早先, 当我们在平面上提出标准拓扑时, 曾用欧氏距离公式把它定义为开球的一组基. 证明开球的集族是一组基所依据的事实, 仅仅是欧氏距离公式满足成为一种度量的各种性质. 因此, 正如我们以下要证明的, 给定在一个集合上的一种度量, 就可以借助由这种度量所确定的开球, 来定义此集合上的一种拓扑.

定义 5.2 设 (X, d) 是一个度量空间. 对于 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$, 定义集合

$$B_d(x,\varepsilon)=\{y\in X \mid d(x,y)<\varepsilon\}$$

为以 x 为中心、ε 为半径的开球, 并定义集合

$$\overline{B}_d(x,\varepsilon)=\{y\in X \mid d(x,y)\leqslant\varepsilon\}$$

为以 x 为中心、ε 为半径的闭球.

定理 5.3 设 (X, d) 是一个度量空间. 开球的集族

$\mathscr{B}=\{B_d(x, \varepsilon) \mid x\in X, \varepsilon>0\}$ 是 X 上一种拓扑的一组基.

在证明定理 5.3 以前, 我们需要确认下列引理:

引理 5.4 设 (X, d) 是一个度量空间. 如果 $x\in X$, $\varepsilon>0$ 且 $y\in B_d(x, \varepsilon)$, 那么存在 $\delta>0$, 使得 $B_d(y, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)$.

证明 设如图 5.2 所示, $\delta=\varepsilon-d(x, y)$. 接下来证明 $B_d(y, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)$.

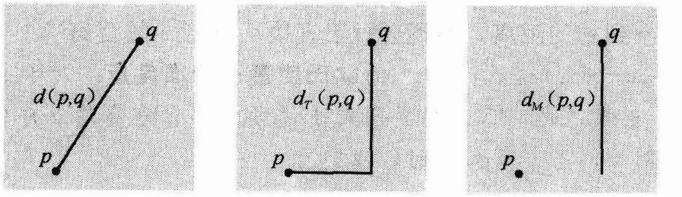


图 5.1 用欧氏度量、出租车度量和最大值度量测量距离

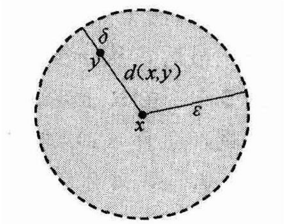


图 5.2 设 $\delta=\varepsilon-d(x, y)$

为了证明此论断, 设任一 $z\in B_d(y, \delta)$, 那么 $d(y, z)<\delta$. 于是,

$$d(x,y)+d(y,z)<d(x,y)+\delta$$

$$< d(x,y) + (\varepsilon - d(x,y))$$
$$= \varepsilon.$$

因此，$d(x, z)<\varepsilon$，蕴涵 $z\in B_d(x, \varepsilon)$. 所以 $B_d(y, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)$. ■

定理 5.3 的证明 我们需要验证$\mathcal{B}$确实是一组基. 在 X 中的每个点，包含在$\mathcal{B}$的一个集合中，这当然是没有疑问的. 事实上，对于任一 $\varepsilon>0$，$x\in B_d(x, \varepsilon)$.

为了确认一组基的第二个条件得以满足，我们必须证明，如果 $x\in B_1\cap B_2$，且 B_1，$B_2\in\mathcal{B}$，那么存在 $B_3\in\mathcal{B}$，使得 $x\in B_3\subset B_1\cap B_2$.

设 B_1，B_2 是$\mathcal{B}$中的两个集合，并设 $x\in B_1\cap B_2$. 那么由引理 5.4，存在 δ_1，$\delta_2>0$，使得 $B_d(x, \delta_1)\subset B_1$ 且 $B_d(x, \delta_2)\subset B_2$. 设 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，那么 $x\in B_d(x, \delta)\subset B_1\cap B_2$，正是我们所要证明的.

于是得出$\mathcal{B}$是 X 上一种拓扑的一组基. ■

由于与一种度量相关的开球的集族是一组基，因此立即得到一种拓扑：

定义 5.5 *设 (X, d) 是一个度量空间. 由开球的基$\mathcal{B}=\{B_d(x, \varepsilon)\mid x\in X, \varepsilon>0\}$ 所生成的拓扑，称为由 d* **诱导的拓扑**，*并称为一种***度量拓扑**.

从现在开始，当我们提到一个度量空间 (X, d) 时，就假定它是具有由 d 诱导的度量拓扑的一个拓扑空间.

以下的定理为确定一个集合确实是在一个度量拓扑中的一个开集，提供了有用的条件：

定理 5.6 *设 (X, d) 是一个度量空间. 当且仅当对任一 $y\in U$，存在一个 $\delta>0$，使得 $B_d(y, \delta)\subset U$，集合 $U\subset X$ 是由 d 诱导的这种拓扑中的开集.* (见图 5.3.)

证明 见练习 5.9. ■

在一个度量空间中，开球是开集，这是由于它们是此拓扑中的基元素. 直接可证明闭球是闭集. (见练习 5.14 (1).)

例 5.3 考虑由 $d(x, y)=|x-y|$ 定义的 $\mathbf{R}$ 上的度量. 我们看到与此度量 d 有关的基元素是开集

$$B_d(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbf{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

由于通过设 $x=\frac{a+b}{2}$及 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$，在实轴上的每个开区间 (a, b) 可表示为形如 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ 的开区间，于是上述这组基恰好是 $\mathbf{R}$ 上此标准拓扑的基. 因此，由 $\mathbf{R}$ 上此标准度量诱导而来的拓扑是标准拓扑.

例 5.4 再考虑在例 5.2 中所介绍过的 $\mathbf{R}^2$ 上的 3 种度量. 我们在图 5.4 中以图解的方式列举了与这 3 种度量有关的开球.

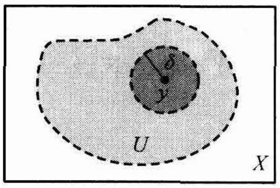


图 5.3 集合 U 是开集，当且仅当对于 U 中的每个 y，存在包含于 U 中的一个以 y 为中心的开球

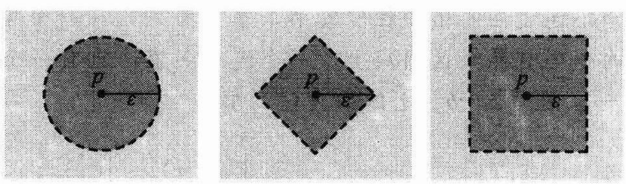


图 5.4 在标准度量、出租车度量和最大值度量中的开球

在由

$$d(p,q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$$

给出的标准度量中，所得到的基元素通常是此平面中的整个开球．在例 1.11 中，我们定义了把这组基作为 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑的基而得到的拓扑．所以 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑，是由此标准度量 d 诱导而来的拓扑．

然后，考虑由

$$d_T(p,q)=|p_1-q_1|+|p_2-q_2|$$

定义的出租车度量．所得到的是形如

$$B_{d_T}(p,\varepsilon)=\{q\in\mathbf{R}^2\mid|p_1-q_1|+|p_2-q_2|<\varepsilon\}$$

的基元素．在这里，开球 $B_{d_T}(p,\ \varepsilon)$ 是一个以 p 为中心、从 p 到各个角点相距为 ε 的开方块．用定理 1.13 可证明，这种度量也诱导出 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑．在 5.3 节中，我们将引出一个允许直接对度量拓扑进行比较的一般结果（定理 5.15)，在那里，我们用它来证明此出租车度量诱导出 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑．

最后，考虑由

$$d_M(p,q)=\max\{|p_1-q_1|,|p_2-q_2|\}$$

定义的最大值度量．按照这种度量，一个开球 $B_{d_M}(p,\ \varepsilon)$，是以 p 为中心、各边的长为 2ε 的一个开正方形．在这里，定理 1.13 或定理 5.15 可以用来证明，最大值度量诱导出 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑．（见练习 5.26.）

正如同平面 $\mathbf{R}^2$ 的情况一样，在 $\mathbf{R}^n$ 中的欧氏距离公式定义了一种度量（称为**欧氏度量**或**标准度量**)，而所产生的度量拓扑，是在 1.2 节中所介绍的 $\mathbf{R}^n$ 上的标准拓扑．

例 5.5 设 $C[a,\ b]$ 是连续函数 f：$[a,\ b]\to\mathbf{R}$ 的集合．已知两个连续函数 f，g，定义

$$\rho(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

这个函数测量出从 a 到 b，f 与 g 的图形之间的面积．（见图 5.5.）

可直接证明 ρ 满足一个度量所需要的 3 种性质．（见练习 5.7.）

我们究竟是如何知道 $\rho(f,\ g)$ 是确定的，特别是按此定义的积分，为何是有限的呢？原来拓扑学提供了一个解答．由于 f 与 g 是连续函数，在 $\rho(f,\ g)$ 的定义中的被积函数 $|f-g|$ 也是连续的．在介绍连通性的拓扑性质的第 7 章将看到，在一个紧致域（例如 $\mathbf{R}$ 中的一个有界闭区间）上，一个连续实值函数有一个最大值和一个最小值．因此，如果 M 是 $|f-g|$ 在 $[a,\ b]$ 上的最大值，那么

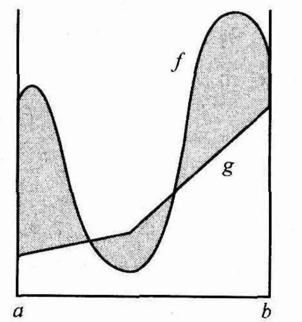


图 5.5 f 与 g 之间的距离是它们图形之间的面积

$$0\leqslant\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a),$$

于是得到 $\rho(f,\ g)$ 取有限值．

由具有从 ρ 诱导出拓扑的 $C[a,\ b]$ 所组成的拓扑空间，是**函数空间**的一个例子．在数学

分析这一领域，函数空间广泛地用于称为算子的映射的研究，算子把函数映射到函数.

5.1 节练习

5.1 证明 $\mathbf{R}^2$ 上的出租车度量满足一个度量的 3 种性质.

5.2 (1) 证明 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值度量满足一个度量的 3 种性质.

(2) 解释为什么 $d(p, q)=\min\{|p_1-q_1|, |p_2-q_2|\}$ 不能定义 $\mathbf{R}^2$ 上的一个度量.

5.3 对于 $\mathbf{R}^2$ 上的两个点 $p=(p_1, p_2)$ 及 $q=(q_1, q_2)$ 定义

$$d_V(p,q)=\begin{cases}1 & \text{若 } p_1\neq q_1 \text{ 或 } |p_2-q_2|\geqslant 1,\\ |p_2-q_2| & \text{若 } p_1=q_1 \text{ 且 } |p_2-q_2|<1.\end{cases}$$

(1) 证明 d_V 是一个度量.

(2) 描述在此度量 d_V 中的开集.

5.4 对于圆周 S^1 中的点 p，q，定义 $d(p, q)$ 等于为使点 p 与 q 重合此圆周需要转动的最小非负角（以弧度计）. 证明 d 是 S^1 上的一种度量.

5.5 设 X 是一个非空集合. 在 $X\times Y$ 上定义 d 为

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{若 } x=y,\\ 1 & \text{若 } x\neq y.\end{cases}$$

证明 d 是一个度量，并确定在 X 上由 d 诱导的拓扑.

5.6 设 d 是在一个有限集 X 上的一个度量. 证明在 X 上由 d 诱导的拓扑是离散拓扑.

5.7 考虑按例 5.5 定义的 ρ.

(1) 用积分的性质证明 ρ 是一种度量.

(2) 请解释对于开区间 (a, b) 上的连续函数 f 与 g，我们通常不能定义 $\rho(f, g)$.

5.8 在 $C[a, b]$ 上，由连续函数 $f: [a, b]\to\mathbf{R}$ 的集合定义 $\rho_M(f, g)=\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\}$. 假定这样的最大值总存在（在第 7 章我们稍作证明），证明 ρ_M 是一个度量.

5.9 **证明定理 5.6**：设 (X, d) 是一个度量空间. 当且仅当对任一 $y\in U$，存在一个 $\delta>0$，使得 $B_d(y, \delta)\subset U$，集合 $U\subset X$ 是由 d 诱导的这种拓扑中的开集.

5.10 (1) 设 (X, d) 是一个空间的一种度量. 对于 x，$y\in X$，定义

$$D(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},$$

证明 D 也是 X 上的一种度量.

(2) 解释为什么在 X 中的两点没有一种或多种与此度量 D 不同的距离.

5.11 在整数集 $\mathbf{Z}$ 上，由下式定义的函数 d 是一种度量：

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{若 } x=y,\\ \min\left\{\dfrac{1}{n!}\,\middle|\,\dfrac{n!}{|x-y|}\right\} & \text{若 } x\neq y.\end{cases}$$

5.12 设 S 是以 0 与 1 为元素的序列集合. 对于 $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ 和 $y=(y_1, y_2, y_3, \cdots)$，定义

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|x_j-y_j|}{2^j}.$$

(1) 解释为什么对于所有的 x，y，表达式 $d(x, y)$ 的无限和是收敛的.

(2) 证明 $d(x, y)$ 是一种度量.

(3) 设 E 是由所有最终为 0 的序列所组成的 S 的子序列. 因此，如果存在 $N\geqslant 0$，使得对于所有 $n\geqslant N$，都有 $x_n=0$，那么 $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ 在 E 中. 证明：在由 d 诱导的拓扑下，E 在 S 中是

稠密的.

5.13 设 (X, d) 是一个度量空间. 假定 $X\times X$ 具有积拓扑. 此拓扑来自具有由 d 诱导而来的拓扑的 X 的每个拷贝. 证明距离函数 d: $X\times X\to\mathbf{R}$ 是连续的.

5.14 设 (X, d) 是一个度量空间.

(1) 证明：在由 d 诱导而来的 X 上的拓扑中，采用度量 d 的闭球是闭集.

(2) 在具有标准度量 d 的 $\mathbf{R}$ 中证明：对于 $\varepsilon>0$ 和 $x\in\mathbf{R}$，闭球 $\overline{B}_d(x, \varepsilon)$ 是开球 $B_d(x, \varepsilon)$ 的闭包.

(3) 举一个度量空间例子，在其中，闭球未必是对应开球的闭包.

5.15 设 (X, d) 是一个度量空间，且 $A\subset X$. 证明：当且仅当在 A 中存在一个收敛于 x 的序列，$x\in \mathrm{Cl}(A)$.

5.2 度量与信息

度量空间用于涉及信息存储、处理和提供等各方面的应用. 一连串的符号，像组成你正在阅读的这些文字的字母，就是基本的信息单元. 在任何场合，我们希望对信息单元之间的相似性和差异性进行测量. 一种可找到的合适的度量可以承担此事. 在本节，我们来考察两个特殊的例子. 第一种信息单元，是被传送的二进制代码；而第二种信息单元，是在一个DNA 分子中为核苷酸链建模而采用的字母序列.

纠错码

随着通过电话线、互联网或从空间卫星到地球所传输的信息量，大得令人难以置信. 至关重要的是，要知道已知信息是否已经完整地收到. 由于电子浪涌、宇宙辐射或其他各种因素的影响，我们预期在传输中会出现某些差错. 当这种错误出现时，我们应该能够识别，并对有差错的信息加以纠正. 这就把我们引向纠错码理论这一领域.

设我们要发送某条信息. 假定此信息以二进制代码的形式存放，也就是说我们的信息由 n 个 0 与 1 的有限序列所组成，这个序列称为一个**字**. 我们还假定在传输中某些 0 变为 1，某些 1 变为 0. 由于不允许丢失或添加项目，所以这个字在到达时它的长仍然为 n. 请注意，正如我们通常认为的那样，在此我们称一个字由几个字母组成，构成一条特定的信息.

每个长为 n 的字，可以看成是一个长为 n 的所有元素为 0 或 1 的向量. 我们把所有可能的集合记为 $V^n=\{(a_1, \cdots, a_n)\mid a_i\in\{0, 1\}\}$. 所以，$V^n$ 是集合 $\{0, 1\}n$ 个拷贝的积. 我们要为这种集合设置一种度量.

定义 5.7 字长为 n 的两个字之间的**海明距离** $D_H(x, y)$，是在它们中所放置的不同字母的数量.

例如，已知

$$x=(0,0,1,1,0,0,0,1,0),$$
$$y=(0,1,0,1,0,0,1,1,0),$$

我们发现，x 与 y 的第 2，3，7 个位置上的数字是不同的，因此 $D_H(x, y)=3$.

海明距离是在 V^n 上的一种度量.（见练习 5.16.）由于 V^n 是一个有限集，海明距离诱导而来的拓扑是离散拓扑.（见练习 5.6.）

实际上，发送信息并不需要用 V^n 的全部元素，与在英语中一个词使用所有可能的 n 个字母

串相比，有过之无不及．我们在 V_2^n 中取这些字的一个子集，并从中挑选我们所要传输的字．

定义 5.8 字长为 n 的一个**码**是 V^n 的任一子集．我们称 C 的元素为**代码字**．

如果所发送和接收的码与一个特定的码相符，那么当到达的一个字不是代码字之一时，接收者就知道在传输中至少出现了一个差错．

定义 5.9 设 C 是长为 n 的一个码．此码的两个代码字之间的最小海明距离，定义为此码 C 的**最小距离**．

例 5.6 考虑由 $C=\{(0,0,1,0,0,0),(1,0,0,1,1,1),(1,1,1,0,1,1),(0,1,0,0,1,0)\}$ 给出的长为 6 的码．我们可以看出，这些代码字之间的最小距离为 3．

如果我们收到一条信息，知道它至多有一个错误．这就意味着，在它的项目之一只要改变 1，那么我们就能说出所推测到的是哪个代码字．在 V^n 中不存在这样的字，在 C 中两个不同代码字不带一个差错．如果存在这样的字，那么根据三角不等式，这两个代码字的相互距离不超过 2，但这就与任意两个代码字之间的最小距离为 3 的事实相矛盾．

这就明确表达出了纠错码的基本理念．我们在每个代码字周围，安放一个以整数为半径的开球．如果传输给我们一个字，在传输中出现 $r-1$ 个或不到 $r-1$ 个错误，那么我们所收到的这个字位于一个开球之中，这个开球的半径为 r，中心在原来发送的这个代码字的附近．但是它可能位于半径为 r，中心在其他代码字周围的开球之中．然而，如果在不同代码字的附近、半径为 r 的开球不重迭，那么收到的这个字必定在唯一的开球之中，因而我们就知道，它正是所发送的那个代码字．我们能纠正错误并确定真正的字．以下的定理使上述想法严格化．设 $[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数．

定理 5.10 如果选取一个长度为 n 的代码 C，使得它的最小距离是 d，那么每条长为 n 的具有 $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ 或不到 $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ 个错误的信息就能被纠正．

证明 设 c 是被发送的原代码字，而 f 是所收到的字．由于 f 的错误不超过 $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ 个，我们知道 $D_H(f,c)\leqslant\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$．设存在第二个代码字 c' 使得 $D_H(f,c')\leqslant\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$．那么就可看出

$$\begin{aligned}D_H(c,c') &\leqslant D_H(c,f)+D_H(f,c')\\&\leqslant \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor\\&=2\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor\\&\leqslant d-1,\end{aligned}$$

这就与最小距离是 d 相矛盾．因此，c 是与 f 相距不超过 $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ 的唯一的代码字．所以必定是原来所发送的那个代码字． ■

我们希望一个代码应具备以下两种有用的特性．首先，它应该能够允许我们纠正数目庞大的错误．这就意味着我们不希望挑选太多的代码字，由于我们希望存在大的彼此分离的开

球，每个开球以代码字为中心．其次，希望有足够的代码字，以便能发送各种不同的信息．例如，码 $C=(0, 0, 0, 0, 0)$ 让我们纠正至多 5 个错误，但它不允许有用信息的传输，由于它是能发送的唯一的字．最后，我们要使在 V^n 中所能容纳的给定尺寸的分离开球的数量最大化．（例如，见练习 5.19.）

检测和纠正错误，是计算机科学和信息科学业界活跃的研究领域．度量、海明距离之类的概念，在这些研究中当然起着至关重要的作用．

DNA 序列

DNA 是由无数原子所组成的一个又长又细的分子．在它的结构内部，存在确定基因结构的密码．与 RNA（在 1.4 节已介绍过）一样，DNA 由核苷酸组成．一个 RNA 分子由单一的核苷酸链组成，而一个由两条链缠绕在一起所构成的 DNA 分子，是被人们熟知的如图 5.6 所示的双螺旋线．DNA 中的核苷酸形成 4 种类型：腺嘌呤（A）、胞嘧啶（C）、鸟嘌呤（G）和胸腺嘧啶（T）．在我们对 RNA 的介绍中曾说明过，一串核苷酸具有成对拧在一起使此链弯曲成形的倾向．在一条 DNA 链中的核苷酸也是成对的，但是与相对的那条链上邻近的核苷酸成对．

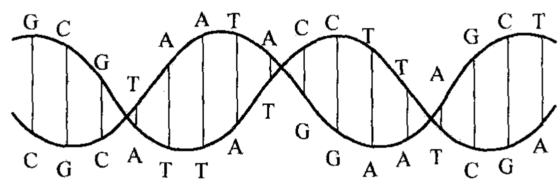


图 5.6　DNA 分子的示意图

（腺嘌呤与胸腺嘧啶成对，鸟嘌呤与胞嘧啶成对．）事实上，这两条链是这样构成的，也就是使得一条链上的每个核苷酸，与另一条链上邻近的核苷酸成对．于是一条链上核苷酸的序列，确定了相对的那条链上的序列，而我们可以用字母 A，C，G，T 的一个序列，来表示一个 DNA 分子的局部或全部，而此字母序列，与由这两条链中之一所提供的核苷酸序列相对应．

在与 DNA 研究有关的最重要的问题之一，是如何对不同的 DNA 序列进行比对，一个 DNA 序列与另一个 DNA 序列究竟有怎样的差别，在某种意义下，这是这两个序列之间演变距离的一种度量（而经过推广，是导致生物起源的，它们相互之间演变距离的一种度量）．当一个物种分化成为两种新物种时，就会在进化树上形成一个分叉，此物种的最初所确认的 DNA 序列，开始积累独特的变异．把这两个序列之间的差别用这些差别的一个函数来度量，就为洞察每个物种进化史的本质提供了条件．

在进化的历程中，DNA 序列的差别以不同的方式出现．其中最普通的是核苷酸替换，即在一个 DNA 序列中相对于原序列来说，一个字母明显的替换．如果这是在两个序列之间所出现唯一的一种改变，那么海明距离就（通过计算替换的总数）为确定它们之间的距离提供了一种有用的度量．在 DNA 之中常出现的另一种改变，是核苷酸的添加或删除，这反映在相应 DNA 序列中字母的添加或删除．在此时，在所改变序列之中所有随后的字母，看来弥补了相关的原序列．当两个 DNA 序列确实非常类似时，就导致它们之间有较大的海明距离．为了处理这个问题，我们介绍另一种在进行比较时有用的度量．

设 x，y 是字母 A，C，G，T 的两个序列．我们通过确定必须对 x 作多少次运算才能变为 y，来测量 x 与 y 之间的距离．我们对 x 允许三种类型的运算：能在 x 中添加任何字母；能在 x 中删除任何字母；能用一个不同的字母替换任何字母．设 i_s 表示在此序列中所添加字

母的数量；d_s 表示在此序列中所删除字母的数量；r_s 表示在此序列中所替换字母的数量．因此，从 x 变为 y 所需要进行运算的总数为 $i_s+d_s+r_s$．当然，把 x 变为 y 所需要进行运算的序列有多种选择，因而，以下述方式来定义 x 与 y 之间的距离：

定义 5.11 序列 x 与 y 之间的**莱文斯坦**（Levenshtein）**距离**定义为

$$D_L(x,y)=\min_S\{i_S+d_S+r_S\},$$

其中最小值取遍把 x 变为 y 的所有序列 S.

例 5.7 设 $x=$AGTTCGAATCC，而 $y=$AGCTCAGGAATC.

那么，我们可以通过下列过程从 x 变为 y：

x	：AGTTCGAATCC
替换 T	：AGCTCGAATCC
添加 A	：AGCTCAGAATCC
添加 G	：AGCTCAGGAATCC
删除 C	：AGCTCAGGAATC

通过考察具有 3 种或 3 种以下的运算的所有可能性，能检验出为了使我们能从 $x=$AGT-TCGAATCC 到 $y=$AGCTCAGGAATC，正如在上面所看到的，需要进行添加、删除、替换这三种运算的最小数量为 4．因此，$D_L(x,y)=4$.

例 5.8 设 $x=$AGTTGAATAC，而 $y=$AGGGTTGAATA．乍一看来，我们发现 x，y 似乎有点类似．事实上，它们有一段 GTTGAATA 是共同的．不难确定，x 与 y 之间的莱文斯坦距离为 3．与此相对照，如果我们计算 x 与 y 之间的海明距离（计算二者不同项目的数量），得到 7．于是在本例中，由 x 与 y 类似的结构可得，与海明距离相比，莱文斯坦距离能较好地反映 x 与 y 的近似性.

莱文斯坦距离也可用于拼写检查、语音识别和剽窃检测．许多度量研究者正是以此距离来对 DNA 序列进行比对和分析的.

5.2 节练习

5.16 证明：海明距离是在 V^n 上、字长为 n 的所有字的集合的一种度量.

5.17 你能把海明距离推广到作为字长任意的字的一种度量吗？也就是说，是否有一种推广海明定义的方法，以获得一种度量，允许在字长不同的两个字之间有一种距离，但像适合于同字长的字的海明距离一样，得到同样的距离？

5.18 在集合 V^n 上，比较海明距离与莱文斯坦距离．一般情况下，哪种距离总是小于或等于另一种距离？试证明你的论断.

5.19 我们说一个字长为 p 的码**纠正** n **个错误**，如果在 V^p 中的每个字与此字的至多一个代码字的距离，小于或等于 n.

(1) 在 V^8 中，举一个码 C 的例子，它有 4 个代码字，纠正两个错误.

(2) 证明：在 V^8 中，对于纠正两个错误的一个字，最多有 4 个代码字.

5.20 设 W 是由字母 A，C，G，T 所组成的有限长序列的集合．证明莱文斯坦距离是 W 上的一种度量.

5.21 对于以下每种序列，求出两个序列 x 与 y 之间的莱文斯坦距离．在序列有同样长度的情况．还要计算海明距离.

(1) x=ACGGTAT，而 y=GGTAG

(2) x=CTGGTAC，而 y=CTAG ATC

(3) x=CCAGTCA，而 y=CCGTCTTA

(4) x=TGACCGTTA，而 y=TGCGCTTAG

5.22 一个词有像 TUPOTAGRY 那样严重的拼写错误. 设一位拼写检查员为消除拼写错误，以最小的莱文斯坦距离把此词改为在其数据库中所拥有的词. 在下列词中，拼写检查员应挑出哪一个词作为他想要的词：
是 TOPOGRAPHY，TOPOLOGY 还是 TAUTOLOGY?

5.3 度量空间的性质

度量空间有许多有用的性质，以下定理所提出的性质就是其中之一：

定理 5.12 *每个度量空间都是豪斯多夫空间.*

证明 设 (X, d) 是一个度量空间. 假定 x 与 y 是 X 中距离为 $d(x, y)=\varepsilon$ 的两个不同的点. 考虑集合 $U=B_d(x, \varepsilon/2)$，且 $V=B_d(y, \varepsilon/2)$. 由此得出，$x\in U$，$y\in V$，且 U 与 V 是开集. 我们断言，U 与 V 是分离集. 假设 $U\cap V\neq\varnothing$，而 z 在此交集之中. 于是，$d(x, z)<\varepsilon/2$ 且 $d(y, z)<\varepsilon/2$. 因此，由三角不等式，

$$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(y, z)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon;$$

此即 $d(x, y)<\varepsilon$. 这就与 $d(x, y)=\varepsilon$ 相矛盾. 于是 $U\cap V=\varnothing$. 所以，存在分别包含 x 与 y 的分离开集 U 与 V，蕴涵 X 是豪斯多夫空间. ■

定理 5.12 蕴涵：如果一个空间不是豪斯多夫空间，那么它就不能由一个度量诱导而来. 例如，作为具有有限补拓扑的实轴的拓扑空间 $\mathbf{R}_{fc}$，不是豪斯多夫空间，因而不能由 $\mathbf{R}$ 上的一种度量诱导而来. 而数轴不是豪斯多夫空间，因而不能由 $\mathbf{Z}$ 上的一种度量诱导而来. 在 5.4 节中，我们将进一步讨论一个拓扑空间由一种度量诱导而来（可度量化）的概念.

如果 X 和 Y 都是度量空间，函数 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续性的定义可推广到函数 $f: X\to Y$. 以下的定理确立了所形成的 $\varepsilon-\delta$ 定义与拓扑学中的开集定义的等价性.

定理 5.13 *设 (X, d_X) 与 (Y, d_Y) 是度量空间. 按开集的定义，函数 $f: X\to Y$ 是连续的，当且仅当对于每个 $x\in X$ 和任一 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得当 $x'\in X$ 且 $d_X(x, x')<\delta$ 时，有 $d_Y(f(x), f(x'))<\varepsilon$.*

证明 见练习 5.24. ■

如下所述，在一个度量空间中，不仅可以测量点之间的距离，而且还可以测量集合之间的距离.

定义 5.14 *设 (X, d) 是一个度量空间. 对于集合 A，$B\subset X$，**A 与 B 之间的距离**定义为*

$$d(A,B) = glb\{d(a,b)\,|\,a \in A,b \in B\}.$$

由于值集 $\{d(a, b)\,|\,a\in A, b\in B\}$ 的下界为 0，对于每对集合 A 与 B，定义 5.14 中的下确界存在.

例 5.9 与点的情况不同，如果两个集合的距离为 0，这两个集合未必是相等集. 例如，

在 $\mathbf{R}^2$ 上的标准拓扑中，如果 A 是 x 轴，B 是 y 轴，那么，$d(A, B)=0$，但 $A\neq B$. 事实上，$d(A, B)=0$ 未必蕴涵 A 与 B 有一个公共点. 而在具有标准度量的 $\mathbf{R}^2$ 中，如果我们设 A 是 x 轴，而 B 是半径为 1、中心在点 $(0, 1)$ 的开球，那么 $d(A, B)=0$，但 $A\cap B=\varnothing$. (见图 5.7.)

我们已经看到，一个已知集合可以有不同的度量. 能够对它们诱导的拓扑加以比较是有用的. 以下的定理为作这样的比较提供了一种手段：

定理 5.15 设 d 与 d' 是集合 X 上的度量，并设 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 分别是它们诱导的拓扑. 那么，当且仅当对于每个 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得 $B_{d'}(x, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)$ 时，$\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$. (见图 5.8.)

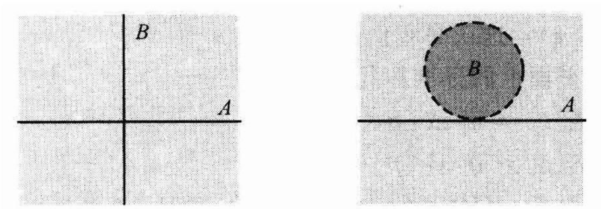


图 5.7　$d(A, B)=0$ 的两种情况

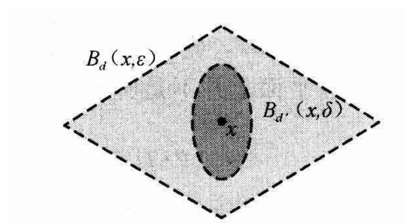


图 5.8　对于每个 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，存在 δ，使得 $B_{d'}(x, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)$

证明 设 $\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$. 那么在 $\mathcal{T}$ 中的开集是 $\mathcal{T}'$ 中的开集. 特别地，对于每个 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，$B_d(x, \varepsilon)$ 在 $\mathcal{T}$ 中，因而是 $\mathcal{T}'$ 中的开集. 由于 $B_d(x, \varepsilon)$ 在 $\mathcal{T}'$ 中是开集，且包含 x，定理 5.6 蕴涵，存在一个 $\delta>0$，使得 $B_{d'}(x, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)$，这正是我们所要证明的.

再设，对于每个 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得 $B_{d'}(x, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)$. 我们来证明 $\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$. 设 U 是 $\mathcal{T}$ 中的一个开集. 以下我们证明 U 是 $\mathcal{T}'$ 中的开集. 设 x 是 U 中的任一点. 由于 U 在是 $\mathcal{T}$ 中是开集，定理 5.6 蕴涵，存在一个 $\varepsilon>0$，使得 $B_d(x, \varepsilon)\subset U$. 由假定，存在一个 $\delta>0$，使得 $B_{d'}(x, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)\subset U$. 于是得出，对于每个 $x\in U$，$B_{d'}(x, \delta)\subset U$. 定理 5.6 蕴涵 U 在 $\mathcal{T}'$ 中是开集，这正是我们所要证明的. ■

用定理 5.15，我们很容易就可以证明，标准度量、出租车度量和最大值度量，全都诱导 $\mathbf{R}^2$ 上的同一拓扑. 在以下的定理中，前两种度量诱导 $\mathbf{R}^2$ 上的同一拓扑. 在练习 5.26 中，我们要求读者证明，此拓扑由出租车度量诱导而来，而且也可以由最大值度量诱导而来.

正如我们在 1.2 节中已指出的，在平面上的标准拓扑，不依赖于基元素的特定形状. 标准度量的圆和开球、出租车度量的开方块及最大值度量的开正方形，全都能产生此平面上的标准拓扑.

定理 5.16 标准度量和出租车度量诱导 $\mathbf{R}^2$ 上的同一拓扑.

证明 我们首先证明，由标准度量 d 诱导的拓扑，细于由出租车度量 d_T 诱导的拓扑. 设 $p\in\mathbf{R}^2$ 和任一 $\varepsilon>0$. 并设 δ 等于 $\varepsilon/2$. 我们断言，$B_d(p, \delta)\subset B_{d_T}(p, \varepsilon)$. 假定此断言成立，那么由定理 5.15 可得出，由 d 诱导的拓扑细于由 d_T 诱导的拓扑.

接下来再来证明此断言. 设任一 $q\in B_d(p, \delta)$. 注意到

$$|p_1-q_1|=\sqrt{(p_1-q_1)^2}\leqslant\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}=d(p,q).$$

由于 $d(p, q)<\delta=\varepsilon/2$，于是得出 $|p_1-q_1|<\varepsilon/2$. 同样，$|p_2-q_2|<\varepsilon/2$. 因此，$d_T=|p_1-q_1|+|p_2-q_2|<\varepsilon$，因而 $q\in B_d(p, \varepsilon)$. 所以，$B_d(p, \delta)\subset B_{d_T}(p, \varepsilon)$，这正是我们所要证明的.

以下我们证明由 d_T 诱导的拓扑，细于由度量 d 诱导的拓扑. 设 $p\in\mathbf{R}^2$ 和任一 $\varepsilon>0$. 在此我们设 $\delta=\varepsilon/\sqrt{2}$. 我们断言，$B_{d_T}(p, \delta)\subset B_d(p, \varepsilon)$，即由定理 5.15 想要得到的结果.

于是，设任一 $q\in B_{d_T}(p, \delta)$. 注意到

$$|p_1-q_1|<|p_1-q_1|+|p_2-q_2|<\delta.$$

同样，$|p_2-q_2|<\delta$. 因此

$$d(p,q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}<\sqrt{\delta^2+\delta^2}=\delta\sqrt{2}=\varepsilon.$$

所以，$q\in B_d(p, \delta)$，蕴涵 $B_{d_T}(p, \delta)\subset B_d(p, \varepsilon)$，这正是我们所断言的. ■

当然，在平面上并不是所有的度量都诱导平面上的标准拓扑. 由

$$d_V(p,q)=\begin{cases}1 & \text{若 } p_1\neq q_1 \text{ 或 } |p_2-q_2|\geqslant 1,\\ |p_2-q_2| & \text{若 } p_1=q_1 \text{ 且 } |p_2-q_2|<1\end{cases}$$

所定义的函数 d_V，是诱导平面上严格细于标准拓扑的一种拓扑的一种度量.（见练习 5.3 及 5.27.）

接下来我们来说明，应如何戏剧化地改变一种度量，并让它所诱导的拓扑不改变.

定义 5.17 *设 (X, d) 是一个度量空间. X 的一个子集 A 对于 d 来说是***有界的***，如果存在一个 $\mu>0$，使得对于所有的 $x, y\in X$，都有 $d(x, y)\leqslant\mu$. 如果 X 本身对于 d 来说是有界的，那么就称 d 是一种***有界度量**.

注意，与在 X 的一个集合上的有界度量一样，X 的每个子集本身也是有界的.

令人十分吃惊的是，一个度量是否有界，并不意味着它诱导的拓扑是否有界. 以下的定理证明了，每种拓扑都是由一种有界度量诱导的一种度量诱导而来的.

定理 5.18 *设 (X, d) 是一个度量空间. 并由 $d'(x, y)=\min\{d(x, y), 1\}$ 定义 $d'(x, y): X\times X\to\mathbf{R}$. 那么，$d'$ 是一种诱导与 d 同一拓扑的有界度量.*

证明 由于 d' 的值不能大于 1，立即就可得出 d' 是有界的. 但是，我们需要检验 d' 是一种度量. 显然，对于 X 中的所有 x, y，都有 $d'(x, y)\geqslant 0$. 我们还可看出，当且仅当 $d(x, y)=0$ 时，$d'(x, y)=0$. 前者恰好在 $x=y$ 时出现. 此外，$d'(x, y)=d'(y, x)$，这是由于，对于 d 成立同样的等式. 因此，我们除了三角不等式以外，证明已全部完成.

为了证明三角不等式，我们考虑 $x, y, z\in X$ 的 3 种情况. 首先设 $d(x, y)\geqslant 1$ 或 $d(y, z)\geqslant 1$. 于是得出 $d'(x, y)+d'(y, z)\geqslant 1$. 但

$d'(x, z)\leqslant 1$，所以，我们有 $d'(x, y)+d'(y, z)\geqslant d'(x, z)$. 另一方面，设 $d(x, y)<1$ 和 $d(y, z)<1$. 那么

$$d'(x,y)+d'(y,z)=d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z)\geqslant d'(x,z).$$

因此，d' 满足三角不等式.

以下我们用定理 5.15 来证明：分别由 d，d' 诱导的拓扑 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 是相同的. 首先我们证明 $\mathcal{T}$ 细于 $\mathcal{T}'$. 设任一 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$. 我们考虑 ε 的两种情况. 首先，如果 $\varepsilon\leqslant 1$，那么 $B_d(x, \varepsilon)\subset B_{d'}(x, \varepsilon)$. 然而，如果 $\varepsilon>1$，那么 $B_{d'}(x, \varepsilon)=X$，因而 $B_d(x, \varepsilon)\subset B_{d'}(x, \varepsilon)$ 显然成立. 无论哪种情况，

如果设 $\delta=\varepsilon$，那么我们都有 $B_d(x,\delta)\subset B_{d'}(x,\varepsilon)$. 于是得出$\mathcal{T}$细于$\mathcal{T}'$.

然后再来证明$\mathcal{T}'$细于$\mathcal{T}$. 再次取任一 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$. 如上所述，如果 $\varepsilon\leqslant 1$，那么 $B_d(x,\varepsilon)\subset B_{d'}(x,\varepsilon)$. 而如果 $\varepsilon>1$，那么 $B_{d'}(x,1)\subset B_d(x,\varepsilon)$. 于是，如果我们设 $\delta=\min\{\varepsilon,1\}$，那么对于任一 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$，$B_{d'}(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon)$ 恒成立. 所以$\mathcal{T}'$细于$\mathcal{T}$.

于是得出，由 d，d'诱导的拓扑$\mathcal{T}$与$\mathcal{T}'$是相同的. ■

例 5.10 如果我们用有界度量 $d'(x,y)=\min\{1,|x-y|\}$ 取代标准度量 $d(x,y)=|x-y|$，就再次得到标准拓扑. 但是，现在我们的基元素是长度至多为 2 的开区间和集合 $\mathbf{R}$ 本身. 我们之所以得到 $\mathbf{R}$ 是一个基元素，是由于对于所有的 $\gamma>1$ 及 $x\in\mathbf{R}$，都有 $B_{d'}(x,\gamma)=\mathbf{R}$.

在定理 5.18 中，对于把值 1 作为定义一个有界度量的分界值并没有什么重要关系，此有界度量把同一拓扑诱导为度量 d. 我们能把 d 削减为百万分之一，而得到的仍然是同一拓扑. 事实上，如果我们用以任意的 $\varepsilon>0$ 为界替代以 1 为界，定理 5.18 仍然成立. 在某种意义上，由度量诱导的拓扑，仅依赖于与此度量真正互相靠近在一起的究竟是什么.

接下来，我们定义度量等价的概念. 这个概念所指的是，两个度量空间是等价的，如果它们之间存在一个保持距离的双射. 特别地，我们有以下的定义：

定义 5.19 设 (X,d_X) 与 (Y,d_Y) 都是度量空间. 一个双射 $f: X\to Y$ 称为是**等距的**，如果对于 X 中每一对点 x，x'，有 $d_X(x,x')=d_Y(f(x),f(x'))$. 如果 $f: X\to Y$ 为等距，那么称度量空间 X 与 Y 是**等距的**.

按照这个定义，就完全可以用一个满射函数 f 来代替双射函数 f 了. 如果一个函数保持距离，那么 f 是一个单射. (见练习 5.30.) 所以，f 是满射且保持距离，就蕴涵 f 是一个双射. 我们在定义中用双射，是为了强调这一事实，即等距必须既是双射且保持距离.

正如同胚是拓扑空间之间的基本等价关系一样，等距是度量空间之间的基本等价关系. 一个已知度量空间的所有性质，为等距所拥有. 除了基的特定名称之外，两个等距的度量空间是不能区分的.

等距是比同胚更强的等价的形式. 特别地，等距空间是同胚的（见练习 5.31)，反之则不然，正如下例所指出的：

例 5.11 具有出租车度量 d_T 的平面，与具有标准度量 d 的平面是不等距的，尽管这两种度量诱导同一拓扑. 为了看出这一点，假设我们有一个等距 $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，使得对于所有的 p，$q\in\mathbf{R}^2$，都有 $d(f(p),f(q))=d_T(p,q)$. 考虑以下 4 点：$\alpha=(0,0)$，$\beta=(1,0)$，$\gamma=(0,1)$ 及$\delta=(1,1)$. 若采用出租车度量，如图 5.9 所示，$d_T(\alpha,\beta)=1$，$d_T(\alpha,\gamma)=1$，$d_T(\beta,\delta)=1$，$d_T(\gamma,\delta)=1$，$d_T(\alpha,\delta)=2$，$d_T(\beta,\gamma)=2$. 由于 f 是一个等距，按此标准度量我们必定

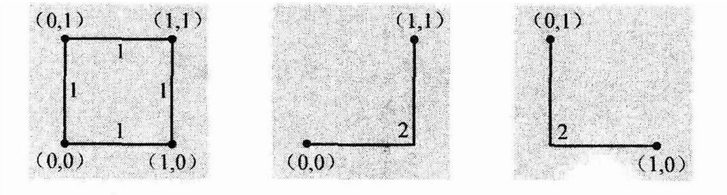


图 5.9 出租车度量点之间的距离

有$d(f(\alpha), f(\beta))=1$，$d(f(\alpha), f(\gamma))=1$ 与 $d(f(\beta), f(\gamma))=2$. 然而，以这种标准度量，这仅当 $f(\beta)$，$f(\gamma)$ 与 $f(\alpha)$ 位于一条直线上，而 $f(\alpha)$ 同 $f(\beta)$ 与 $f(\gamma)$ 等距离时才会出现. 类似地，$f(\beta)$，$f(\gamma)$ 与 $f(\delta)$ 位于一条直线上，而 $f(\delta)$ 同 $f(\beta)$ 与 $f(\gamma)$ 等距离. 因此 $f(\alpha)=f(\beta)$. 但这就与 f 是一个双射相矛盾，因而这样的等距不存在.

5.3 节练习

5.23 设 (X, d) 是一个度量空间. 且设 A 与 B 是 X 中的，在由 d 诱导的拓扑中是闭的分离集. 证明：存在分离开集 U，使得 $A\subset U$ 且 $B\subset U$.

5.24 **证明定理 5.13**：设 (X, d_X) 与 (Y, d_Y) 都是度量空间. 按开集的定义，函数 $f: X\to Y$ 是连续的，当且仅当对于每个 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得当 $x'\in X$ 且 $d_X(x, x')<\delta$ 时，有 $d_Y(f(x), f(x'))<\varepsilon$. (提示：考虑练习 4.3 及定理 4.6 的证明.)

5.25 设 (X, d) 是一个度量空间，且 $p\in X$ 及 $A\subset X$.

(1) 举例说明 $d\{\{p\}, A\}=0$ 未必蕴涵 $p\in A$.

(2) 证明：如果 A 是闭集，且 $d\{\{p\}, A\}=0$，则 $p\in A$.

5.26 用定理 5.15 证明：出租车度量和最大值度量诱导 $\mathbf{R}^2$ 上的同一拓扑.

5.27 考虑由

$$d_V(p,q)=\begin{cases}1 & \text{若 } p_1\neq q_1 \text{ 或 } |p_2-q_2|\geqslant 1, \\ |p_2-q_2| & \text{若 } p_1=q_1 \text{ 且 } |p_2-q_2|<1\end{cases}$$

定义的 $\mathbf{R}^2$ 上的度量 d_V.

(1) 用定理 5.15 证明：由 d_V 诱导的拓扑细于标准拓扑.

(2) 证明标准拓扑不细于由 d_V 诱导的拓扑.

5.28 设 (X, d) 是一个度量空间. 函数

$$D(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

是 X 上的有界度量. (见练习 5.10.) 证明：由 D 与 d 诱导的拓扑是相同的.

5.29 在连续函数的集合 $C[a, b]$ 上，考虑由

$$\rho_M(f,g)=\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\}$$

与 $\rho(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$ 所定义的 ρ_M 与 ρ. 这些度量在练习 5.8 与例 5.5 中已分别作过介绍.

(1) 用定理 5.15 证明：由 $C[a, b]$ 上 ρ_M 诱导的拓扑，细于由 ρ 诱导的拓扑.

(2) 证明：对于每个 c_1，c_2，存在 $f\in C[a, b]$，使得 $\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\}=c_1$，且

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=c_2.$$

(3) 设 $Z\in C[a, b]$ 由

$$Z(x)=0 \quad (\text{所有 } x\in[a, b])$$

定义. 给定 $\varepsilon>0$，证明不存在 $\delta>0$，使得 $B_\rho(Z, \delta)\subset B_{\rho_M}(Z, \varepsilon)$.

(提示：参考 (2).)

(4) 试问：定理 5.15 允许我们从 (3) 得到什么结论？

5.30 设 (X, d_X) 与 (Y, d_Y) 都是度量空间. 证明：如果 $f: X\to Y$ 使得对于所有的 x，$x'\in x$，有

$d_X(x, x')=d_Y(f(x), f(x'))$，那么 f 是一个单射.

5.31 设 (X, d_X) 与 (Y, d_Y) 都是度量空间，而 $f: X\to Y$ 是它们之间的等距. 证明 f 是相应度量空间之间的一个同胚.

5.32 证明：由

$$d_M(p,q)=\max\{|p_1-q_1|, |p_2-q_2|\}$$

所定义的 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值度量，与 $\mathbf{R}^2$ 上的标准度量不等距.

5.4 可度量化

许多拓扑空间并不是由一种度量诱导而来的. 例如，定理 5.12 蕴涵，一个非豪斯多夫空间不能由一种度量诱导而来. 但是当一种拓扑由一种度量诱导而来时，我们就会拥有可能很有用的附加的直观结构.

于是，给定了一个拓扑空间，我们就会对它是否能由一种度量诱导而来这样的问题感到兴趣了.

定义 5.20 *设 X 是一个拓扑空间. 我们称 X 是**可度量化**的，如果在 X 上存在诱导 X 上拓扑的一种度量.*

例 5.12 在例 3.4 中，我们引进了圆周 S^1 上的标准拓扑，它是传承自平面 $\mathbf{R}^2$ 上标准拓扑的子空间拓扑. S^1 上的这种拓扑可度量化吗？回答是肯定的. 首先，注意到，通过用平面上的 S^1 截割开球，就得到 S^1 上的这个子空间拓扑的一组基. 所得到的集合是沿着此圆周的开区间.

通过设定 $d(p, q)$ 为使得 p 与 q 重合，此圆周所需要旋转的最小非负角（以弧度计），考虑由它定义的 S^1 上的度量（见练习 5.4）. 采用这种度量所得到的开球，是此圆周上的开区间. 于是，对于由 d 诱导的 S^1 上的拓扑，开球的基，与刚才所描述的 S^1 上的标准拓扑的基是相同的. 因此得出，S^1 上的标准拓扑是可度量化的.

在以前的例子中，我们曾证明过，度量空间 $\mathbf{R}^2$ 的子空间本身是可度量化的. 这种说法通常是成立的. 如果 X 是一个度量空间，而 Y 是 X 的一个子集，那么 Y 上的子空间拓扑是可度量化的.（见练习 5.34.）

给定一个集合 X，X 上的离散拓扑是可度量化的.（见练习 5.33.）事实上，如果 X 是有限集，那么 X 上的每种度量诱导离散拓扑.（见练习 5.6.）

于是，在一个有限集上，离散拓扑是唯一可度量化的拓扑.

以下的定理指出，可度量化是一种拓扑性质.

定理 5.21 *如果 X 是一个可度量化的空间，而 Y 与 X 同胚，那么 Y 是可度量化的.*

证明 见练习 5.35. ■

许多拓扑空间是可度量化的，这已得到证实，而数学家们对此问题早就产生了兴趣，“对一个尚未明确找到一种度量的拓扑空间，是否就能确定它是可度量化的；也就是说，对此空间而言，是否存在一些条件确保它是可度量化的?”回答是肯定的. 著名的乌雷松度量化定理断言，如果两个简单的条件（空间是“正则”的，且有可数的基）得以满足，我们就能确保

空间是可度量化的. 在本节的结尾部分，我们讨论这一个结论. 正则性的拓扑性质，强于豪斯多夫性. 请回忆，一个拓扑空间是豪斯多夫空间，如果对于 X 中每对不同的点，存在一对分离的开集，每个各自包含其中的一点.

定义 5.22 设 X 是一个度量空间. 我们称 X 是**正则的**，如果

(1) 在 X 中的单点集是闭的；

(2) 对于任一 $a\in X$，和 X 中的任一不包含 a 的闭集 B，存在分离的开集 U 与 V，使得 $a\in U$ 且 $B\subset V$. (见图 5.10.)

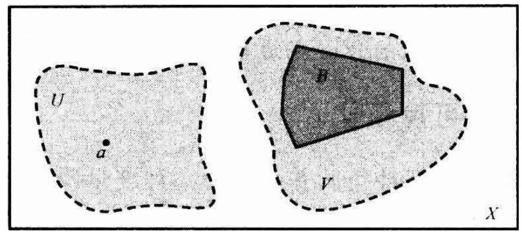


图 5.10 在一个正则空间中分离的一个点和一个闭集

例 5.13 具有标准拓扑的实轴 $\mathbf{R}$ 是正则的. 在 $\mathbf{R}$ 中，单点集是闭的. 选取一个点 $x\in\mathbf{R}$ 和一个不包含 x 的闭集 C. C 的补集是包含 x 的一个开集，因而它必定包含一个包含 x 的开区间 (a, b). 我们就有 $a<x<b$，所以可以选取 c，d，使得 $a<c<x<d<b$. 于是 $U=(-\infty, c)\cup(d, \infty)$ 是包含 C 的一个开集，而 $V=(c, d)$ 是包含 x 的一个开集. 而正如所希望的，U 与 V 是分离的.

把正则性定义中的条件 (1) 与 (2) 相结合就可直接证明，如果一个拓扑空间是正则的，那么它是豪斯多夫的. 然而，并不要求单点集是闭的，情况未必如此；特别地，可能存在一个仅满足定义 5.22 中条件 (2)，却不是豪斯多夫空间的拓扑空间. (见练习 5.42.)

只要拥有正则性就拥有豪斯多夫性，反之则不然. 在以下的例子中，我们引入一个拓扑空间，它是豪斯多夫空间但不是正则空间. 因此正则性是一种较强的性质.

例 5.14 在 $\mathbf{R}$ 上，考虑由所有开区间 (a, b) 及所有子集 $(c, d)\cap\mathbf{Q}$ 所组成的集族. 这是 $\mathbf{R}$ 上一个拓扑的一组基，而所形成的拓扑空间是豪斯多夫空间，但却不是正则空间. (见练习 5.37.)

具有正则性且具有豪斯多夫性的性质，称为**分离公理**. 存在另一个值得提到的分离公理，尽管它对乌雷松度量化定理不起什么作用.

定义 5.23 设 X 是一个度量空间. 我们称 X 是**正规的**，如果

(1) 在 X 中的单点集是闭的；

(2) 对于 X 中的任一对分离闭集 A 与 B，存在分离的开集 U 与 V，使得 $A\subset B$ 且 $B\subset V$. (见图 5.11.)

在标准拓扑中，$\mathbf{R}$ 不仅是正则的，而且还是正规的. 事实上，每个度量空间都是正规的. (见练习 5.23.) 此外，此定义的一个显而易见的结论是，每个正规的空间都是正则的.

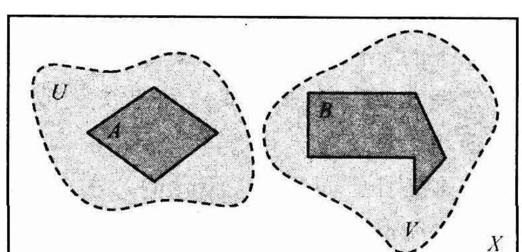


图 5.11 在一个正规空间中的两个分离闭集

乌雷松度量化定理中的第二个假定是，拓扑空间有一组可数的基. 请回忆，一个集是可数的，如果它既是有限的又可以与正整数一一对应.

例 5.15 具有标准拓扑的实轴 $\mathbf{R}$ 有一组可数的基. 考虑集族 $C=\{(a, b) \mid a, b\in \mathbf{Q}, a<b\}$. 它是区间的一个可数的集族，由于它是由 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 加标的一个可数集.（见定理 0.29.）用定理 1.13 可直接证明，C 是 $\mathbf{R}$ 上标准拓扑的一组基.

同样，$\mathbf{R}^n$ 上的标准拓扑，存在由所有具有有理端点之区间乘积的集族的一组可数基.

乌雷松（1898—1924）是他那个时代最有前途的数学家之一. 不幸的是，在 26 岁时，当他游泳时落入法国海岸波浪起伏的海中溺毙. 正是在 1924 年，他证明了由他冠名的以下定理：

定理 5.24(乌雷松度量化定理) 如果一个拓扑空间 X 是正则的，且有一组可数的基，那么 X 是可度量化的.

在此，我们不对乌雷松度量化定理作证明，这是由于它的证明需要我们尚未提供的工具. 乌雷松度量化定理的一个证明可以在 [Mun] 中找到. 然而，证明背后的想法是显而易见的. 利用 X 是正则的且有一组可数基的假定就可以证明，X 能嵌入一个度量空间之中. 因此，X 与一个度量空间的子空间同胚. 由于一个度量空间的子空间是可度量化的，又由于可度量性是一种拓扑性质，于是得出：X 是可度量化的.

例 5.16 Z 上的等差数列拓扑由所有形如

$$A_{a,b}=\{\cdots,a-2b,a-b,a,a+b,a+2b,\cdots\}$$

的等差数列所组成的基来定义，其中，$a, b\in\mathbf{Z}, b\neq 0$.（见练习 1.15.）这组基是可数的，由于它是由一个可数集，即 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 的一个子集来加标的一个集族. 此外，Z 上的此等差数列拓扑是正则的.（见练习 5.39.）

由于这是具有可数基的一个正则拓扑空间，它是可度量化的. 因此，必定存在诱导此拓扑的一种度量. 事实上，我们可以找到它. 由下式给出的 $\mathbf{Z}$ 上的度量

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{若 } x=y, \\ \min\left\{\dfrac{1}{n!}\,\middle|\,\dfrac{n!}{|x-y|}\right\} & \text{若 } x\neq y\end{cases}$$

就是诱导 $\mathbf{Z}$ 上的等差数列拓扑.（见练习 5.11 与 5.40.）

乌雷松度量化定理指出，每个具有可数基的拓扑空间是可度量化的. 反过来是否成立呢？换句话说，一个可度量化的空间必定有一组可数基而且一定是正则的吗？这个问题一半的回答是肯定的. 正如以上所指出的，一个度量空间是正规的，而一个正规空间是正则的，因而一个度量空间是正则的. 然而以下的例子说明，上述问题之另一半的回答却是否定的. 一个度量空间未必有一组可数的基.

例 5.17 具有离散拓扑的实轴 $\mathbf{R}$ 是可度量化的.（见练习 5.33.）由于此拓扑是离散的，因此每个单点集是一个开集. 这样的集合不可数，由于 $\mathbf{R}$ 是不可数的.

再为一个拓扑给定一组基，此拓扑中的每个开集必定是基元素的一个并. 于是就可得到，此离散拓扑的每组基，必定包含作为基元素的每个单点集. 因此，对于此离散拓扑的每组基，必定包含此不可数的单点集族. 所以，尽管具有此离散拓扑的 $\mathbf{R}$ 是一个可度量化的空间，但它却没有一组可数的基.

5.4 节练习

5.33 设 X 是一个集合.

(1) 证明 X 上的离散拓扑由度量

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & 若\ x=y,\\ 1 & 若\ x\neq y\end{cases}$$

诱导而来.

(2) 请问，X 上的平凡拓扑可度量化吗？

5.34 设 (X, d) 是一个度量空间，而 Y 是 X 的一个子集. 考虑由 $d_Y(x, y)=d(x, y)$ 定义的函数 $d_Y: Y\times Y\to\mathbf{R}$.

(1) 证明 d_Y 是 Y 上的一种度量.

(2) 证明由 Y 上的 d_Y 诱导的拓扑，是 Y 传承自 X 上度量拓扑的子空间拓扑.

5.35 设 (X, d) 是一个度量空间. 假定 $f: X\to Y$ 是一个同胚. 且由 $d^*(x, y)=d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$ 定义的 $d^*: Y\times Y\to\mathbf{R}$.（从本题的 (1)、(2) 得到定理 5.21.）

(1) 证明 d^* 是 Y 上的一种度量.

(2) 证明 Y 上的此拓扑由 d^* 诱导而来.

(3) 证明 f 是 (X, d) 与 (Y, d^*) 之间的一个等距.

5.36 证明具有下限拓扑的 $\mathbf{R}$，是一个正则的拓扑空间.

5.37 在 $\mathbf{R}$ 上，考虑由所有开区间 (a, b) 及所有子集 $(c, d)\cap\mathbf{Q}$ 所组成的集族 $\mathcal{B}$.

(1) 证明 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbf{R}$ 上一个拓扑的一组基.

(2) 证明 $\mathbf{R}$ 是此拓扑中的豪斯多夫空间.

(3) 证明 $\mathbf{R}$ 在此拓扑中不是正则空间.

5.38 证明：如果 X, Y 是正则的，那么，在积空间 $X\times Y$ 也是正则的. 由此可得到 $\mathbf{R}^n$ 是正则的结论.

5.39 证明 $\mathbf{Z}$ 上的等差数列拓扑是正则的.

5.40 证明 $\mathbf{Z}$ 上的等差数列拓扑是由度量

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & 若\ x=y,\\ \min\left\{\dfrac{1}{n!}\,\middle|\,\dfrac{n!}{|x-y|}\right\} & 若\ x\neq y\end{cases}$$

诱导而来.

5.41 证明：正则性与正规性是拓扑性质. 即证明，如果 X, Y 是正则的，而 Y 与 X 同胚，那么 Y 也是正则的（对正规性也同样如此）.

5.42 证明：具有平凡拓扑的两点空间 $x=\{x_1, x_2\}$，满足正则性定义中的第二个条件. 也就是要证明，对于 X 中任一点 a 和 X 中任一不包含 a 的闭集 B，存在分离的开集 U 与 V，使得 $a\in U$ 且 $B\subset V$.（请注意：由于在此拓扑空间中，单点集不是闭的，它既不是一个正则空间也不是豪斯多夫空间. 这就说明，如果我们希望一个正则拓扑空间是豪斯多夫空间，按照正则拓扑空间的定义，为什么仅有第二个条件是不够的.）

第6章

连　通　性

为了获得有关拓扑空间连通性的严格概念，我们有几条自然的途径. 一条途径可以表述为，一个拓扑空间是连通的，如果它不能分解为彼此分离的两部分. 另一条途径可以表述为，一个拓扑空间是连通的，如果在此空间中可以通过连续的道路，从任何点达到另一点. 在本章中，我们将定义这两种类型的连通性. 第一种类型的空间称为连通的，而第二种类型的空间称为道路连通的. 我们证明这两种类型的空间不相同，但道路连通性蕴涵连通性.

连通性的概念看起来似乎简单，但对拓扑学及其应用却有深刻的意义. 我们证明，连通性是导致介值定理的关键概念. 此外，我们还将论述连通性如何应用于地理信息系统、种群建模和机器人运动学设计. 进而让连通性来帮助对拓扑空间加以区分. 在6.1节中，我们首先定义连通性并考察它的某些方面. 在6.2节，我们证明欧氏空间是连通的，然后用与连通性有关的性质来区分某些对拓扑空间. 在6.3节中，我们证明介值定理，然后用它推出数学和应用方面几个有趣的结论. 在6.4节中，我们证明道路连通性蕴涵连通性，我们还引入一个空间，即拓扑学家的漩涡，它是连通的，但却不是道路连通的，从而确认连通性与道路连通性不是等价的. 最后，在6.5节中，我们探索这些概念在运动机器人的运动学设计上的一个应用.

6.1 建立连通性的第一种途径

本章引言中已描述了有关连通性的第一条直觉途径，我们首先给出一个定义.

定义 6.1 设 X 是一个拓扑空间.

(1) 我们称 X 是**连通**的，如果不存在其并为 X 的一对分离的非空开集.

(2) 我们称 X 是**不连通**的，如果 X 不是连通的.

(3) 如果 X 是不连通的，那么，其并为 X 的一对分离的非空开集称为 X 的**分隔**.

例 6.1 考虑在图6.1中的3点集 $X=\{a, b, c\}$ 上的两个拓扑. 在第一个拓扑中，X 是连通的，由于不存在其并等于 X 的一对分离非空开集. 然而，在第二个拓扑中，X 是不连通的，一对开集 $U=\{a, b\}$ 及 $V=\{c\}$ 是 X 的一个分隔.

例 6.2 $\mathbf{R}$ 的子空间 $X=(-1, 0)\cup(0, 1)$ 是不连通的. 一对集合 $(-1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 是 X 的一个分隔.（见图6.2.）

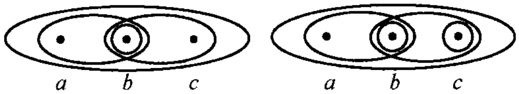


图 6.1　$X=\{a, b, c\}$ 上的两个拓扑，一个连通另一个不连通

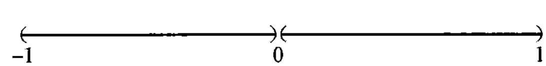


图 6.2　$X=(-1, 0)\cup(0, 1)$ 是不连通的

例 6.3 如果集合 X 由多于一个点所组成，而且有离散拓扑，那么就是不连通的. 如果 A 是 X 的任何非空真子集，那么一对集合 A 与 $X-A$，是 X 的一个分隔.

例 6.4 具有平凡拓扑的集合 X，是一个连通的拓扑空间. X 的分隔不存在，由于 X 没有开的非空真子集.

例 6.5 如果 $p\in\mathbf{R}$ 那么 $\mathbf{R}-\{p\}$ 是一个不连通的拓扑空间，由于一对集合 $U=\{-\infty, p\}$ 及 $V=\{p, \infty\}$ 是 $\mathbf{R}-\{p\}$ 的一个分隔.（见图 6.3.）

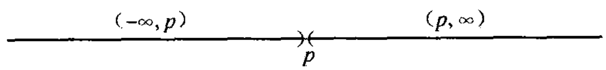


图 6.3 $R-\{p\}$ 是不连通的

下列结论提供了有关连通性的一种可供选择的表述方式：

定理 6.2 一个拓扑空间 X 是连通的，当且仅当 X 没有既开又闭的非空真子集.

证明 见练习 6.2. ■

在任一拓扑空间 X 中，集合 X 和 $\varnothing$ 是既开又闭的. 于是，定理 6.2 表明，X 是连通的，当且仅当在 X 中只有既开又闭的集合.

例 6.6 在具有下限拓扑的 $\mathbf{R}$ 中，区间 $[a, b)$ 是既开又闭的. 因此，定理 6.2 蕴涵，$\mathbf{R}$ 在这种拓扑中是不连通的.

我们对连通性的定义适用于拓扑空间. 但我们可以用一种自然的方式把它推广到一个拓扑空间的子集合.

定义 6.3 包含于一个拓扑空间 X 的集合 A，称为在 X 中是**连通的**，如果 A 在此子空间拓扑中是连通的. 如果 A 在 X 中是不连通的，我们称它在 X 中**不连通**.

例 6.7 由 $A=(-1, 0)\cup(0, 1)$ 所给出的 $\mathbf{R}$ 的子空间是不连通的. 集合 $(-1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 构成 A 的一个分隔. 因此 A 与 X 不连通.

下列定理形成一个拓扑空间中的不连通集合的一种可供选择的特征.

定理 6.4 集合 A 与 X 不连通，当且仅当在 X 中存在开集 U，V，使得 $A\subset U\cup V$，$U\cap A\neq\varnothing$，$V\cap A\neq\varnothing$，$U\cap V\cap A=\varnothing$.

证明 设 A 与 X 是不连通的. 那么存在作为 A 中既分离又是开集的非空集合 P，Q，使得 $P\cup Q=A$. 由于在 A 中 P，Q 是开集，因此存在作为 X 中开集的 U，V，使得 $U\cap A=P$，且 $V\cap A=Q$. 显然成立 $A\subset U\cup V$，$U\cap A\neq\varnothing$，$V\cap A\neq\varnothing$ 且 $U\cap V\cap A=\varnothing$.

再设 U，V 在 X 中为开集，使得 $A\subset U\cup V$，$U\cap A\neq\varnothing$，$V\cap A\neq\varnothing$ 且 $U\cap V\cap A=\varnothing$. 如果我们设 $P=U\cap A$ 且 $Q=V\cap A$，就可得出在此子空间拓扑中，这一对集合 P，Q 是 A 的一个分隔，因而 A 与 X 是不连通的. ■

在定理 6.4 中，诸如 U 与 V 的集合，为我们提供了分隔的另一种概念如下：

定义 6.5 A 是拓扑空间 X 的一个子空间. 若 U 与 V 是使得 $A\subset U\cup V$，$U\cap A\neq\varnothing$，$V\cap A\neq\varnothing$ 且 $U\cap V\cap A=\varnothing$ 的，X 中的开集，那么，就称此对集合 U 与 V 是**在 $\mathbf{X}$ 中 $\mathbf{A}$ 的一个分隔**.（见图 6.4.）

重要注记 为使 U 与 V 是在 X 中 A 的一个分隔，我们并不需要 $U\cap V$ 是空集，仅需要

$U\cap V$与 A 相分离.

例 6.8 设如图 6.5 所示的 A 是平面上由两条曲线 $y=e^x$ 与 $y=0$ 所组成的子集. A 连通吗? 回答是, A 不连通. 我们可以通过设 U 与 V 分别是在在此图中以虚线表示的曲线 $y=e^{x-1}$ 两侧的点集, 来构成 A 在此平面中 A 的一个分隔. 于是 A 在此平面中是不连通的.

在此平面中的另一个分隔由 U'与 V'给出, 前者是曲线 $y=e^x$ 以下的点集, 后者是 x 轴以上的点集. 请注意, U'与 V'是不分离的, 但它们仍然构成 A 在此平面中 A 的一个分隔, 由于它们的交集是与 A 相分离的.

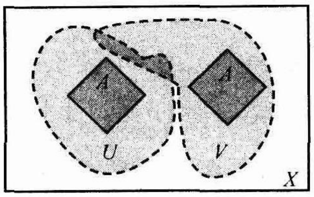


图 6.4 U 与 V 构成 X 中 A 的一个分隔

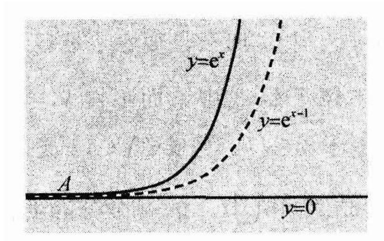


图 6.5 集合 A 是不连通的

显然, 连通性是一种拓扑性质, 这是由于它仅根据开集来定义. 可以直接证明, 如果 X 与 Y 同胚, 那么 X 是连通的, 当且仅当 Y 是连通的. 然而, 正如下一定理所指出的, 我们为了拥有连通性, 并不需要同胚的全部含义:

定理 6.6 如果 X 是连通的, 且 $f: X\to Y$ 是连续的, 那么, $f(X)$ 在 Y 中是连通的.

证明 设 $f(X)$ 在 Y 中不连通. 那么就存在构成 Y 中 $f(X)$ 一个分隔的开集 U 与 V. 由于 f 是连续的, 因而 $f^{-1}(U)$ 与 $f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集. $f^{-1}(U)$ 与 $f^{-1}(V)$ 与 $f(X)$ 有非空的交集; 于是, $f^{-1}(U)$ 与 $f^{-1}(V)$ 是非空集. 此外, $f(X)\subset U\cup V$, 蕴涵 $X\subset f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$. 最后由于 $U\cap V\cap f(X)=\varnothing$, 就可得出 $f^{-1}(U)$ 与 $f^{-1}(V)$ 是分离的. 因此, 这对集合 $f^{-1}(U)$ 与 $f^{-1}(V)$ 是 X 的一个分隔, 这就与 X 是连通的假定相矛盾. 所以, $f(X)$ 在 Y 中是连通的. ■

以下的引理对我们在本章中的许多证明都是很有用的:

引理 6.7 设 C 与 D 是拓扑空间 X 的子集. 假定 C 是连通的且 $C\subset D$. 还假定 U 与 V 构成 X 中 D 的一个分隔. 那么, 要么 $C\subset U$, 要么 $C\subset V$.

证明 设既不成立 $C\subset U$, 也不成立 $C\subset V$. 那么, $U\cap C\neq\varnothing$且 $V\cap C\neq\varnothing$. 于是得出, U 与 V 构成 X 中 C 的一个分隔, 这与 C 是连通的假定相矛盾. ■

以下的定理表明, 如果 C 在 X 中是连通的, 而且我们还给 C 添加极限点, 那么所得到的集合在 X 中也是连通的.

定理 6.8 设 C 在 X 中是连通的, 并设 $C\subset A\subset \mathrm{Cl}(C)$. 那么, A 在 X 中是连通的.

证明 设 A 在 X 中不连通, 并设 U 与 V 构成 X 中 A 的一个分隔. 那么由引理 6.7, 要么 $C\subset U$, 要么 $C\subset V$. 不失一般性, 我们可以假定 $C\subset U$. 因此, $C\cap V=\varnothing$. 但是, 由于 U 与 V 构成 X 中 A 的一个分隔, 于是得到 $A\cap V\neq\varnothing$. 取 $x\in A\cap V$. 于是, $x\in A$ 且 $A\subset \mathrm{Cl}(C)$ 蕴涵 $x\in \mathrm{Cl}(C)$. 但 X 中的一个开集 $x\in V$ 是与 C 分离的. 因此, x 不可能在 C 的闭包之中, 这就产生了矛盾. 因此, A 在 X 中是连通的. ■

一个拓扑空间的连通子集的并，未必是连通的．例如，$A=\{0\}$ 与 $B=\{1\}$ 在具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 中是连通的集合，但 $A\cup B$ 在 $\mathbf{R}$ 中却是不连通的．然而，正如以下定理所指出的，如果在一个拓扑空间中连通子集族中的一些集合，至少有一个公共点，那么就能确保这些子集的并是连通的：

定理 6.9　设 X 是一个拓扑空间，并设 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的，使得 $\bigcap_{\alpha\in A}C_\alpha\neq\varnothing$ 的一个连通子集族．那么，$\bigcup_{\alpha\in A}C_\alpha$ 在 X 中是连通的．

证明　设 $\bigcup_{\alpha\in A}C_\alpha$ 在 X 中是不连通的．于是，存在构成 X 中 $\bigcup_{\alpha\in A}C_\alpha$ 一个分隔的集合 U 与 V．设 X 在 $\bigcup_{\alpha\in A}C_\alpha$ 中．那么，要么 $x\in U$，要么 $x\in V$，但二者不能都成立．不失一般性，我们可以假定，x 位于 U 之中，而不在 V 之中．引理 6.7 蕴涵，对于任一 $\alpha\in A$，要么 $C_\alpha\subset U$，要么 $C_\alpha\subset V$．由于 $x\in U$，且 $x\notin V$，于是可得，对于任一 $\alpha\in A$，$C_\alpha\subset U$．于是，$\bigcup_{\alpha\in A}C_\alpha\subset U$，这与 U 与 V 构成 X 中 $\bigcup_{\alpha\in A}C_\alpha$ 的一个分隔的假定相矛盾．所以，$\bigcup_{\alpha\in A}C_\alpha$ 在 X 中是连通的．■

尽管定理 6.9 是有关连通空间的并的结论，但我们还可以用它来证明，连通空间的乘积是连通的．这在以下的定理中付诸实施．

定理 6.10　设 X_1，…，X_n 是连通空间．那么，乘积 $X_1\times\cdots\times X_n$ 是连通的．

证明　我们证明有关两个空间乘积的结论．于是，一般的结论就可以由归纳法得到证明．设 X，Y 是连通的拓扑空间．我们来证明 $X\times Y$ 是连通的．首先，注意到，对于任一 $x\in X$，$X\times Y$ 的子空间 $\{x\}\times Y$ 与 Y 同胚，因此是连通的．同样，对于任一 $y\in X$，$X\times Y$ 的子空间 $X\times\{y\}$ 是连通的．于是由定理 6.9，对于任一 $x\in X$ 及 $y\in X$，集合 $(\{x\}\times Y)\cup(X\times\{y\})$ 在 $X\times Y$ 中是连通的．（见图 6.6.）

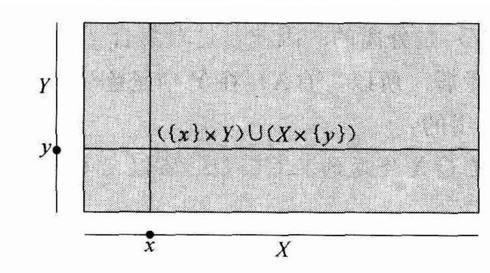


图 6.6　$(\{x\}\times Y)\cup(X\times\{y\})$ 在 $X\times Y$ 中是连通的

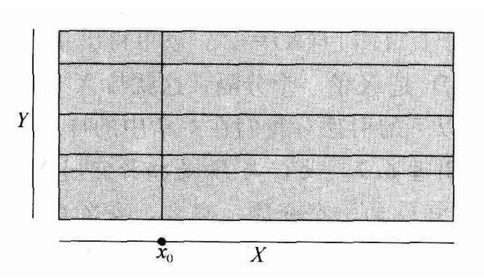


图 6.7　当 y 取遍 Y 时，乘积 $X\times Y$ 是子空间 $(\{x_0\}\times Y)\cup(X\times\{y\})$ 的并

再固定 $x_0\in X$，并让 y 改变．任一集合 $(\{x_0\}\times Y)\cup(X\times\{y\})$ 包含集合 $\{x_0\}\times Y$．于是，由定理 6.9 可得出，

$$\bigcup_{y\in Y}(\{x_0\}\times Y)\cup(X\times\{y\})$$

在 $X\times Y$ 中是连通的．此外，$\bigcup_{y\in Y}(\{x_0\}\times Y)\cup(X\times\{y\})=X\times Y$ 蕴涵 $X\times Y$ 是连通的．（见图 6.7.）■

一个拓扑空间，当然可以分拆成由它的最大连通子集所组成的一个集族．我们将此理念

严格地阐述于下.

设 X 是一个拓扑空间. 在 X 上用 $x\sim cy$ 来定义一个关系 $\sim c$，如果 x 与 y 在 X 的连通子集之中. 我们断言，$\sim c$ 是一种等价关系. 显然，对任一 $x\in X$，$x\sim cx$；而对任一 x，$y\in X$，$x\sim cy$ 蕴涵 $y\sim cx$. 设在 X 中的 x，y，z，有 $x\sim cy$ 和 $y\sim cz$，那么 x 与 y 在 X 的一个连通子集 C 之中，而 y 与 z 在 X 的连通子集 C' 之中. C 与 C' 都包含点 y. 由定理 6.9，$C\cup C'$ 是连通的. 由于 x，z 在 $C\cup C'$ 之中，于是可得到 $x\sim cz$. 于是，对任一 x，y，$z\in X$，如果 $x\sim cy$ 且 $y\sim cz$ 那么 $x\sim cz$. 因此，$\sim c$ 是一种等价关系.

定义 6.11 设 X 是一个拓扑空间，并设 $\sim c$ 是 X 上由 $x\sim cy$ 来定义的一种等价关系，如果 x 与 y 在 X 的一个连通子集之中. X 的分支是此等价关系的等价类.

由于一个拓扑空间的分支，是在一个等价关系下的等价类，它们构成 X 的一个分隔. 根据下一个定理的前两部分，此分支是 X 的极大连通子集.

定理 6.12 设 X 是一个拓扑空间.

(1) X 的任一分支在 X 中是连通的.

(2) 若 A 在 X 中是连通的，那么 A 是 X 的分支的一个子集.

(3) X 的任一分支在 X 中是 X 的一个闭子集.

我们在此证明 (1)，(2) 与 (3) 的证明见练习 6.9.

(1) 的证明 设 X 是一个拓扑空间，而 C 是 X 的一个分支. 我们来证明 C 是连通的. 取一个点 $p\in C$. 对于任一 $x\in C$，成立 $x\sim cp$，这是由于 C 是在确定此分支的等价关系 $\sim c$ 下的一个等价类. 因此，由 $\sim c$ 的定义，存在一个包含 x 与 p 的连通集 C_x.

我们断言，$C_x\subset C$. 为了证明此论断，设 $y\in C_x$. 那么 y 与 p 都在此连通集 C_x 之中，蕴涵 $y\sim cp$. 因此，y 与 p 属于同一等价类，即都在 C 之中，于是得到 $C_x\subset C$.

再由并引理，我们有 $\bigcup_{x\in C} C_x=C$. 因此，C 是此连通集 C_x 的并，而每个这样的连通集，都包含点 p. 由定理 6.9 可得 C 是连通的. ■

例 6.9 考虑具有有限补拓扑的 $\mathbf{R}$. 它是一个连通的拓扑空间. (见练习 6.1.) 因此，在这种拓扑中，存在仅有的一个分支，即整个空间 $\mathbf{R}$.

例 6.10 考虑具有下限拓扑的实轴 $\mathbf{R}$. 在这里，我们出现了与例 6.9 非常不同的情况. 我们断言，此分支是 $\mathbf{R}$ 的单点子集. 为了证明这一结论，我们要说明，如果 $\mathbf{R}$ 的一个子集由多于一个点所组成，那么它是不连通的. 于是，设 A 是 $\mathbf{R}$ 的包含两个点 $x<y$ 的一个子集. 选取 z，使得 $x<z<y$. 一对集合 $\{-\infty, z\}$ 及 $V=\{z, \infty\}$ 是具有下限拓扑的 $\mathbf{R}$ 中 A 的一个分隔，因而 A 是不连通的. 于是在此拓扑中，$\mathbf{R}$ 的唯一非空连通的子集是单点集，由此得出它们是分支.

定义 6.13 一个拓扑空间 X 称为**完全不连通**的，如果 X 的分支是 X 的单点子集.

由例 6.10，具有下限拓扑的 $\mathbf{R}$ 是完全不连通的. 另一个完全不连通的拓扑空间，是在标准拓扑中的有理数的集合 $\mathbf{Q}$. (见练习 6.7.)

以下的定理指出，同胚把分支映射到分支.

定理 6.14 设 f：$X\to Y$ 是一个同胚. 如果 C 是 X 的一个分支，那么 $f(C)$ 是 Y 的一个

分支.

证明 设 f：$X \to Y$ 是一个同胚，而 C 是 X 的一个分支．于是由定理 6.12，C 在 X 中是连通的．因此定理 6.6 蕴涵，$f(C)$ 在 Y 中是连通的．再次利用定理 6.12，就可得 $f(C)$ 是 Y 的分支 D 的一个子集．我们断定 $f(C)=D$．本定理的证明得以完成．

分支 D 在 Y 中是连通的，而 f^{-1} 是一个连续函数，因此 $f^{-1}(D)$ 在 X 中是连通的．此外，$f(C)\subset D$ 蕴涵 $C\subset f^{-1}(D)$．但 C 是 X 的一个分支，C 又是连通集 $f^{-1}(D)$ 的一个子集，所以 $C=f^{-1}(D)$．因此 $f(C)=D$，这正是我们所要证明的． ■

6.1 节练习

6.1 证明：具有有限补拓扑的一个无限集，是一个连通的拓扑空间.

6.2 **证明定理 6.2**：一个拓扑空间 X 是连通的，当且仅当 X 没有既开又闭的非空真子集.

6.3 证明：一个拓扑空间 X 是连通的，当且仅当 X 的非空真子集有一个非空边界.

6.4 (1) 证明：对于所有整数 $n\geqslant 0$，集合 $\{-n, -n+1, \cdots, n-1, n\}$ 在此数字轴上是连通的.

(2) 用 (1) 证明：数字轴是连通的.

6.5 借助由基 $\mathcal{B}=\{(-a, a)\mid a\in \mathbf{R}\}$ 所生成的拓扑，证明 $\mathbf{R}$ 是连通的.

6.6 设 X 是一个集合，并设 $p\in X$．证明：X 的任一子集在 X 上的特殊点拓扑 PPX_p 和 X 上的例外点拓扑 EPX_p 中是连通的.（见练习 1.7 与 1.8.）

6.7 (1) 证明：如果一个拓扑空间 X 有离散拓扑，那么 X 是完全不连通的.

(2) 设 $\mathbf{Q}$ 是具有标准拓扑的有理数集合．证明 $\mathbf{Q}$ 是完全不连通的.（本题及例 6.10 论证了，(1) 中结论的逆命题不成立．在这两种情况，空间完全不连通，但没有离散拓扑.）

6.8 设 X 是一个拓扑空间．而 $\{A_j\}_{j\in \mathbf{Z}^+}$ 是对于任一 $j\geqslant 1$，使得 $A_j\cap A_{j+1}\neq\varnothing$ 成立的，X 的一个连通子集族．证明：在 X 中，$\bigcup\limits_{j\in \mathbf{Z}^+} A_j$ 是连通的.

6.9 **证明定理 6.12 的第 (2)、(3) 部分**：设 X 是一个拓扑空间.

(1) 若 A 在 X 中是连通的，那么 A 是 X 的分支的一个子集.

(2) 在 X 中，X 的任一分支是 X 的一个闭子集.

(3) 举一个例子说明，X 的分支未必是 X 的开子集.

6.10 下列例子说明，在定义 X 中 A 的一个分隔时，条件 $U\cap V\cap A=\varnothing$ 是适当的，而如果要求 $U\cap V=\varnothing$，则此条件似乎就太强了.

(1) 寻找在 $X=\{a, b, c\}$ 上的一个拓扑和一个不连通子集 A 的例子，使得每一对集合 U 与 V，是 X 中满足 $U\cap V\cap(X-A)\neq\varnothing$ 的 A 的一个分隔.

(2) 寻找在 $\mathbf{R}$ 上一个拓扑和一个不连通子集 A，使得每一对集合 U 与 V，是 $\mathbf{R}$ 中满足 $U\cap V\cap(\mathbf{R}-A)\neq\varnothing$ 的，A 的一个分隔.

补充练习：重访地理信息系统 (GIS)

在以下的练习中，我们继续研究 2.4 节中所介绍过的交值及其在地理信息系统中的应用．回忆起来，在这些应用中，我们对正则闭可平面化的集最感兴趣，它的内部不是两个分离非空开集的并．由于我们有连通性的概念可用，现在就可以用更精确的方式，来定义这些重要的集合了．此外，我们在此处理的，是比 2.4 节中所介绍的可平面化的空间区域更一般的集族．特别地，我们不要求这些集合是 $\mathbf{R}^2$ 的子集.

定义 6.15 给定一个拓扑空间 X，X 中一个**空间区域** A 是 X 的有连通内部的一个非空、正则且闭的真子集.

SE6.11 设 X 是一个拓扑空间. 证明：如果 A 是 X 的一个真子集，而且 A 是一个非空、连通开集的闭包，那么 A 是 X 的一个空间区域.（注：A 的内部未必是此问题陈述中所指的开集，但是可以证明，A 的内部是连通的，这可由 A 是连通开集的闭包这一事实推出.）

请回忆 2.4 节中所给出的交值的定义. 由于空间区域是正则闭集，推论 2.19 适用，这就可得出，对于一对空间区域来说，交值 (1, 0, 1, 0)，(0, 0, 1, 0)，(1, 0, 0, 1)，(0, 0, 0, 1)，(1, 0, 1, 1) 和 (0, 0, 1, 1) 是不可能的. 以下的练习排除了空间区域更多出现的可能交值，只要假定在一个连通的拓扑空间中. 我们有两个空间区域. 由于平面是连通的（见推论 6.18），因而此练习确认了定理 2.21 中的论断，对于一对可平面化的空间区域来说，仅有的交值是 (1, 1, 1, 0)，(0, 1, 1, 0)，(1, 1, 0, 1)，(0, 1, 0, 1)，(1, 1, 0, 0)，(0, 0, 0, 0)，(1, 0, 0, 0)，(0, 1, 1, 1) 和 (1, 1, 1, 1).

SE6.12 设 X 是一个连通的拓扑空间，并假定 A 与 B 是 X 中的空间区域. 那么，在 X 中 A 与 B 的交值不能等于 (0, 1, 0, 0).（提示：证明 $A\cap B$ 是一个既开又闭的非空集，于是定理 6.2 适用.）

再来考虑定理 2.21. 我们关注在练习 2.30 和补充练习 6.12 的证明中的那些部分. 定理 2.21 的其余部分，可通过证明以下结论得到：如果在一个连通拓扑空间中，空间区域 A 与 B 的交值与右表中左栏所列的相同，那么 A 与 B 之间的关系，与右栏中所列的对应栏目相同. 在随后的练习中再给出这些结论.

交值	关系
(1, 1, 1, 0)	$A\subset B$
(0, 1, 1, 0)	$A\subset \mathrm{Int}(B)$
(1, 1, 0, 1)	$B\subset A$
(0, 1, 0, 1)	$B\subset \mathrm{Int}(A)$
(1, 1, 0, 0)	$A=B$

以下的引理很有用：

引理 6.16 *设 X 是一个拓扑空间. 假定 C，$D\subset X$，且 C 是连通的. 如果 $C\cap\partial D=\varnothing$，那么要么 $C\subset\mathrm{Int}(D)$，要么 $C\cap\mathrm{Cl}(D)=\varnothing$.*

SE6.13 **证明引理 6.16.**

以下 3 个练习关注的是上表中的第 1、2、5 行. 引理 6.16 会提供某些帮助. 而第 3、4 行的证明与第 1、2 行的证明相类似.

SE6.14 设 A 与 B 是拓扑空间 X 中的一个空间区域. 证明：如果在 X 中 A 与 B 的交值为 (1, 1, 1, 0)，那么 $A\subset B$.

SE6.15 设 A 与 B 是拓扑空间 X 中的一个空间区域. 证明：如果在 X 中 A 与 B 的交值为 (0, 1, 1, 0)，那么 $A\subset\mathrm{Int}(B)$.

SE6.16 设 A 与 B 是拓扑空间 X 中的一个空间区域. 证明：如果在 X 中 A 与 B 的交值为 (1, 1, 0, 0)，那么 $A=B$.

6.2 用连通性区分拓扑空间

在本节，我们证明在标准拓扑中，n 维欧氏空间是一个连通的拓扑空间. 我们首先证明，在标准拓扑中实轴是连通的. 随后由定理 6.10 得出对于 $\mathbf{R}^n$ 的一般结果. 我们还要说明，连通性为何能用以帮助对拓扑空间加以区分（也就是说，确定特定的相互不同胚的一对拓扑空间）.

为了证明实轴是连通的，我们利用实数系统的下述性质：

(1) 上确界性质：$\mathbf{R}$ 的任一子集以一个上确界为上界.

(2) 如果 x，$y\in\mathbf{R}$，且 $x<y$，那么存在 z，使得 $x<z<y$.

定理 6.17 *在标准拓扑中，实轴是连通的拓扑空间.*

证明 如果实轴是不连通的. 设 U 与 V 构成 $\mathbf{R}$ 的一个分隔. 取 $u\in U$ 及 $v\in V$. 不失一般

性，我们可以假定 $u<v$. 设 $U'=U\cap[u, v]$，$V'=V\cap[u, v]$.（见图 6.8.）于是得出 $U'\cup V'=[u, v]$. 由于 U'（关于 v）有上界，因此 U' 有上确界，把它称为 c. 我们有 $u\leqslant c\leqslant v$. 以下通过证明 $c\notin U'$ 及 $c\notin V'$ 来推出矛盾.

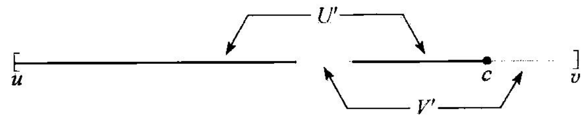


图 6.8　$[u, v]$ 中的集合 U' 与 V'

为了证明 $c\notin V'$，我们假定 $c\in V'$，然后来推出矛盾. 由于 $u\notin V'$，而 V' 在 $[u, v]$ 中是开集，于是得出，存在 d，使得 $u<d<c$ 且 $(d, c]\subset V'$. 这就蕴涵 d 是 U' 的一个上界，且 d 小于上确界 c. 这就产生了一个矛盾，因而 $c\notin V'$.

我们再来证明 $c\notin U'$. 同样通过推出矛盾来加以证明. 因此假设 $c\in U'$. 由于 U' 在 $[u, v]$ 中是开集，且 $v\notin U'$，所以存在 d，使得 $[c, d)\subset U'$. 对于任一 $e\in(c, d)$，可得 $e\in U'$，且 $e>c$，这与 c 是 U' 的一个上确界的事实相矛盾. 所以 $c\notin U'$.

因此 $c\notin V'$ 且 $c\notin U'$. 但是 $c\in[u, v]$，且 $U'\cup V'=[u, v]$. 由最后的这一矛盾可得出，在标准拓扑中，$\mathbf{R}$ 是一个连通的拓扑空间. ■

定理 6.10 和 6.17 蕴涵下列推论：

推论 6.18　*n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 是一个连通的拓扑空间.*

例 6.11　$\mathbf{R}$ 的所有区间子集在 $\mathbf{R}$ 中是连通的. 为什么呢？开区间 (a, b)，$(-\infty, b)$ 与 (a, ∞) 是连通的，原因是它们与 $\mathbf{R}$ 同胚. 于是定理 6.8 蕴涵，$\mathbf{R}$ 的所有其他区间子集在 $\mathbf{R}$ 中是连通的，由于它们可通过对开区间添加极限点而得到.

例 6.12　n 维球 S^n 是一个连通的拓扑空间. 我们对球 S^2 来证明此结论，而用一个类似的方法可得出 S^n 是连通的证明.

在例 4.16 中所介绍的球极平面射影函数，是 $\mathbf{R}^2$ 与 S^2 的由挖去北极 N 而得到的子空间 $S^2-\{N\}$ 之间的一个同胚. 由于 $\mathbf{R}^2$ 是连通的，因此 $S^2-\{N\}$ 同样如此. 于是由定理 6.8，在 $\mathbf{R}^2$ 中 $S^2-\{N\}$ 的闭包同样是连通的. 当然此闭包就是整个空间 S^2，因而球 S^2 是一个连通的拓扑空间.

例 6.13　由于区间 $I=[0, 1]$ 是连通的，因此正方形 $I\times I$ 也是连通的. 圆环、默比乌斯带、克莱因瓶、球面和射影平面，全都是通过把一个正方形的对边粘合而得到，或全都与此空间同胚（见图 6.9）. 所以，存在从这个正方形到每一个这样的空间的商映射，而这些都是具有连通定义域的连续函数. 于是得出，每一个这样的空间是连通的.

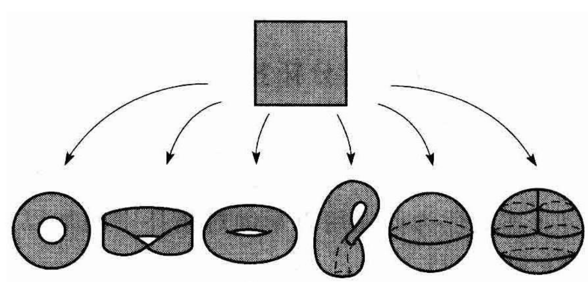


图 6.9　正方形的商空间是连通的

例 6.14　拓扑空间 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 称为**有孔平面**（其中 $O=(0, 0)$ 是此平面的原点）. 我们来证明它是连通的. 每个半开平面 $H_+=\{(x, y)\mid y>0\}$ 和 $H_-=\{(x, y)\mid y<0\}$ 都与 $\mathbf{R}^2$ 同胚（见练习 4.14）. 因而 H_+ 和 H_- 在 $\mathbf{R}^2$ 中都是连通的. 由定理 6.8，我们可以在每一个中添加极限点，并保持它们是连通的事实. 所以，对于 H_+ 和 H_- 来说，都可添加整个 x 轴，而原

点除外. 所得到的集合在 $\mathbf{R}^2$ 中也是连通的. 由于所得到的集合有交集, 它们的并也是连通的, 而它们的并正是 $\mathbf{R}^2-\{O\}$.

注意, 如果 p 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个点, 那么 $\mathbf{R}^2-\{p\}$ 是连通的, 这是由于 $\mathbf{R}^2-\{p\}$ 与 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 同胚.

于是, 我们就有连通的拓扑空间的一个集族, 我们来论述, 连通性如何能用于对一些拓扑空间加以区分. 一条直线既不是一个圆周也不是一个平面, 又不是一个球面. 我们如何能加以证明呢? 我们将会看到连通性所提供的帮助.

正如我们在例 6.5 中所指出的, 从实轴挖去一个点, 将得到一个不连通的拓扑空间. 这是一个十分重要的概念, 为此我们提供一个特别的定义:

定义 6.19 设 X 是一个连通的拓扑空间. X 的**割集**是 X 的一个子集 S, 使得 $X-S$ 不连通. X 的**割点**是点 $p\in X$, 使得 $\{p\}$ 是 X 的一个割集. X 的割集或割点称为**分割 X**.

例 6.15 平面 $\mathbf{R}^2$ 是连通的. 如果我们挖去圆周 S^1 的话, 就留下如图 6.10 所示的两个分离的非空开集. 因此, $\mathbf{R}^2-S^1$ 是不连通的, 蕴涵 S^1 是此平面的一个割集.

事实上, 拓扑学的一个经典定理——若尔当曲线定理断言, 在平面上的每一条简单闭曲线, 是平面的一个割集. 确认这样一般的结论要比圆周 S^1 这样特定的情况要困难得多. 我们将在 11 章中证明若尔当曲线定理.

从图 6.11 所描绘的情况我们可以期望, 假如 X 是一个连通的拓扑空间, 如果 $\text{Int}(A)$ 与 $\text{Int}(X-A)$ 都是非空集 (见练习 6.23), 那么, X 的一个子集 A 的边界是 X 的一个割集.

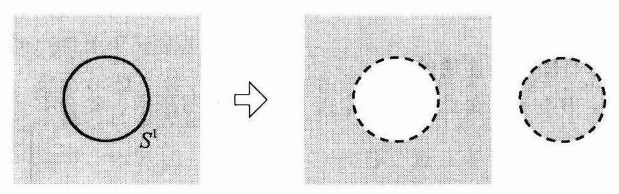


图 6.10　圆周 S^1 是平面 $\mathbf{R}^2$ 的一个割集

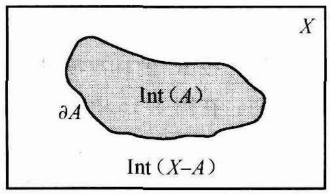


图 6.11　集合 A 的边界是 X 的一个割集

以下的定理确认了割集和割点在同胚下保持不变, 因此我们能利用它们对一些拓扑空间加以区分.

定理 6.20 $f: X\to Y$ 是一个同胚. 如果 S 是 X 的一个割集, 那么 $f(S)$ 是 Y 的一个割集.

证明 见练习 6.24. ■

从定理 6.20 立刻可得到, 如果 $f: X\to Y$ 是一个同胚, 而 p 是 X 的一个割点, 那么 $f(p)$ 是 Y 的一个割点.

例 6.16 $\mathbf{R}$ 中的每个点 p 是一个割点. 与此对照, 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上, 没有一个点 q 是一个割点, 这是由于对于所有的 $q\in\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2-\{q\}$ 是连通的. (见图 6.12.) 因此, 此直线与这个平面不同胚.

例 6.17 对于任一 $q\in S^1$, 空间 $S^1-\{q\}$ 与 $\mathbf{R}$ 同胚. 由于 $\mathbf{R}$ 是连通的, $S^1-\{q\}$ 同样是连通的. 因此, 在此圆周 S^1 中没有一个点是割点. (见图 6.13.) 但是, 由于在此直线上的每

个点都是一个割点，于是得出，此圆周与这条直线不同胚．此外，对于任一 $r \in S^2$，空间 $S^2 - \{r\}$ 与此平面同胚，因而是连通的．于是，在此球面 S^2 上没有一个点是割点，蕴涵此球面与这条直线不同胚．

例 6.18 圆周的任一两点集 $\{p, p'\}$ 把圆周分为两个开区间，因而任一两点集是此圆周的一个割集．（见图 6.14.）然而，从此球面挖去一个两点集 $\{q, q'\}$ 就得到与此有孔平面 $\mathbf{R}^2 - \{O\}$ 同胚的一个空间．由于 $\mathbf{R}^2 - \{O\}$ 是连通的，于是得到，在此球面上没有一个两点集是割集．因此，这个圆周与此球面不同胚．

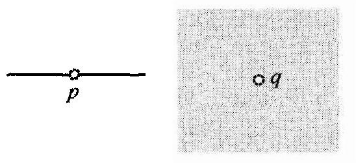


图 6.12 $\mathbf{R} - \{p\}$ 不连通，但 $\mathbf{R}^2 - \{q\}$ 是连通的

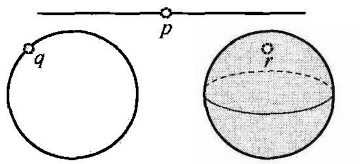


图 6.13 $\mathbf{R} - \{p\}$ 不连通，但 $S^2 - \{r\}$ 是连通的

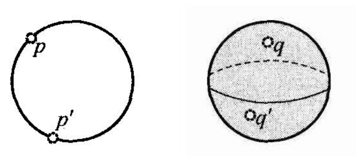


图 6.14 $S^1 - \{p, p'\}$ 不连通，但 $S^2 - \{q, q'\}$ 是连通的

至今，我们已经对直线与平面、圆周以及球面加以区分，而且也对圆周与球面进行了区分．类似地，我们还可以对圆周与平面加以区分．（见练习 6.29.）然而，当我们考虑球面与平面时，发现单点集、两点集甚至可数无限集全都不能分隔开．（见练习 6.43.）因此，我们不能像以前的例子那样，通过挖去一些简单的集合的方法，对球面与平面加以区分．在第 7 章，我们将证明紧致性的拓扑性质，就使我们能区分这两种空间．（见练习 7.17.）

6.2 节练习

6.17 （1）证明：按 $\mathbf{R}^n$ 的标准度量，在 $\mathbf{R}^n$ 中的开球与闭球是连通的．

（2）证明：在图 6.15 中所出现的每个集合 A，B 与 C，是此平面的连通子集．（如图所示，集合 C 由 8 个开球与它们之间的 8 个切点组成．）

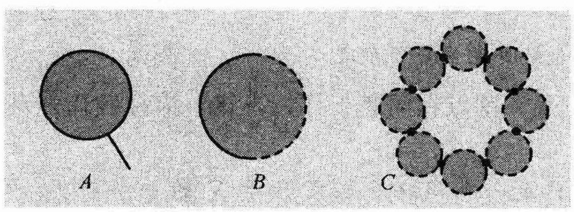


图 6.15 证明图示的平面的每个子集是连通的

6.18 在 $\mathbf{R}^2$ 中给出子集 A 与 B 的例子，使得

（1）A 与 B 是连通的，但 $A \cap B$ 不连通．

（2）A 与 B 是连通的，但 $A - B$ 不连通．

（3）A 是连通的，B 不连通，但 $A \cap B$ 是连通的．

（4）A 与 B 不连通，但 $A \cup B$ 是连通的．

（5）A 与 B 是连通的，$\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B) \neq \varnothing$，但 $A \cup B$ 不连通．

6.19 $B \subset \mathbf{R}^n$ 按欧氏度量是有界的．证明：B 在 $\mathbf{R}^n$ 中的补集恰好有一个无界分支．

6.20 在以下各种情况下，证明已知集合 C 是否为连通拓扑空间的一个割集：

（1）$C = \{b\}$，而 $X = \{a, b, c\}$ 具有拓扑 $\{\varnothing, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$．

(2) $C=\{c\}$，而 X 同 (1).

(3) $C=\{0\}$，而 $X=PP\mathbf{R}_0$，$\mathbf{R}$ 上的以原点为特殊点的特殊点拓扑.

(4) $C=\{-1, 1\}$，而 $X=\mathbf{R}_{fc}$，具有有限补拓扑的实轴.

(5) $C=$圆周 S^1，而 $X=\mathbf{R}^2$.

(6) $C=$如图 6.16 所示的默比乌斯带 X 的中心线.

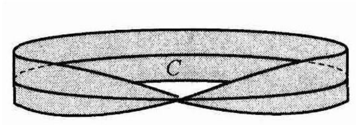


图 6.16 $X-C$ 连通吗

6.21 证明：任一 $n\in\mathbf{Z}$ 是数字轴的一个割点.

6.22 你能把一个克莱因瓶割开成两条默比乌斯带吗？为这个克莱因瓶 K 找一个割集 C，使得

(1) C 是 K 中的一条简单闭曲线，而且

(2) $K-C$ 是两个分离开集的并，使得 K 中每个开集的闭包与默比乌斯带同胚.

6.23 设 X 是一个连通的拓扑空间，而 A 是 X 的一个子集. 证明：如果 $\mathrm{Int}(A)$ 和 $\mathrm{Int}(X-A)$ 都非空，那么 ∂A 是一个割集，集合 $\mathrm{Int}(A)$ 和 $\mathrm{Int}(X-A)$ 是 $X-\partial A$ 的一个分隔.

6.24 **证明定理 6.20**：设 $f: X\to Y$ 是一个同胚. 如果 S 是 X 的一个割集，那么 $f(S)$ 是 Y 的一个割集.

6.25 证明：对于任一 $n\geqslant 2$，直线与 $\mathbf{R}^n$ 不同胚.

6.26 证明：对于任一 $n\geqslant 2$，直线和圆周与 S^n 都不同胚.

6.27 考虑 $[0, 1]$，$[0, 1)$，$(0, 1)$ 是在标准拓扑中 $\mathbf{R}$ 的子空间. 证明：在这些空间中，任何两个相互都不同胚.（这个结论确认了在例 4.12 中所提出的论断，即已知本例所定义的 3 族区间，从一个集族中的一个区间到另一个集族中的一个区间，不存在同胚.）

6.28 (1) 证明：区间 $[0, 2)$ 与圆周 S^1 同胚.（本题确认了在例 4.13 中所提出的论断，即这两个空间之间不存在同胚.）

(2) 证明：$\mathbf{R}$ 中没有区间子空间与圆周 S^1 同胚.

6.29 证明：不存在分隔平面的两点集，并用此结论来证明圆周与平面不同胚.

6.30 考虑下列定义：

定义 6.21 *设 X 是一个拓扑空间，并假定 $n\in\mathbf{Z}^+$，$n\geqslant 2$. X 中的点 p，称为 X 中的* **n 阶局部割点**，*如果存在 p 的连通邻域 U，使得 $U-\{p\}$ 有 n 个分支.*

证明：如果 $f: X\to Y$ 是一个同胚，而 p 是 X 中的 n 阶局部割点，那么 $f(p)$ 是 Y 中的 n 阶局部割点.

6.31 从字母表中字母的一族拓扑图形表示开始，通过拓扑等价来组成等价类.（见练习 4.37.）用练习 6.30 来证明，如果这两个表示属于你的分组中的不同等价类之中，那么它们不同胚.

6.3 介值定理

在微积分中最重要的定理之一是介值定理. 它指出，如果一个连续函数把一个闭区间 $[a, b]$ 映射到实轴 $\mathbf{R}$，那么此函数取 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值.

定理 6.22（$[a, b]$ 上的介值定理） *设 $f: [a, b]\to\mathbf{R}$ 是连续的，并假定 s 位于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间. 那么，至少存在一个 $c\in[a, b]$，使得 $f(c)=s$.（见图 6.17.）*

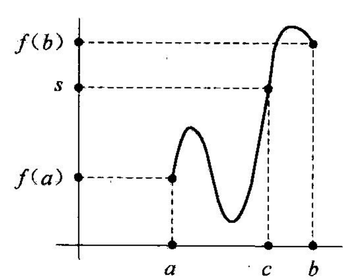


图 6.17 存在 $c\in[a, b]$ 使得 $f(c)=s$

$[a, b]$ 上的介值定理，是形式更一般的定理（定理 6.24）的一个结论，我们随后将对后者加以证明.

例 6.19 在 2001 年 1 月 1 日，体重为 320 磅的贾雷德做了一个新年决定，要改变自己的生活方式以减轻一些体重. 因此，他决定不再到自己所喜爱的汉堡包商铺进餐了，而开始穿过大街去

频繁光顾三明治商店. 令人吃惊的是，经过随后的 30 周，贾雷德的体重竟然减轻了 50 磅. 如果我们设 $W(t)$ 作为时间 t(以周为单位) 的函数表示贾雷德的体重，由于他一开始就控制体重，于是 $W(0)=320$，而 $W(30)=270$. 对于 270 与 320 之间的每个体重，存在一个时刻，那时贾雷德的体重就那么多. 特别地，存在一个时刻，他的体重为 300 磅. 事实上，他的体重可能有几次都为 300 磅，但是，介值定理仅仅告诉我们，在 30 周的时间区间内，他的体重至少有一次恰好是那么多.

以下的推论给出了介值定理一个有用的例子：

推论 6.23 设 f：$[a, b]\to\mathbf{R}$ 是使得 $f(a)$ 与 $f(b)$ 取相反符号的一个连续函数. 那么，方程 $f(x)=0$ 就有一个介于 a 与 b 之间的一个解.

推论 6.23 能帮助我们寻求形如 $f(x)=0$ 的方程的解. 例如，如果 f 是 $\mathbf{R}$ 上的一个连续函数，而我们又找到一个区间，f 在一个端点为负，而在另一个端点为正，那么推论 6.23 就确保在此区间内有方程 $f(x)=0$ 的一个解.

尽管 $[a, b]$ 上的介值定理在微积分中首先遇到，此定理可以用最一般的方式加以陈述. 事实上，这明显是一个来自拓扑学的定理.

定理 6.24(介值定理（一般形式)) 设 X 是一个连通的拓扑空间，而 f：$X\to\mathbf{R}$ 是连续的映射. 如果 p，$q\in f(X)$，且 $p<r<q$，那么 $r\in f(X)$.

证明 设 f：$X\to\mathbf{R}$ 是连续的，p，$q\in f(X)$，且 $p\leqslant r\leqslant q$. 如果 $r=p$ 或 $r=q$，那么我们立刻就有 $r\in f(X)$. 因此，我们只需要考虑 $p<r<q$ 的情况就可以了. 请注意，$f(X)$ 在 $\mathbf{R}$ 中是连通的，这是由于 X 是连通的，且 f 是连续的. 我们通过导致矛盾来证明 $r\in f(X)$. 于是，设 $r\notin f(X)$. 这样，$U=(-\infty, r)$ 和 $V=(r, \infty)$ 是 $\mathbf{R}$ 的分离开子集，它们的并包含 $f(X)$. 由于 $p\in U$ 且 $q\in V$，于是得到，$f(X)$ 与 U，V 都有交集. 因此，如图 6.18 所示，U 与 V 构成 $\mathbf{R}$ 中 $f(X)$ 的一个分隔. 但是，这就与 $f(X)$ 在 $\mathbf{R}$ 中是连通的事实相矛盾. 所以，$r\in f(X)$. ■

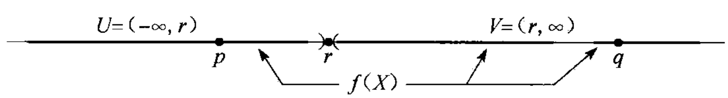


图 6.18 如果 $r\notin f(X)$，那么 $U=(-\infty, r)$ 与 $V=(r, \infty)$ 构成 $f(X)$ 的一个分隔

如果我们设 X 为 $[a, b]$，且分别设 p 与 q 为 $f(a)$ 与 $f(b)$，$[a, b]$ 上的介值定理就可从这个一般形式的介值定理推出.

例 6.20 设路易丝湖的湖面用一个拓扑空间 X 来表示，并设 f：$X\to\mathbf{R}$ 是在此湖面每个地点湖面下方的深度. 路易丝湖的最大深度为 70 米. 请问，是否有一个地点，它的深度为 30 米呢？

请注意，f 是一个连续函数. 此外，在拓扑上 X 是一个圆盘，因而是连通的. （见练习 6.17.）因此，介值定理适用. 存在 f 的值为 0 的点，当然这些点是在此湖的湖岸上. 此外，至少还存在一个点，在这个点上 f 的值为 70. 所以，给出 0 与 70 之间的任一深度，必定至少存在一个点，在那里，湖具有此深度. 特别地，至少存在一个点，在那里湖的深度为 30 米.

介值定理的一个有用的结论，是下列 1 维版本的布劳威尔不动点定理：

定理 6.25(1 维布劳威尔不动点定理) 设 f：$[-1, 1]\to[-1, 1]$ 是连续的. 那么，至少存在一个 c，使得 $f(c)=c$.

这个定理断言，任一连续函数 f：$[-1, 1]\to[-1, 1]$ 把某个 $c\in[-1, 1]$ 映射到自身. 这样的点 c，称为 f 的一个**不动点**.

用肉眼就很容易看出这个定理为什么成立. (见图 6.19.) 当我们从这个正方形 $[-1, 1]\to[-1, 1]$ 的左边到右边画出 f 的图形时，必定存在一个点 (c, c)，在这里，图形与直线 $y=x$ 相交. 交点与满足 $f(c)=c$ 的值 c 相对应，这正是我们所希望的.

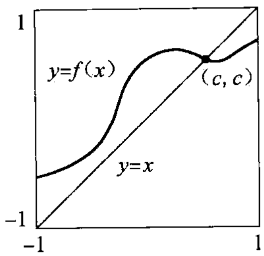


图 6.19 f 的不动点出现于 f 的图形与直线 $y=x$ 相交之处

我们用下列的证明让以上的图形化论证规范化.

证明 设 f：$[-1, 1]\to[-1, 1]$ 是连续的. 由 $g(x)=f(x)-x$ 定义一个函数 g：$[-1, 1]\to\mathbf{R}$. 函数 g 是连续的. 注意 $f(-1)\geqslant-1$，因而 $g(-1)\geqslant 0$，同样 $g(1)\leqslant 0$. 介值定理蕴涵，存在一个值 $c\in[-1, 1]$，使得 $g(c)=0$. 对于此 c，可得 $f(c)=c$. 所以，在 $[-1, 1]$ 中至少存在一个 c，使得 $f(c)=c$，这正是我们所要证明的. ∎

n 维布劳威尔不动点定理说，对于把 n 维球映射到自身的任一连续函数 f：$B^n\to B^n$，存在一个不动点. (即，使得 $f(x)=x$ 成立的一个点 x.) 在第 11 章中我们考虑一般的不动点理论时，再来证明 2 维形式的布劳威尔不动点定理.

例 6.21(在种群建模中的应用) 在生态学领域，各种类型的模型——包括无论出现于何地的种群，从一个种群到多个种群等等——都已经以实验方法或数学方法进行过研究. 一个种群如何增长和衰减？它与周围的环境如何相互影响？如何设法让所有的因素与它整合在一起，以及如何对模型进行研究？为此，许多数学工具被用于建立并分析这些模型. 当一个特定的模型需要进行定性分析时，通常就会使用拓扑学的工具.

在此，我们考虑反映特定类型状态的一种明确的单种群模型，它可以借助介值定理来进行研究.

设 $y(t)$ 为时间 t 的函数，表示此物种的种群大小. 我们假定此种群按照连续依赖于当前种群大小的比例而增长. 于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y)$，而 f 是连续的. 函数 f 是增长函数，它反映了增长率是如何依赖于此种群的.

这种模型的简单例子由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$ 给出，其中 $k>0$. 在这里，增长率与种群大小成比例. 当一个种群不受到资源的限制且没有捕食者时，适用这个模型. 这个微分方程的解族由 $y=y_0\mathrm{e}^{kt}$ 给出. 这个结果提供了此种群按指数方式增长的规律.

对于增长函数 $f(y)$ 的其他情况，我们也许不能确定此解的一般形式. 于是，与直接求解方程不同的另一些方法，是需要了解这些解的性态.

在研究这样的模型时，求时间为恒定的解——也称为**稳态解**，通常是有意义的. 这些解可以表示为一个系统预期的长期性态，通常以随时间而变的解的极限性态而出现. 因此，我们对稳态解感兴趣，由于它们通常与其他解所趋向的稳定状态相对应. 当 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ 时就会出现

一个稳态解 $y(t)=y^*$，因而当取值为 y^* 时，就使得 $f(y^*)=0$.

让我们考虑一个特殊的例子. 设 $y(t)$ 表示在（美国）蒙塔纳州的一个区域内狼种群的大小，在那里狼重新成为野生动物. 我们想知道是否可能存在一个稳态的狼的种群.

我们对相应的增长函数 f 作两个简单而又自然的假定：

(1) 当狼的数量较少时，有足够多的资源能维持种群的增长.

(2) 当狼的数量较多时，资源的基础不足以维持增长的需要，因此种群衰减.

因此，对于小的 y 值，我们设 $f(y)>0$；而对于大的 y 值，我们设 $f(y)<0$. 让我们取两个这样的值：S 接近于 0 时，$f(S)>0$；而 L 取值较大时，$f(L)<0$.

考虑图 6.20 中的 $y-t$ 坐标系. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y)$ 的解具有斜率 $f(y)$. 也就是说，通过点 (t, y) 的解曲线，以 $f(y)$ 为斜率. 特别地，根据我们的假定，每条解曲线的斜率正如图 6.20 所示，在 $y=S$ 时为正，而在 $y=L$ 时为负.

在 ty 平面，设 B 是由

$$B=\{(t,y)\mid t\geqslant 0, S\leqslant y\leqslant L\}$$

所定义的带子. 显然，在图 6.20 中进入带 B 之中的解曲线，必定留在 B 中. 在带 B 之中会出现什么情况呢？由于没有有关增长函数 f 性态的更多信息，因此不能得出更进一步的结论. 然而，介值定理却能确保得到进一步的结论，这是由于 $f(S)>0$ 且 $f(L)<0$，所以存在一个值 $y^*\in[S, L]$，使得 $f(y^*)=0$.（见图 6.21.）于是，存在一个稳态解 $y(t)=y^*$. 它的图形是在带 B 之中的一条水平直线. 因此，在种群小时增长，而在种群大时衰减的假定下，我们就可以得出结论：至少存在种群的一个值，此时狼群以稳定的状态存活.

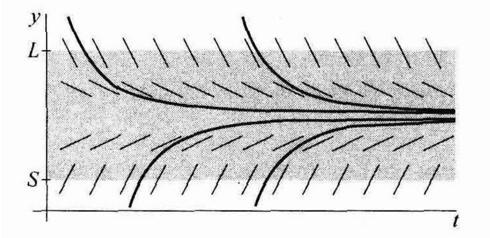


图 6.20 解曲线的斜率由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y)$ 描述，其中 $f(S)>0$，$f(L)<0$

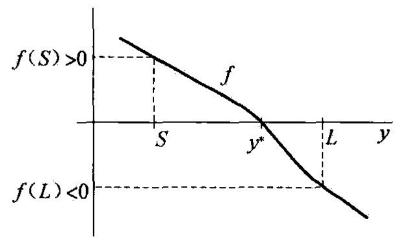


图 6.21 增长函数 $f(y)$

在上述例子中，我们对一个微分方程完成了一次简单的定性分析. 通常，有关微分方程解的性态的定性研究，属于动力系统这一领域.（我们在第 8 章将研究动力系统理论的另一方面.）我们前面的分析，可以推广为一个直接的动力系统结论：设在 $[a, b]$ 上定义 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y)$；如果 f 是连续的，且使得 $f(b)<0$，且 $f(a)>0$，那么存在一个稳态解 $y(t)=y^*$，其中 $y^*\in[a, b]$. 这是利用拓扑学的工具进行的，有关微分方程解的性态的一种典型的定性结论. 即使我们能够确定一个微分方程的解时，进行拓扑学的分析能使我们对它们的性态作出结论.

一般形式的介值定理，有各种其他有趣的推论，例如，我们有以下的定理：

定理 6.26 设 f：$S^2\to\mathbf{R}$ 是连续的. 那么，存在 $c\in S^2$，使得 $f(c)=f(-c)$.

证明 设 f：$S^2 \to \mathbf{R}$ 是连续的．用 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 来定义 g：$S^2 \to \mathbf{R}$．g 在点 $x \in S^2$ 的值，是 f 在 x 的值与 f 在 x 的对心点 $-x$ 的值的差．请注意 g 是连续的，定义域 S^2 是连通的，而对于任一 $x \in S^2$，$g(x)=-g(-x)$．取点 $p \in S^2$．如果 $g(p)=0$，那么 $f(p)=f(-p)$，而这个等式我们已经得以实现．另一方面，$g(p)$ 与 $g(-p)$ 异号，介值定理蕴涵，存在$q \in S^2$，使得 $g(q)=0$．于是，对于此 q，可得 $f(q)=f(-q)$．无论 $g(p)=0$ 还是 $g(p) \neq 0$，都可以得到，存在 $c \in S^2$，使得 $f(c)=f(-c)$，这正是所要证明的结论． ■

例 6.22 定理 6.26 在气象学中有奇特的应用．假定地球的表面是一个球面，而地表温度是依赖于球面的一个连续函数，而且在任意时刻，在地球上的一个点与它的对心点有相同的温度．当然，我们可以用任意其他依赖于地球的连续变量，诸如气压、相对湿度或海拔高度来取代温度，也能得到相应的结果．

定理 6.26 可以推广为关于连续函数 f：$S^n \to \mathbf{R}^m$ 的结论，其中 $n \geqslant m$．这个一般的结论称为博苏克－乌拉姆定理．定理 6.26 指出了 $n=2$ 和 $m=1$ 的情况．对于 $m=1$ 而 n 为任意的情况，定理 6.26 的证明转为刚才所给出的证明．然而，一般的博苏克－乌拉姆定理的证明所需要的拓扑工具，超出了本书的范围．

在第 9 章的一组练习中，我们证明当 $m=2$ 而 $n=2$ 时的博苏克－乌拉姆定理．$m=2$ 且 $n=2$的情况适用于函数 f：$S^2 \to \mathbf{R}^2$ 的情况，并提供了一个比例 6.22 所提出的更强的气象学结果．特别地，在任何给定的时刻，在地球上存在互为对心的两点，它们不仅有相同的温度，而且竟然同时有相同的气压！

6.3 节练习

6.32 设把球面与地球的表面视为相等来定义 T：$S^2 \to \mathbf{R}$，并设 $T(x)$ 是某一时刻在此表面上点 x 的温度．假定 T 是一个连续函数．请证明：如果 T(美国阿拉斯加州的安克雷奇港)$=-30°$，且 T(美国檀香山市)$=80°$，则在此地球上存在某个点，那里的温度是 0°．如果我们把地域限制在美国 50 个州，此结论一定成立吗？如果 T(美国明尼苏达州的德卢斯港)$=-30°$，而 T(美国佛罗里达州的劳德代尔堡市)$=80°$，此结论在美国成立吗？

6.33 设 $p(x)$ 是奇次多项式函数．证明 $p(x)=0$ 至少有一个实根．

6.34 当定义域 $\mathbf{R}$ 按以下每种拓扑定义，请确定一般形式的介值定理是否成立：

(1) 平凡拓扑．

(2) 离散拓扑．

(3) 下限拓扑．

6.35 陈述并证明，对于映射到数字轴的函数的介值定理．

6.36 设在给定的时刻，我们测量地球上每个点的阳光强度．按照定理 6.26，在地球的表面，必定存在互为对心的两点，它们的阳光强度相同．然而，如果在一个点是在白天，而在对心点却是在晚间！请破解此悖论．

6.37 证明：在地球表面上的每个大圆（由这个地球表面用通过其中心的平面相截而得到的圆周）存在具有相同温度的互为对心的两点．

6.38 (1) 设 X 是连通的，且同胚 A：$X \to X$ 存在，使得对于任一 $x \in X$，$A \circ A(x)=x$．证明：对于每个连续函数 f：$X \to \mathbf{R}$，存在 $x \in X$，使得 $f(x)=f(A(x))$．

(2) 利用 (1) 的结论证明：在调味油炸圈上的某处存在一点，与绕此油炸圈的中心轴旋转 180 度而得到的那个点，有同样厚的一层调料．

6.4 道路连通性

在本节，我们介绍道路连通性，即我们在本章一开始所提到的讨论连通性的两条途径之中的另一条途径. 我们证明道路连通性蕴涵连通性. 此外，我们展示一种拓扑空间（拓扑学家的漩涡），它是连通的，但不是道路连通的. 因此，对于一个拓扑空间来说，道路连通性是一个比连通性更强的条件.

设 X 是一个拓扑空间，而 x，y 是 X 中的点. 在 4.3 节中已定义过，在 X 中从 x 到 y 的一条道路，是使得 $f(0)=x$ 且 $f(1)=y$ 的一个连续函数 f：$[0, 1]\to X$.

定义 6.27 一个拓扑空间 X 是**道路连通**的，如果对于任一 x，$y\in X$，在 X 中存在一条从 x 到 y 的道路. 拓扑空间的一个子集 A 在 X 中是**道路连通**的，如果 A 在传承自 X 的 A 的子空间拓扑中是道路连通的.

显然 $\mathbf{R}^n$ 是道路连通的，在此标准度量下，正如在 $\mathbf{R}^n$ 中的任一开球和任一闭球一样.

定理 6.28 设 X 是一个道路连通的空间，那么它是连通的.

证明 设 X 是一个道路连通的空间. 我们通过证明它仅有一个分支，或等价地证明任一对点 x，$y\in X$ 包含于 X 的某个连通子集之中，来证明 X 是连通的. 于是，设 x，y 是 X 中的任意点. 由于 X 是道路连通的，因此在 X 中存在从 x 到 y 的一条道路. 这一道路的原象，是 X 的既包含 x 又包含 y 的一个连通子集. 因此，X 中的每对点包含于 X 的一个连通子集之中，所以得到 X 是连通的结论. ■

由于道路连通性蕴涵连通性，又由于 $\mathbf{R}$ 在显然是道路连通的标准拓扑之中，看来我们现在有一种证明 $\mathbf{R}$ 连通性的方法，比在定理 6.17 中所提出的方法更简单. 然而，这样的论证有一种缺陷. 定理 6.28 的证明，利用了区间 $[a, b]$ 是连通的事实，而区间 $[a, b]$ 是连通的证明，又利用了 $\mathbf{R}$ 是连通的事实. 因此定理 6.28 的证明，实际上是建立在 $\mathbf{R}$ 连通性的基础之上的. 所以，定理 6.28 不能用来证明 $\mathbf{R}$ 是连通的.

乍一看来，可能很自然地认为连通性和道路连通性是等价的，但是事实上它们并不等价. 在以下的例子中，我们会发现一个拓扑空间是连通的，但却不是道路连通的.

例 6.23(拓扑学家的漩涡) 设 A 如图 6.22 所示，是用极坐标表示为 $A=\left\{\left(\frac{\theta}{\theta+1}, \theta\right) \middle| \theta\in[0, \infty)\right\}$ 的平面曲线. 曲线 A 朝圆周 S^1 向外卷成螺旋状. 拓扑学家的漩涡 W 定义为 $W=A\cup S^1$. A 可看为由 $f(\theta)=\left(\frac{\theta}{\theta+1}, \theta\right)$ 给定的嵌入 f：$[0, \infty)\to\mathbf{R}^2$ 的象. 直接可证明 W 是 $\mathbf{R}^2$ 中 A 的闭包.

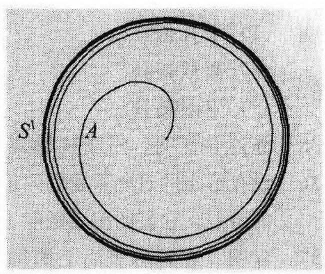


图 6.22 拓扑学家的漩涡

注意，A 是连通空间 $[0, \infty)$ 在一个连续函数下的象，因而 A 是连通的. 又由于 W 是 $\mathbf{R}^2$ 中 A 的闭包，因此它也是连通的.

然而，W 不是道路连通的. 证明有点复杂，但是花些工夫是值得的. 为了证明 W 不是道路连通的，我们来证明 W 中的每条起始于 S^1 的道路必定停留在 S^1 中，因而在 W 中没有从 S^1 中的点到 A 中的点的道路. 于是，设 p：$[0, 1]\to W$ 是使得 $p(0)\in S^1$ 的一条道路. 我们

再来证明 $p([0,1])\subset S^1$，或等价地证明 $p^{-1}(S^1)=[0,1]$. 首先，注意 $p^{-1}(S^1)$ 是 $[0,1]$ 的一个非空子集，这是由于 $p(0)\in S^1$. 我们断言，$p^{-1}(S^1)$ 在 $[0,1]$ 中既开又闭. 由于 $[0,1]$ 是连通的，于是由定理 6.2，可得出 $p^{-1}(S^1)=[0,1]$. 因此，我们还需要证明 $p^{-1}(S^1)$在 $[0,1]$ 中既开又闭.

首先，注意到 S^1 在 W 中是闭的，而 p: $[0,1]\to W$ 是连续的，因此 $p^{-1}(S^1)$ 是 $[0,1]$ 的一个闭子集.

设$\mathcal{B}$是 $[0,1]$ 上通过取 $\mathbf{R}$ 中的开区间以及它们与 $[0,1]$ 的交而得到的，此拓扑的基. $\mathcal{B}$中的每个基元素，是 $[0,1]$ 的一个区间子集.

为了看出 $p^{-1}(S^1)$ 是 $[0,1]$ 的一个区间子集，选取任一点 $y\in p^{-1}(S^1)$. 于是 $p(y)\in S^1$，而 $p(y)$ 有形如 $(1,\gamma)$ 的一个极坐标表示式. 设 $N\subset\mathbf{R}^2$ 具有由

$$N=\{(r,\theta)\,|\,0.9<r<1.1,\gamma-0.1<\theta<\gamma+0.1\}$$

给出的 $p(y)$ 极坐标形式的邻域.（在 N 的这一选择中，特定的数值并没有什么意义，我们只需要 $p(y)$ 的一个小的邻域.）集合 $N'=W\cap N$ 是 W 中的一个开集. 于是，$p^{-1}(N')$ 在 $[0,1]$中是开的，且包含 y. 因此，存在一个基元素 $J\in\mathcal{B}$，使得 $y\in J\subset p^{-1}(N')$. 作为一个区间，基元素 J 是连通的. 因此，$p(J)$ 是 N'的一个连通子集. 我们再来证明 $p(J)\subset S^1\cap N'$. 注意 $p(J)$ 与 $S^1\cap N'$至少有一点（即 $p(y)$）公共.

于是，在区间 $(0.9,1)$ 中可以选取一个收敛于 1 的序列 (r_n)，且使得集合

$$U_n=\{(r,\theta)\in N\,|\,r>r_n\}\ \text{及}\ V_n=\{(r,\theta)\in N\,|\,r<r_n\}$$

在此平面上构成 N'的一个分隔.（见练习 6.23.）引理 6.7 蕴涵，对任一 n，成立 $p(J)\subset U_n$. 于是，$p(J)\subset S^1\cap N'$. 因此，我们有 $y\in J\subset p^{-1}(S^1)$，而 J 是 $[0,1]$ 上此拓扑的一个基元素. 这蕴涵 $p^{-1}(S^1)$ 在 $[0,1]$ 中是开的，这正是我们要证明的.

于是，W 不是一个道路连通空间. 正如我们已经指出过的，它是连通的. 因此，拓扑学家的漩涡，是拓扑空间的一个例子，它是连通的，但却不是道路连通的.

例 6.24 拓扑学家的正弦曲线如图 6.24 所示，是由

$$T=\left\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\middle|\,0<x\leqslant 1\right\}\cup\left\{(0,y)\,|\,-1\leqslant y\leqslant 1\right\}$$

所定义的 $\mathbf{R}^2$ 的子空间. 拓扑学家的正弦曲线，是另一个虽然是连通的，但却不是道路连通的空间.（见练习 6.42.）

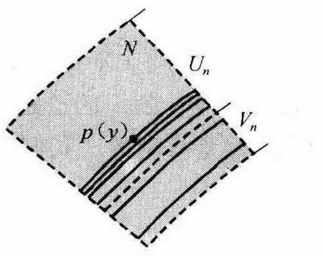
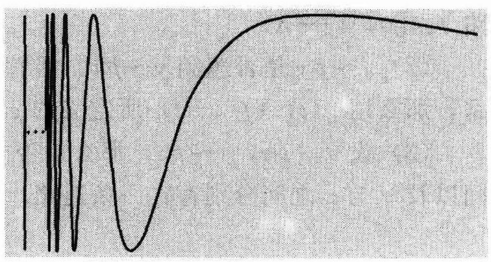


图 6.23 集合 U_n 与 V_n 构成 $N'=W\cap N$ 的一个分隔


图 6.24 拓扑学家的正弦曲线

如果我们在 $\mathbf{R}^2$ 中戳一个洞，不难看出所得到的空间是道路连通的. 特别地，设 p 是 $\mathbf{R}^2$ 中

的一个点，并考虑 $\mathbf{R}^2-\{p\}$. 如果 a，b 是 $\mathbf{R}^2-\{p\}$ 中的点，而 p 不位于 a 与 b 之间的线段上，那么在 $\mathbf{R}^2-\{p\}$ 中存在一条从 a 到 b 的直线道路，它由 $f(t)=(1-t)a+tb$ 给出. 另外，我们可以通过选取一个不在通过 a，b 与 p 的直线上的第 3 点 c，按照一种从 a 到 c 到 b 并绕开 p 的两节拐棍的方式，在 $\mathbf{R}^2-\{p\}$ 中可找到 a 与 b 之间的一条道路（见图 6.25）. 这样的道路由

$$g(t)=\begin{cases}(1-2t)a+2tc & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ (2-2t)c+(2t-1)b & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

给出.

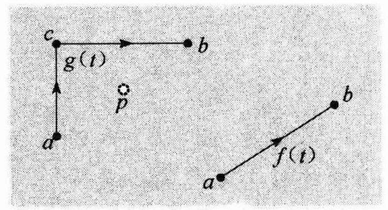


图 6.25 $\mathbf{R}^2-\{p\}$ 是道路连通的

注意到，由粘合引理，g 是连续的. 于是，$\mathbf{R}^2-\{p\}$ 是道路连通的.

上述论证也可以用于对任一 $n\geqslant 2$ 及 $p\in\mathbf{R}^n$ 的情况，来证明 $\mathbf{R}^n-\{p\}$ 是道路连通的. 然而，我们不必把自己限制于 $\mathbf{R}^n$ 中的一个针孔. 即使在 $\mathbf{R}^n$ 中设置可数无限个针孔，所导致的仍然是一个道路连通的空间（见练习 6.43 与 6.44.）

以下的定理指出，在一个连续函数的映射下，一个道路连通的空间的原象，仍然是道路连通的. 这就蕴涵：在同胚的意义下，道路连通性得以保持，因而是一种拓扑性质.

定理 6.29 设 f：$X\to Y$ 是连续的，且 X 是道路连通的. 那么，$f(X)$ 是 Y 的一个道路连通子空间.

证明 设 p，q 是 $f(X)$ 中的点. 选取点 $x\in f^{-1}(\{p\})$ 和 $y\in f^{-1}(\{q\})$. 由于 X 是道路连通的，所以存在一条从 x 到 y 的道路 g：$[0, 1]\to X$. 于是，$f\circ g$ 是 $f(X)$ 中从 p 到 q 的一条道路. ■

$f\circ g$ 确实是 Y 中的一条道路，但是由于对 $f\circ g$ 的象加以限制，$f\circ g$ 的象是 $f(X)$ 的一个子集，因此可得出它是 $f(X)$ 中一条道路的结论.

正如连通性的情况一样，一个拓扑空间可以分拆为最大道路连通子集. 这些称为 X 的道路分支. 在以下我们将确切阐述此概念.

给定一个拓扑空间 X，如果在 X 中存在一条从 x 到 y 的道路，则由 $x\sim py$ 定义了在 X 上的一个关系. 这个关系是一个等价关系，以下对此加以检验.

(1) $x\sim px$ 是否成立？回答是肯定的. 我们可以对于所有的 t 通过定义 $f(t)=x$ 来选取道路 f：$[0, 1]\to X$.

(2) $x\sim py$ 是否蕴涵 $y\sim px$? 回答是肯定的. 如果 f：$[0, 1]\to X$ 是一条从 x 到 y 的道路，那么用 $g(t)=f(1-t)$ 所定义的 g：$[0, 1]\to X$，是一条从 y 到 x 的道路.

(3) 设 $x\sim py$，$y\sim pz$，那么是否成立 $x\sim pz$? 回答仍然是肯定的. 我们知道，x 与 y 之间以及 y 与 z 之间分别存在一条道路. 用

$$h(t)=\begin{cases}f(2t) & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ g(2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

所定义的 h：$[0, 1]\to X$ 构成一条新的道路．于是，$h(0)=x$，$h(1)=z$．由于 $f\left(\frac{1}{2}\right)=y=g\left(\frac{1}{2}\right)$，粘接引理蕴涵 h 是连续的．于是，h 是从 x 到 z 的一条道路．

因此，$\sim p$ 是一个等价关系．照例，此等价类构成 X 的一个分拆．

定义 6.30 在等价关系 $\sim p$ 下的等价类，称为 X 的**道路分支**.

X 的道路分支是道路连通的，而 X 的每个道路连通的子集，是 X 的道路分支（见练习 6.47）．按照这种意义，一个拓扑空间 X 的道路分支，是 X 的最大道路连通子集．

例 6.25 设 X_n 是由螺线 $\left\{\left(\frac{\theta}{\theta+1}, \theta\right)\in R \,\middle|\, \theta\in(0, \infty)\right\}$ 与圆周 S^1 上的 n 个等分点所组成的，平面的子集．我们用图 6.26 表示出了 X_6．利用与拓扑学家漩涡的例子相类似的论证，我们可以证明 X_n 是连通的，但不是道路连通的．于是可得出，X_n 有一个分支，且可直接证明 X_n 有 $n+1$ 个道路分支．

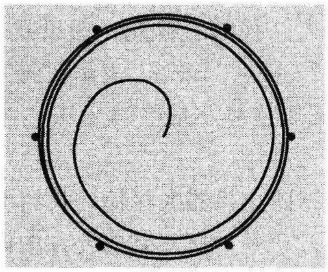


图 6.26 集合 X_6 由一条螺线与环绕它的圆周上的 6 个等分点组成

一个拓扑空间的分支的数量，不超出道路分支的数量，这一般是正确的，由于每个道路分支，必定是此空间某些分支的一个子集（见练习 6.49）．

6.4 节练习

6.39 设 $X=\{a, b\}$，并假定 X 有拓扑 $\mathcal{T}=\{\varnothing, \{a\}, X\}$．证明：$X$ 在拓扑中是道路连通的．

6.40 证明：数字轴是道路连通的．

6.41 集合 $C\subset\mathbf{R}^n$ 称为**星形凸**的，如果存在一个点 $p^*\in C$，使得对于任一 $p\in C$，$\mathbf{R}^n$ 中连结 p^* 与 p 的线段位于 C 中．证明：如果 $C\subset\mathbf{R}^n$ 是星形凸的，那么 C 在 $\mathbf{R}^n$ 中是道路连通的．

6.42 证明：拓扑学家的正弦曲线是连通的，但不是道路连通的．

6.43 设 $A=\mathbf{R}^2-C$，其中 C 是 $\mathbf{R}^2$ 中一个可数子集．证明：A 是道路连通的．（提示：给定一个点 $a\in A$，存在许多条通过 a 且完全绕开 C 的直线．为什么？）

6.44 设 $A=\mathbf{R}^n-C$，其中 C 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个可数无穷子集．证明：A 是道路连通的．（提示：已知 $x, y\in\mathbf{R}^n-C$，在 $\mathbf{R}^n-C$ 中找一条从 x 到 y 的道路，此道路在 $\mathbf{R}^n$ 内位于包含 x 与 y 的一个平面之中．）

6.45 证明：当 $n\geqslant 1$ 时，n 维球 S^n 是道路连通的．（提示：找一个把一个道路连通空间映射到 S^n 的满射连续函数．）

6.46 证明：如果 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一个拓扑空间 X 的道路连通的子集族，而 $\bigcap_{\alpha\in A} A_\alpha$ 非空，那么，$\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$ 是道路连通的．

6.47 设 X 是一个拓扑空间．

(1) 证明 X 的每个道路分支是道路连通的．

(2) 证明 X 的每个道路连通子集，是 X 的某个道路分支的一个子集．

6.48 举例说明一个拓扑空间 X 的道路分支未必是 X 中的开集，也未必是 X 中的闭集．

6.49 证明：一个拓扑空间 X 的每个道路分支，是 X 的某个分支的一个子集．

6.50 举例说明一个拓扑空间有不可数无穷多个道路分支．

6.51 证明：如果 f：$X\to Y$ 是一个同胚，而 C 是 X 的一个道路分支，那么 $f(C)$ 是 Y 的一个道路分支．

6.52 设 X_1，…，X_n 是道路连通的．证明：对应的积空间 $X_1\times\cdots\times X_n$ 是道路连通的．

6.5 自动导向装置

自动导向装置，是在一个制造设施中用来把材料从一个位置传送到另一个位置的移动机器人．在设计和建造这样一个设施时，其中一部分难题是，如何适当地设置移动机器人的路线，使得机器人能够以有效和安全的方式连续改变方向．在这个计划的过程中，自然要使用拓扑学的工具和概念．本节考虑一些简单的例子．

我们为每个具有一个移动点的机器人建模时，是通过一个拓扑空间来表示在此工厂中机器人路线的．首先，假设我们有在用 $\mathbf{R}$ 来表示的一条直线上移动的两个机器人 A 与 B，如图 6.27 所示．设 x_A 表示机器人 A 的位置，x_B 表示机器人 B 的位置．这两个机器人的构形空间（见 3.5 节）是空间

$$C=\{(x_A,x_B)\mid x_A\in\mathbf{R},x_B\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2.$$

为了防止机器人相撞，我们不允许两个机器人在同一时刻出现在同一点，即我们决不允许 $x_A=x_B$．于是，所得到的允许的构形空间是

$$SC=\{(x_A,x_B)\mid x_A\in\mathbf{R},x_B\in\mathbf{R},x_A\neq x_B\}.$$

为了对此空间与构形空间 C 加以区分，我们称此空间为这两个机器人的**安全构形空间**.

平面上被安全构形空间排除在外的那些点，组成集合 $\{(x,\ x)\mid x\in\mathbf{R}\}$．这个集合称为此平面的**对角线**，并记为 Δ．请注意，$SC=C-\Delta$．在这种情况下，此构形空间是挖去此对角线的平面（见图 6.28）．重要的是，要注意这个空间是不连通的，因而不是道路连通的．在不久之后，我们将会看出这个事实的意义．

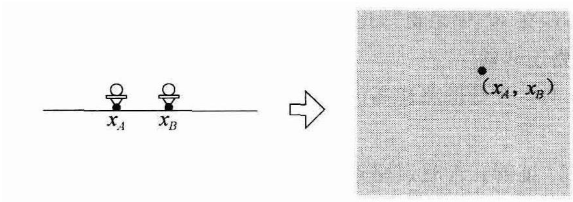


图 6.27 在直线上移动的两个机器人所产生的构形空间是 $\mathbf{R}^2$

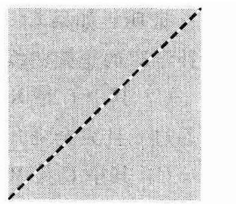


图 6.28 在直线上两个机器人的安全构形空间是挖去对角线的平面

在一般情况下，假设我们在空间 X 中有 n 个机器人．**安全构形空间**定义为空间

$$SC^n(X)=(X\times X\times\cdots\times X)-\Delta,$$

其中，$\Delta=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mid$ 对某些 $i\neq j,\ x_i=x_j\}$.

在这里我们取 X 的 n 个拷贝的乘积，并挖去对角线 Δ．正如两个机器人的情况一样，通过挖去集合 Δ，我们排除了两个或多个机器人出现在同一点的构形，因而消除了机器人相撞的可能性．

为了要在空间 X 中重新设置机器人而进行建模，我们使用在 $SC^n(X)$ 中的一条道路．特别地，假定我们的 n 个机器人已初始定位，使得机器人 j 定位于 F_j．我们定义此 n 个机器人从初始构形 $I=(I_1,\ \cdots,\ I_n)$ 到最终构形 $F=(F_1,\ \cdots,\ F_n)$ 的**重新设置**为一条道路 p：$[0,\ 1]\rightarrow$

$SC^n(X)$，使得 $p(0)=I$，$p(1)=F$. 这样一条道路的存在，就能确保这些机器人从初始构形可无相撞地移动到最终构形.

已知这些机器人的两个构形 $M=(M_1, \cdots, M_n)$ 与 $N=(N_1, \cdots, N_n)$，我们称 N 是从 M **可达到**的，如果机器人从 M 到 N 存在一个重新设置. 如果此安全构形空间是道路连通的，那么，每个构形空间都可从任一其他构形空间可达到，并且称这些机器人在 X 中是**可任意移动**的.

例 6.26 再回到在直线上两个机器人的那个例子，此时的安全构形空间是 $SC^2(\mathbf{R})=\mathbf{R}^2-\Delta$. 正如我们已观察到的，这个空间不是道路连通的，因此在 $\mathbf{R}$ 中，这两个机器人不能任意移动. 这在直观上是明显的，由于从机器人 B 到机器人 A 左侧的任一构形可得到的，机器人 A 到机器人 B 左侧的构形并不存在.

这种直观的观察，反映在安全构形空间的结构上. 特别地，$SC^2(\mathbf{R})$ 的道路分支是集合

$$U=\{(x_A,x_B)\mid x_A<x_B\in\mathbf{R}\}\text{ 及 }V=\{(x_A,x_B)\mid x_A>x_B\in\mathbf{R}\},$$

如图 6.28 所示，它们分别位于此对角线的上面和下面. 集合 U 表示机器人 A 位于机器人 B 左侧的所有构形，而集合 V 表示机器人 B 位于机器人 A 左侧的所有构形. 由于在 $SC^2(R)$ 中没有从 U 到 V 的道路，于是就得到——正如我们直观观察到的——从机器人 B 到机器人 A 左侧的任一构形，不能从机器人 A 到机器人 B 左侧的构形而得到. 然而，由于在 U 中每对构形之间，存在 U 中的一条道路，于是可得出，机器人 A 到机器人 B 左侧的任一构形可借助一种重新放置，让机器人 A 保持在机器人 B 的左侧，可从任一其他这样的构形而得到. 对于 V 中的每对构形，结论也同样成立.

在图 6.29 中，我们表示出了这两个机器人在 U 中从一个初始构形 (I_A, I_B)，到最终构形 (F_A, F_B) 的两种重新放置. 由于这些构形是在 U 之中，因此机器人 B 是在机器人 A 的右侧. 按第一种重新放置，两个机器人都移动到右边，但机器人 B 移动的幅度超过了机器人 A. 反映此事实的一种情况是，(I_A, I_B) 与 (F_A, F_B) 之间的线段的斜率大于 1. 按第二种重新放置，这两个机器人相互朝前移动，但由于它们按相反的方向移动，因此 (I_A, I_B) 与 (F_A, F_B) 之间的线段的斜率是负的.

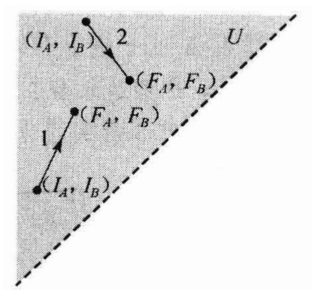


图 6.29 U 中的两种重新设置

例 6.27 考虑在圆周 S^1 上的两个机器人. 此时，安全构形空间 $SC^2(S^1)$ 是一个挖去对角线的环面 $S^1\times S^1$. 为了画出这个安全构形空间，请考虑图 6.30. 在此，我们把此环面表示为把对边视为相同的一个正方形. 所挖去的对角线用虚线来表示. 挖去对角线，导致一个由将两个三角形沿图示的各边粘合而成的一个空间. 对应的空间与 $(0, 1)\times S^1$ 即一个开圆环同胚.

一个开圆环是道路连通的，由于它与两个道路连通的空间 ($(0, 1)$ 与 S^1) 的乘积同胚，而又由于道路连通空间的乘积是道路连通的（见练习 6.52）. 因此，我们可以得出结论：在圆周 S^1 上的两个机器人是可以任意移动的.

例 6.28 本例选自 [Abr2] 中的一个例子. 考虑两个机器人 A 与 B 在图 6.31 所示的 Y 形拓扑图上的构形空间. 我们用 Y 来记此空间，并用 α，β 与 γ 来记 Y 的 3 条边. 这 3 条边交于顶点 v.

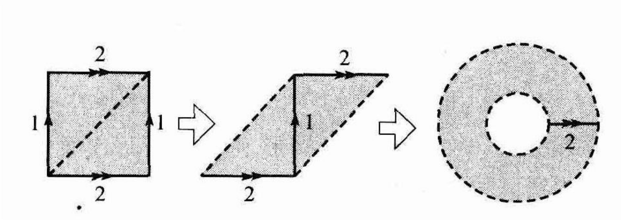


图 6.30 安全构形空间 $SC^2(S^1)$ 是一个开圆环

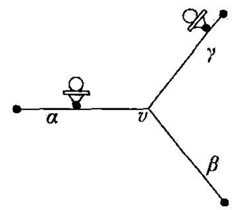


图 6.31 在空间 Y 上的两个机器人

安全构形空间是 $SC^2(Y)=(Y\times Y)-\Delta$. 为了画出 $SC^2(Y)$，我们把它分为 3 个子集：$(Y\times\alpha)-\Delta$，$(Y\times\beta)-\Delta$ 与 $(Y\times\gamma)-\Delta$，然后考察如何把这 3 个子集粘合在一起而构成 $SC^2(Y)$.

在图 6.32 中，我们描述了 $(Y\times\alpha)-\Delta$. 与固定在 v 的机器人 A 和位于 Y 上任何别处的机器人 B 相应的构形集合，由在所画出空间的底部上的边来表示. 沿着标记有单箭头的边，机器人 B 固定于 v，而机器人 A 位于边 α 上. 标记有双箭头和 3 箭头的边，可以用类似的方式作出解释. 在 $(Y\times\alpha)-\Delta$ 的图示上竖直移动，对应于机器人 B 沿边 α 朝外移动，并让机器人 A 保持固定. 由于我们已经挖去了与这两个机器人同时出现在边 α 上所对应的对角线段，因此如图所示，存在 $(Y\times\alpha)-\Delta$ 的两个分支：一个是在此对角线段下的三角形，另一个是 $(Y\times\alpha)-\Delta$ 的其余部分.

在图 6.33 中，我们图示了 $(Y\times\beta)-\Delta$ 和 $(Y\times\gamma)-\Delta$. 情况与图 6.32 所展示的相类似. 重要的是，要完全理解在 $(Y\times\beta)-\Delta$ 和 $(Y\times\gamma)-\Delta$ 上标记有单箭头的边，与 $(Y\times\alpha)-\Delta$ 上标记有单箭头的边相对应. 这些边中的每一条，对应于一些构形，其中机器人 B 固定在 v，而机器人 A 位于边 α 上的某处. 因此，由 $(Y\times\alpha)-\Delta$，$(Y\times\beta)-\Delta$ 和 $(Y\times\gamma)-\Delta$ 来构建 $(Y\times Y)-\Delta$ 时，这些边粘合在一起. 在构建 $(Y\times Y)-\Delta$ 时，标记有双箭头的边以类似的方式粘合在一起，标记有 3 箭头的边也同样如此.

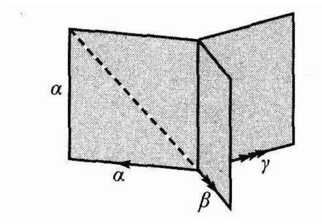


图 6.32 安全构形空间 $(Y\times Y)-\Delta$ 的子集 $(Y\times\alpha)-\Delta$

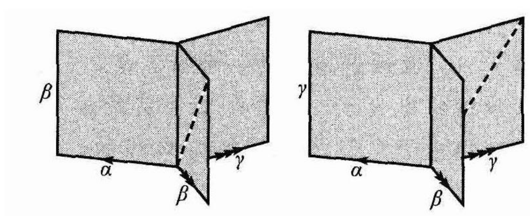


图 6.33 空间 $(Y\times\beta)-\Delta$ 和 $(Y\times\gamma)-\Delta$

取 $(Y\times\alpha)-\Delta$，$(Y\times\beta)-\Delta$ 和 $(Y\times\gamma)-\Delta$，并把它们粘合在一起，使得这些箭头适当地相匹配，我们就得到如图 6.34 所示的安全构形空间 $SC^2(Y)=(Y\times Y)-\Delta$. 标记有 1，2 与 3 的部分，分别来自 $(Y\times\alpha)-\Delta$，$(Y\times\beta)-\Delta$ 和 $(Y\times\gamma)-\Delta$. 中间的洞，是与这两个机器人同时位于 v 所对应的已挖去的那个对角点. 安全构形空间 $SC^2(Y)$ 是道路连通的. 因此，这两个机器人在 Y 上是可以任意移动的.

在图 6.35 中，可直接俯视图 6.34 所示的 $SC^2(Y)$，我们描绘了对这两个机器人的重新放置，开始，机器人 A 靠近 α 的端点，然后，机器人 B 靠近 β 的端点来进行位置的转换. 而转换道路，则对应于这两个机器人以下方式的连续改变方向：

(1) 让机器人 B 保持固定，机器人 A 移动到点 v，然后移向边 γ 上.

(2) 让机器人 A 保持固定，机器人 B 移动到点 v，然后离开它在边 γ 上的最后位置.

(3) 让机器人 B 保持固定，机器人 A 回到点 v，然后离开它在边 β 上的最后位置.

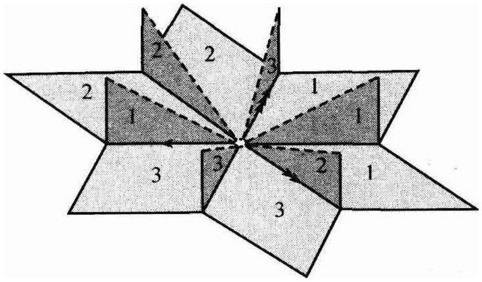


图 6.34 安全构形空间 $SC^2(Y)=(Y\times Y)-\Delta$

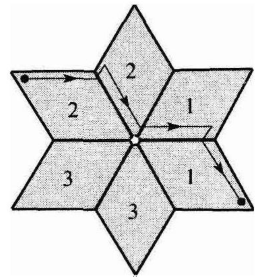


图 6.35 在 Y 上两个机器人通过位置转换而形成的重新放置

6.5 节练习

6.53 考虑在一条直线上两个机器人的安全构形空间 $SC^2(\mathbf{R})$. 对于以下的每种情况，画出 $SC^2(\mathbf{R})$ 的一条线段，以说明所描述的重新放置：

(1) 机器人 B 在机器人 A 的左侧，它们彼此以相反方向朝对方靠拢.

(2) 机器人 B 在机器人 A 的左侧，它们都朝左移动，机器人 B 的移动超过机器人 A.

(3) 机器人 A 在机器人 B 的左侧，它们彼此以相反方向离开.

(4) 机器人 A 在机器人 B 的左侧，它们都朝右移动，机器人 A 的移动超过机器人 B.

6.54 对于从圆周上两个机器人任意给定的构形到任何其他构形的重新放置，请描述其实现的一般过程.

6.55 请描述在 $\mathbf{R}$ 上移动的 3 个机器人的安全构形空间，指出组成此空间的不同道路分支有多少个，并讨论这些机器人的哪些相对位置与各个道路分支相对应.

6.56 设在直线上有两个机器人，而且在此直线上有一个特定的坐标 x_0，这两个机器人都不能出现. 请对此情况的安全构形空间画出草图并加以描述. 指出组成此空间的不同道路分支有多少个，并讨论这些机器人的哪些相对位置与各个道路分支相对应.

6.57 画出表示机器人位置转换一种重新放置的 $SC^2(Y)$ 上的一条道路，在一开始，这两个机器人都位于边 γ 上. 描述机器人相应的方向连续改变.

6.58 考虑图 6.36 的左边所示的在空间 P 上的两个机器人的安全构形空间 $SC^2(P)$.

(1) 空间 $SC^2(P)$ 作为 $SC^2(Y)$ 的一个商空间，可通过把 $SC^2(Y)$ 的各部分粘合在一起的方法而得到. 在 $SC^2(Y)$ 的图示上指出把哪些部分粘合在一起可得到 $SC^2(P)$.（提示：考虑如何通过把 Y 上的一些点视为同一点而得到.）

(2) 在 $SC^2(P)$ 的表示上，画出说明转换这些机器人位置的一种重新放置的一条道路的草图. 在一开始，机器人 A 在 P 的顶部，而机器人 B 在 P 的底部. 描述机器人相应的方向连续改变.

6.59 考虑图 6.36 的右边所示的在空间 X 上的两个机器人的安全构形空间 $SC^2(X)$.

(1) 画出 $SC^2(X)$ 的一种图示，说明它如何能以我们构造 $SC^2(Y)$ 类似的方式，借助将一些子集粘合在一起的方法构建出来.

(2) 对于你所作出的 $SC^2(X)$ 的图，画出说明转换这些机器人位置的一种重新放置的一条道路的草图. 在一开始，机器人 A 在 X 的左顶部，而机器人 B 在 X 的右顶部. 请描述机器人相应方向的连续改变.

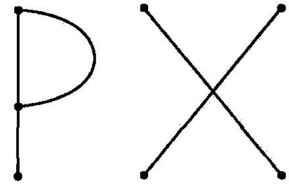


图 6.36 空间 P 和 X

第 7 章

紧致性

至今，我们已介绍过了拓扑学导论“3C”中的 2C：连续性（Continuity）和连通性（Connectedness）. 本章我们将提出第 3C：Compactness，即紧致性. 但这个概念并不像连续性和连通性那样直观. 在 $\mathbf{R}^n$ 中紧致集是有界闭集，但是在一般的拓扑空间中，紧致集不像所描述的那么简单. 事实上，对一个一般的拓扑空间，正式定义紧致性颇费了拓扑学家的一些工夫. 在 20 世纪早期拓扑学的发展期间，曾提出过几种定义. 最后，拓扑学家同意了在 1923 年由俄国数学家亚历山德罗夫（1896—1982）和乌雷松（1898—1924）所提出的紧致性的定义；现在我们在 7.1 节作介绍.

在 7.1 节，我们定义紧致性并考察某些有关的结果和例子. 度量空间中的紧致性在 7.2 节中提出. 在 7.3 节，我们证明极值定理，然后用它建立许多其他有用的结果. 在 7.4 节，我们研究极限点的紧致性，它是与紧致性相接近的一种性质. 最后，在 7.5 节，我们介绍单点紧化，这是一种通过为一个非紧致空间 X 添加一个单点，并定义一种适当的拓扑，使我们能够把此空间 X 看成是紧致空间的一个子空间的一种结构.

7.1 开覆盖与紧致空间

在图 7.1 所描绘的标准拓扑中，考虑 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集. 本章的目标是，确定图中标记“紧致”的子集与标记“非紧致”的子集之间的区别.

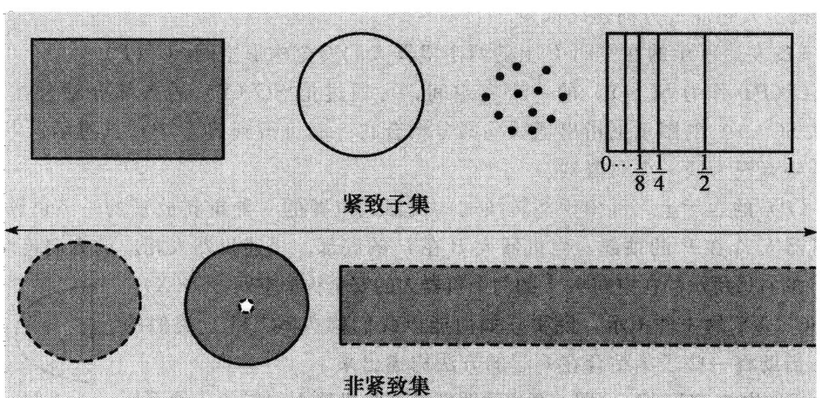


图 7.1 $\mathbf{R}^2$ 的“紧致”与“非紧致”子集

我们从某些与紧致性有关的重要定义开始讨论.

定义 7.1 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，并设 $\mathcal{O}$ 是 X 的一个子集族.

(1) 集族 $\mathcal{O}$ 称为**覆盖** A 或是 A 的一个**覆盖**，如果 A 包含于 $\mathcal{O}$ 中集合的并之内.

(2) 如果集族 $\mathcal{O}$ 覆盖 A，而且 $\mathcal{O}$ 中每个集合是开的，那么称 $\mathcal{O}$ 是 A 的一个**开覆盖**.（见图 7.2.）

(3) 如果 $\mathcal{O}$ 覆盖 A，而 $\mathcal{O}'$ 是 $\mathcal{O}$ 的同样覆盖 A 的一个子集族，那么 $\mathcal{O}'$ 称为 $\mathcal{O}$ 的一个**子覆盖**.

由基的定义可得到，一个拓扑空间 X 的任一基是 X 的一个开覆盖.

以下两个区间集族

$$\mathcal{O}_1 = \{\cdots,(-1,1),(0,2),(1,3),\cdots\} \text{ 与 } \mathcal{O}_2 = \{(-\infty,1),(0,\infty)\}$$

都是 $\mathbf{R}$ 的开覆盖. 当我们对这些集族进行观察时，既可能有由无限多个集合所组成的开覆盖，也可能有由有限多个集合所组成的开覆盖. 我们对这样的空间感兴趣，即它的任一包含无限多个集合的开覆盖，可以诱导包含有限多个集合的一个子覆盖. 特别地，我们有以下的定义：

定义 7.2 一个拓扑空间 X 是**紧致**的，如果 X 的任一开覆盖都有有限子覆盖.

例 7.1 在标准拓扑中的实轴 $\mathbf{R}$ 不是紧致的，由于

$$\mathcal{O} = \{\cdots,(-1,1),(0,2),(1,3),\cdots\}$$

是一个开覆盖，但是覆盖 $\mathbf{R}$ 的 $\mathcal{O}$ 的有限子集族不存在.（见图 7.3.）

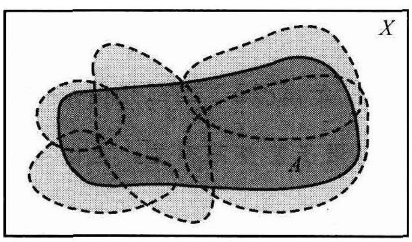


图 7.2 A 的一个开覆盖

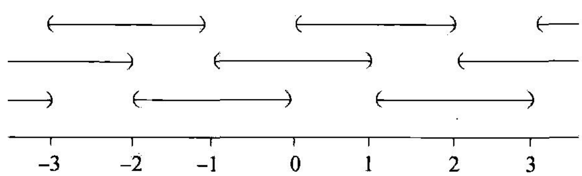


图 7.3 $\mathbf{R}$ 的不具有有限子覆盖的一个开覆盖

例 7.2 设 $X=\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是仅包含有限个点的一个拓扑空间. 那么 X 是紧致的，这是由于在 X 上的这个拓扑中仅有有限个开集，因此 X 的任一开覆盖已是有限的了.

我们把紧致性的定义推广到一个拓扑空间的子集.

定义 7.3 设 X 是一个拓扑空间，并假定 $A\subset X$. 那么 A 称为**在 X 中是紧致的**，如果 A 在传承自 X 的子空间拓扑中是紧致的.

以下的引理，使我们能够通过考虑由 X 中开集所组成的 A 的覆盖，而不是考虑由 X 上子空间拓扑中开集所组成的 A 的覆盖，来检验拓扑空间 X 的一个子空间 A 是不是紧致的：

引理 7.4 设 X 是一个拓扑空间，并假定 $A\subset X$. 那么 A 在 X 中是紧致的，当且仅当 A 的由 X 中开集所形成的任一覆盖存在有限的子覆盖.

证明 设 A 在 X 中是紧致的，并设 $\mathcal{O}$ 是 A 的由 X 中开集所形成的一个覆盖. 那么 $\mathcal{O}'=\{U\cap A \mid U\in \mathcal{O}\}$ 是 A 的由 A 中开集所形成一个覆盖. 因此，存在 $\mathcal{O}'$ 的一个有限子覆盖 $\{U_1\cap A, U_2\cap A, \cdots, U_n\cap A\}$. 但是，$\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ 是 $\mathcal{O}$ 的一个有限子覆盖. 所以，由 X 中开集所形成的任一覆盖，存在有限的子覆盖.

反过来，设 A 的由 X 中开集所形成的任一覆盖，存在有限的子覆盖. 假定 $\mathcal{O}=$

$\{V_\beta\}_{\beta\in B}$是由 A 中开集所形成的 A 的一个覆盖．于是，由子空间拓扑的定义，对于任一 V_β，在 X 中存在一个开集 U_β，使得 $V_\beta=U_\beta\cap A$．于是$\mathcal{O}'=\{U_\beta\}_{\beta\in B}$是由 X 中开集所形成的 A 的一个覆盖．由于$\mathcal{O}'$存在一个有限覆盖 $\{U_{\beta_1},\cdots,U_{\beta_n}\}$，于是得出，$\{V_{\beta_1},\cdots,V_{\beta_n}\}$ 是$\mathcal{O}$的一个有限的子覆盖．于是，A 的由 A 中开集所形成的任一覆盖，有一个有限的子覆盖，因而 A 是紧致的． ∎

例 7.3 在 $\mathbf{R}$ 中，子集 $A=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}^+\right\}$是紧致的．为了看出这一点，设$\mathcal{O}$是由 $\mathbf{R}$ 中开集所形成的 A 的一个覆盖．在$\mathcal{O}$中至少存在一个包含点 0 的开集 U_0．这一开集包含 A 中所有的，但至多有限多个点．（见图 7.4.）如果 U_0 包含 A 中所有的点，那么 U_0 对于自身来说，是$\mathcal{O}$的一个有限子覆盖．另一方面，设$\frac{1}{m}$是 A 中不在 U_0 中的最小点．对于任一点$\frac{1}{i}$，在$\mathcal{O}$中存在包含它的一个开集 U_i．于是得出，有限集族 $\{U_0,U_1,\cdots,U_m\}$ 是$\mathcal{O}$的一个子覆盖．因此，A 在 $\mathbf{R}$ 中是紧致的．

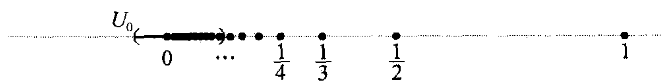


图 7.4　U_0 包含 A 中所有的但有限多个点

例 7.4 考虑 $\mathbf{R}$ 的一个子空间 $(0,1]$．此空间不是紧致的．集族$\mathcal{O}=\left\{\left(\frac{1}{n},2\right)\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}^+\right\}$是 $(0,1]$ 的由 $\mathbf{R}$ 中开集所形成一个覆盖．$\mathcal{O}$的覆盖 $(0,1]$ 的有限子集族不存在，因而 $(0,1]$ 与 $\mathbf{R}$ 的子空间一样，都不是紧致的．

两个同胚的空间要么都紧致，要么都不紧致．通过一个同胚，一个空间的任一开覆盖$\mathcal{O}$，就成为另一个空间的一个开覆盖$\mathcal{O}'$．类似地，通过同胚，$\mathcal{O}$的任一有限子覆盖，就成为$\mathcal{O}'$的一个有限子覆盖．

由于 $\mathbf{R}$ 与 $(0,1]$ 不是紧致的．于是可得出，形如 (a,b)，$(-\infty,b)(a,\infty)$，$[a,b)$，$[a,\infty)$，$(a,b]$，$(-\infty,b)$ 的任一开区间同样不是紧致的．形如 $[a,b]$ 的区间的情况如何呢？在下一节我们将证明这些区间在标准拓扑中是紧致的．

实际上我们并不需要全凭同胚来确保一个紧致空间映射到一个紧致空间．以下的定理断言，正如连通性和道路连通性一样，连续函数保持紧致性．

定理 7.5 设 $f: X\to Y$ 是连续的，并设 A 在 X 中是紧致的．那么，$f(A)$ 在 Y 中是紧致的．

证明 设 $f: X\to Y$ 是连续的，并设 A 在 X 中是紧致的．为了证明 $f(A)$ 在 Y 中是紧致的，设$\mathcal{O}$是 $f(A)$ 的由 Y 中开集所形成一个覆盖．那么，对于$\mathcal{O}$中的任一开集 U，$f^{-1}(U)$ 在 X 中是开的．因此，$\mathcal{O}'=\{f^{-1}(U)\mid U\in\mathcal{O}\}$ 是 A 的由 X 中开集所形成一个覆盖．由于 A 是紧致的，引理 7.4 蕴涵，存在$\mathcal{O}'$的有限子集族，例如 $\{f^{-1}(U_1),\cdots,f^{-1}(U_n)\}$ 覆盖 A．于是$\mathcal{O}$的开集族 $\{U_1,\cdots,U_n\}$ 覆盖 $f(A)$．因此，$\mathcal{O}$有一个有限子覆盖，蕴涵 $f(A)$ 在 Y 中是紧致的． ∎

定理 7.5 的一个直接结论是，一个紧致空间 X 的商空间是紧致的，由于它是 X 在一个商映射下的原象，而商映射是一个连续函数.

以下的定理为紧致集的并与交的紧致性提供了某些结论：

定理 7.6 设 X 是一个拓扑空间.

(1) 如果 C_1，…，C_n 在 X 中都是紧致的，那么 $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ 在 X 中是紧致的.

(2) 如果 X 是一个豪斯多夫空间，而 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 在 X 中是紧致的一个集族. 那么 $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ 在 X 中是紧致的.

证明 见练习 7.2. ■

紧致集的任意并未必是紧致的（见练习 7.3). 而如果我们在定理 7.6 的第二部分放弃 X 是豪斯多夫空间的假定，那么紧致集的交集未必是紧致的（见练习 7.18).

以下两个定理说明，闭与紧致是相近的、有关联的性质.

定理 7.7 设 X 是一个拓扑空间，并设 D 在 X 中是紧致的. 如果 C 在 X 中是闭的，且 $C\subset D$，那么 C 在 X 中是紧致的.

证明 设 D 在拓扑空间 X 中是紧致的. 并设 C 在 X 中是闭的，且 $C\subset D$. 此外，还设 $\mathcal{O}$ 是 C 的由 X 中开集所形成一个覆盖. 集合 $X-C$ 是开的. 把 $X-C$ 添加到集族 $\mathcal{O}$ 中就得到一个新的集族 $\mathcal{O}'=\mathcal{O}\cup\{X-C\}$.（见图 7.5.）集族 $\mathcal{O}'$ 是 X 的一个开覆盖，因而是 D 的一个开覆盖. 由于 D 在 X 中是紧致的，存在 $\mathcal{O}'$ 的覆盖 D 的一个有限子覆盖. 集合 C 被 $\mathcal{O}'$ 的这个有限子覆盖中的那些集合所覆盖，这些集合原来是在 $\mathcal{O}'$ 中的. 因此，存在 $\mathcal{O}$ 的覆盖 C 的一个有限子覆盖，蕴涵 C 在 X 中是紧致的. ■

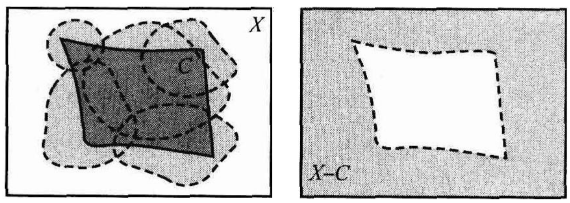


图 7.5 把 $X-C$ 添加到 C 的一个开覆盖中，得到整个空间 X 的一个开覆盖

定理 7.7 意味着，一个紧致空间的闭子集是紧致的. 然而，反过来的关系一般不成立. 以下的例子说明，在一个拓扑空间中的紧致集，未必是一个闭集.

例 7.5 考虑在有限补拓扑中的实轴 $\mathbf{R}_{fc}$. $\mathbf{R}_{fc}$ 的任一子集是紧致的.（见练习 7.1.）撇开整个集本身，任何其他无限集 $A\subset\mathbf{R}_{fc}$ 不是闭集. 这是由于，这样的集合 A 不是开集. 因此，存在 $\mathbf{R}_{fc}$ 的子集是紧致的，但却不是闭的.

在一个拓扑空间中的紧致集，虽然未必是一个闭集，但是以下的定理却指出，存在一般的状况，此时紧致集自动地是一个闭集.

定理 7.8 设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间，并设 A 在 X 中是紧致的. 那么，A 在 X 中是闭的.

证明 设 A 在豪斯多夫空间 X 中是紧致的. 为了证明 A 是闭的，就要证明 $X-A$ 是开的. 于是，设 $x\in X-A$，我们来证明，存在一个开集 U，使得 $x\in U\subset X-A$.

由于 X 是豪斯多夫空间，我们知道，对于任一 $a\in A$，存在分离开集 U_a 和 V_a，使得 $x\in U_a$，且 $a\in V_a$.（见图 7.6.）于是，$\mathcal{O}=\{V_a\}_{a\in A}$ 是 A 中的一个开集. 由于 A 是紧致的，

所以存在$\mathcal{O}$的一个有限子覆盖 $\{V_{a_1}, \cdots, V_{a_n}\}$. 设 $V=\bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$ 和 $U=\bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i}$. 于是，$U$ 和 V 是使得 $A\subset U$ 且 $x\in U$ 的开集. 此外，由于对于任一 i，U_{a_i} 与 V_{a_i} 是分离的，由此得出 U 和 V 同样是分离的，因而存在一个开集 U，使得 $x\in U\subset X-A$，这正是我们所要证明的. 因此，$X-A$ 是开的，蕴涵 A 是闭的. ■

以下的引理有助于我们随后证明有限多个紧致空间的积是紧致的.

引理 7.9(管状引理) *设 X 与 Y 是拓扑空间，并设 Y 是紧致的. 如果 $x\in X$，且 U 是 $X\times Y$ 中包含 $\{x\}\times Y$ 的一个开集，那么在 X 中存在 x 的一个邻域 W 使得 $W\times Y\subset U$.*

引理断言，如果在 $X\times Y$ 中的一个开集包含 $X\times Y$ 中的一个薄片 $\{x\}\times Y$，那么存在包含着此薄片，且包含于此开集的一个开的管子 $W\times Y$. (见图 7.7.) 注意，不作 Y 是紧致的假定，引理未必成立. (见练习 7.12.)

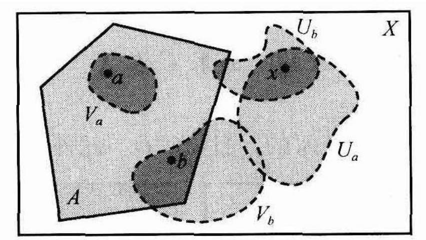


图 7.6 用豪斯多夫性质把 x 从 A 的点中分离出来

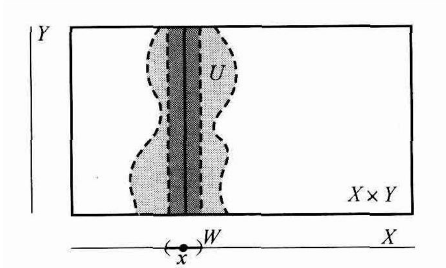


图 7.7 $W\times Y$ 包含于开集 U 之中

证明 对于任一 $y\in Y$，在 X 中取开集 W_y，并在 Y 中取开集 V_y，使得 $(x, y)\in W_y\times V_y\subset U$. 集族 $\{V_y\}_{y\in Y}$是 Y 的一个开覆盖. 由于 Y 是紧致的，因此有限多个这样的集合，例如 $V_{y_1}, \cdots, V_{y_n}$ 覆盖 Y. 设 $W=\bigcap_{i=1}^{n} W_{y_i}$. 于是 W 在 X 中是开集，而由于任一 W_y 包含 x，所以 W 包含 x. 注意到

$$W\times Y\subset \bigcup_{i=1}^{n}(W_{y_i}\times V_{y_i})\subset U.$$

因此，$W\times Y$ 包含 $\{x\}\times Y$，而正如我们希望的，它包含于 U 之中. ■

定理 7.10 *如果 X 与 Y 是紧致的拓扑空间，那么，乘积 $X\times Y$ 是紧致的.*

证明 设$\mathcal{O}$是 $X\times Y$ 的一个覆盖. 对于任一 $x\in X$，集合 $\{x\}\times Y$ 在 $X\times Y$ 中是紧致的. 因此，$\mathcal{O}$的一个有限子集族$\mathcal{O}_x$ 覆盖 $\{x\}\times Y$. 设 U_x 是在$\mathcal{O}_x$ 中这些集合的并. 集合 U_x 在$X\times Y$ 中是开的，且包含 $\{x\}\times Y$. 由引理 7.9，对于任一 $x\in X$，存在一个开集 $W_x\subset X$，使得 $x\in W_x$ 且 $W_x\times Y\subset U_x$. 请注意$\mathcal{O}_x$ 覆盖 $W_x\times Y$.

集族$\mathcal{W}=\{W_x \mid x\in X\}$ 是 X 的一个开覆盖. 由于 X 是紧致的，它被 $\mathcal{W}$ 中的有限多个集，例如 $W_{x_1}, \cdots, W_{x_m}$所覆盖. 于是得出，$\mathcal{C}=\mathcal{O}_{x_1}\cup\cdots\cup\mathcal{O}_{x_m}$ 覆盖 $X\times Y$. 集族$\mathcal{C}$是$\mathcal{O}$的一个子集族，是有限的，且是有限集的一个有限并. 因此，$\mathcal{O}$有一个覆盖 $X\times Y$ 的有限子集族，蕴涵 $X\times Y$ 是紧致的. ■

请回想定理 3.9，如果 A 与 B 分别是拓扑空间 X 与 Y 的子集，那么，传承自 X 与 Y 的这

些子空间拓扑的乘积，与传承自 $X\times Y$ 的 $A\times B$ 的子空间拓扑是一样的. 特别地，定理 3.9 与 7.10 一起蕴涵，如果 A 是 X 的一个紧致集，而 B 是 Y 的一个紧致集，那么 $A\times B$ 是 $X\times Y$ 的一个紧致集. 利用这个结论和数学归纳法，于是我们就得到下列推论：

推论 7.11 设 X_1，…，X_n 是拓扑空间，并设对于任一 $i=1$，…，n，A_i 是 X_i 的紧致子集. 那么 $A_1\times\cdots\times A_n$ 是积空间 $X_1\times\cdots\times X_n$ 的紧致子集.

7.1 节练习

7.1 证明：任一集合 $A\subset\mathbf{R}$ 是在 $\mathbf{R}$ 上有限补拓扑中 $\mathbf{R}$ 的一个紧致子集.

7.2 **证明定理 7.6**：设 X 是一个拓扑空间.

注：虽然定理 7.6 列在定理 7.7 与定理 7.8 之前，但本题可用这两个定理来证明定理 7.6.

(1) 如果 C_1，…，C_n 在 X 中都是紧致的，那么 $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ 在 X 中是紧致的.

(2) 如果 X 是一个豪斯多夫空间，而 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 中一个紧致的集族. 那么 $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ 在 X 中是紧致的.

7.3 举例说明紧致集的任意并未必是紧致的.

7.4 证明：具有数字轴拓扑的 $\mathbf{Z}$ 不是紧致的.

7.5 设 $A=D-\{O\}$ 为在 $\mathbf{R}^2$ 中挖去原点的圆盘. 证明 A 不是紧致的.

7.6 考虑 $\mathbf{Z}$ 上由基 $\mathcal{B}=\{(-n, n)\mid n\in\mathbf{Z}^+\}$ 所生成的拓扑.

(1) 确定在此拓扑中 $(-5, 5)$ 是否为 $\mathbf{Z}$ 的紧致子集.

(2) 确定在此拓扑中 $\mathbf{Z}$ 是否为紧致的.

7.7 狄利克雷素数定理指出，如果 a，b 互素，那么，等差数列 $A_{a,b}=\{\cdots, a-2b, a-b, a, a+b, a+2b, \cdots\}$ 包含无限个素数. 利用此结果证明，在此等差数列拓扑中，$\mathbf{Z}$ 不是紧致的.

7.8 设 X 是一个紧致的拓扑空间，并设 $\{C_i\}_{i\in\mathbf{Z}^+}$ 是 X 中对任一 $i\in\mathbf{Z}^+$ 满足 $C_{i+1}\subset C_i$ 的非空闭集族. 证明 $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\neq\varnothing$.

7.9 证明：如果 X 是一个紧致的豪斯多夫空间，那么 X 是正规的.（提示：首先证明 X 是正则的.）

7.10 证明定理 7.10 的逆定理：如果 $X\times Y$ 是紧致的，那么 X 与 Y 也是紧致的.

7.11 (1) 设 f：$X\to Y$ 是一个连续的双射函数. 证明：如果 X 是紧致的，而 Y 是一个豪斯多夫空间，那么 f 是一个同胚.

(2) 举一个例子，其中 f：$X\to Y$ 是一个连续的双射函数，X 是紧致的，但 f 不是一个同胚.

(3) 举一个例子，其中 f：$X\to Y$ 是一个连续的双射函数，而 Y 是一个豪斯多夫空间，但 f 不是一个同胚.

7.12 证明：如果我们放弃 Y 是紧致的假定，那么管状引理未必成立. 也就是举一个非紧致空间 Y 及 $X\times Y$ 中一个开集 U 的例子，使得 U 包含一个薄片 $\{x\}\times Y\subset X\times Y$，但却不包含一个开管（其本身包含上述薄片的）$W\times Y$.

7.13 设 f：$X\to Y$ 是一个函数. f 的图形是由 $G=\{(x, f(x))\mid x\in X\}$ 定义的 $X\times Y$ 的子集.

(1) 在练习 4.10 中我们已证明过：如果 f：$X\to Y$ 是连续的，而 Y 是豪斯多夫空间，那么 G 是 $X\times Y$ 的一个闭子集. 在此我们要证明它的逆命题. 即假定 X 与 Y 是拓扑空间，并设 Y 是紧致的. 证明：如果 G 是 $X\times Y$ 的一个闭子集，那么 f 是连续的.（提示：已知 U 在 Y 中是开的，且 $x\in f^{-1}(U)$，证明薄片 $\{x\}\times Y$ 包含于开集 $(X\times Y-G)\cup(X\times U)$ 之中，然后再应用管状引理.）

(2) 证明：如果我们放弃 Y 是紧致的假定，那么 (1) 中的结论未必成立. 也就是举例说明 Y 是非紧

致空间，而函数 $f: X \to Y$ 使得 f 的图形是 $X \times Y$ 的一个闭子集，但是 f 不连续.

7.2　度量空间中的紧致性

在实分析中，那里的焦点是具有标准度量和标准拓扑的 $\mathbf{R}^n$，一个集合有时定义为是紧致的，如果它是闭的和有界的. 本节我们将证明，这样的定义与已经给出的拓扑学的定义是相容的. 于是我们提出，把定义的这种等价性的范围，转化为一般的度量空间. 随后，我们对一个度量空间中的紧致集，提出某些重要的收敛性质.

我们从以下的引理开始，然后用它来证明 $\mathbf{R}$ 中的有界闭区间是紧致的.

引理 7.12(区间套引理)　设 $\{[a_n, b_n]\}_{n\in \mathbf{Z}^+}$ 是 $\mathbf{R}$ 中对于任一 $n\in \mathbf{Z}^+$，使得 $[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]$ 成立的一个非空有界闭区间的集族. 那么，$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ 是非空的.

证明　假定对于任一 $n\in \mathbf{Z}^+$，如图 7.8 所示，$[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]$ 成立. 于是得出，这些区间的端点满足不等式

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1.$$

集合 $\{a_n\}_{n\in \mathbf{Z}^+}$ 是有上界（例如对于任一 b_n）的，因而有一个上确界 A. 同样，$\{b_n\}_{n\in \mathbf{Z}^+}$ 有一个下确界 B. 注意到 $A\leqslant B$，因而 $[A, B]$ 是非空的.

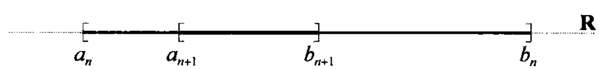


图 7.8　对于任一 n，区间 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ 是 $[a_n, b_n]$ 的一个子集

我们断言，$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]=[A, B]$，为了完成引理的证明. 首先，我们来证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]\subset[A, B]$. 于是，设 $x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. 那么，对于任一 $x\in[a_n, b_n]$，蕴涵对于所有 n，都有 $x\geqslant a_n$ 且 $x\leqslant b_n$. 因此，$x\geqslant A$ 且 $x\leqslant B$，即 $x\in[A, B]$. 因此，$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]\subset[A, B]$.

为了证明 $[A, B]\subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，设任一 $x\in[A, B]$. 那么，对于所有 n，都有 $x\geqslant a_n$ 且 $x\leqslant b_n$. 因此，$x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. 于是 $[A, B]\subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，因而得出 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]=[A, B]$. ■

如果我们用开区间取代闭区间，引理 7.12 就未必成立. 例如，非空有界开区间的集族 $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right) \middle| n\in \mathbf{Z}^+\right\}$，对于任一 $n\in \mathbf{Z}^+$，满足条件 $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)\subset\left(0, \frac{1}{n}\right)$，但 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right)=\varnothing$.

定理 7.13　任一有界闭区间 $[a, b]$ 是具有标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 的一个紧致子集.

证明　设 $\mathcal{O}$ 是 $[a, b]$ 的由 $\mathbf{R}$ 中的开集所形成一个覆盖. 为了引出矛盾，假定 $\mathcal{O}$ 不存在覆盖 $[a, b]$ 的有限子集族.

考虑通过把区间 $[a, b]$ 分为一半而得到的区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. 集族 $\mathcal{O}$ 覆盖这两个区间. 对其中至少一个区间，$\mathcal{O}$ 不存在包含它的有限子集族.（否则 $\mathcal{O}$ 存在覆盖 $[a, b]$

的一个有限子集族，这与我们的假定矛盾.）取 $[a, b]$ 的这一半，并记为 $[a_1, b_1]$.

以类似的方式可选取 $[a_1, b_1]$ 的一半，它不被 $\mathcal{O}$ 的一个有限子集族所覆盖，并把它记为 $[a_2, b_2]$.

重复这一过程. 换句话说，给定不被 $\mathcal{O}$ 的一个有限子集族所覆盖的 $[a, b]$ 的一个子集 $[a_n, b_n]$，选取 $[a_n, b_n]$ 的一半，它不被 $\mathcal{O}$ 的一个有限子集族所覆盖，并把它记为 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.（见图 7.9.）

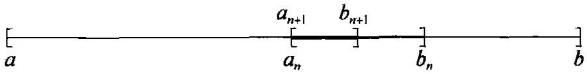


图 7.9　任一区间 $[a_n, b_n]$ 不被 $\mathcal{O}$ 的一个有限子集族所覆盖

考虑区间的集族 $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$. 根据这些区间的构造，对于任一 $n\in\mathbf{Z}^+$，以下的命题成立：

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]$.

(2) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$.

(3) $[a_n, b_n]$ 不被 $\mathcal{O}$ 的一个有限子集族所覆盖.

由引理 7.12 可得，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ 非空. 设 x 在此交集中. 于是，$x\in[a, b]$，因而存在 $U\in\mathcal{O}$，使得 $x\in U$. 由于 U 在 $\mathbf{R}$ 中是开集，所以存在 $\varepsilon>0$，使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subset U$. 设 N 是使得 $\dfrac{b-a}{2^N}<\varepsilon$ 的一个充分大的正整数. 由于 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，于是得出 $x\in[a_N, b_N]$. 此外，由于 $b_N-a_N=\dfrac{b-a}{2^N}<\varepsilon$，可得 $[a_N, b_N]\subset(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subset U$. 但是 $[a_N, b_N]$ 由 $\mathcal{O}$ 中的一个单点所覆盖. 这就与 $[a_N, b_N]$ 不被 $\mathcal{O}$ 的一个有限子集族所覆盖这一事实相矛盾.

因此，$\mathcal{O}$ 的一个有限子集族必定覆盖 $[a, b]$，因而得出 $[a, b]$ 是紧致的结论. ■

例 7.6　回想例 3.17，一个拓扑图，是通过取有限多个点（顶点）和有限多个闭区间，并把区间的端点与顶点粘合起来而得到的一个空间. 一个有限多个点和有限多个闭区间的集族，是一个紧致空间，这是由于它是紧致空间的一个有限并. 因此，每个拓扑图是紧致的，由于它是一个紧致空间在一个商映射下的原象.

在以下的定理中，我们把定理推广为在 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭区间的乘积相应的结论. 证明直接根据定理 7.13 和推论 7.11.

定理 7.14　设 $[a_1, b_1]$，…，$[a_n, b_n]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的有界闭区间. 那么，$[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个紧致子集.（见图 7.10.）

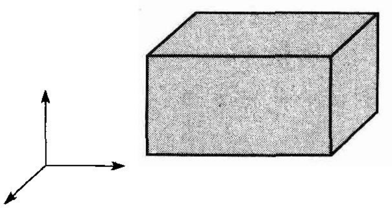


图 7.10　有界闭区间的乘积是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个紧致子集

于是利用定理 7.14，我们就能完全确定在标准拓扑中 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致子集. 请回忆在一个度量空间 (X, d) 中，集合 A 是有界的，如果对于任一 $x, y\in A$，存在 $m>0$，使得 $d(x, y)\leqslant m$.

定理 7.15　设 $\mathbf{R}^n$ 有标准拓扑和标准度量 d. 在 $\mathbf{R}^n$ 中的集合 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是紧致的，当且仅当

它是闭的且有界.

证明 设 A 在 $\mathbf{R}^n$ 中是紧致的. 那么，由于 $\mathbf{R}^n$ 是豪斯多夫空间，由定理 7.8 可得出，A 是闭的. 为了推出 A 是有界的，考虑由 $\mathbf{R}^n$ 内中心在原点的开球所组成的集族 $\mathcal{O}=\{B(O, n) \mid n\in \mathbf{Z}^+\}$. 集族 $\mathcal{O}$ 是 A 的一个开覆盖，而由于 A 是紧致的，可得出 $\mathcal{O}$ 中有限多个的集合覆盖 A. 于是，存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得 $A\subset B(O, N)$. 因此，对于 x，$y\in A$，我们有 $d(x, y)<2N$，蕴涵 A 是有界的.

再假定 A 是有界且是闭的. 设 $a=(a_1, \cdots, a_n)$ 是 A 中的一个点，并假定对于 A 中的所有 x，y，都有 $d(x, y)<M$. 于是，如图 7.11 所示的 2 维情况，A 包含于区间的乘积

$$P=[a_1-M, a_1+M]\times\cdots\times[a_n-M, a_n+M]$$

之中. 由定理 7.14，集合 P 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个紧致子集. 由于 A 是闭的且是 P 的一个子集，于是由定理 7.7 可得出，A 在 $\mathbf{R}^n$ 中是紧致的. ■

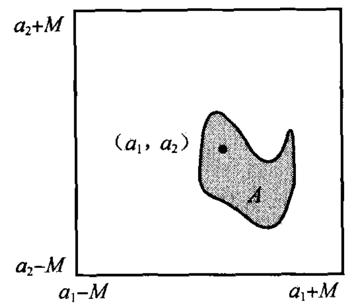


图 7.11 集合 A 是紧致集 $[a_1-M, a_1+M]\times[a_2-M, a_2+M]$ 的一个子集

对于具有标准拓扑和标准度量的 $\mathbf{R}^n$ 中的子集，定理 7.15 蕴涵，把紧致定义为闭且有界等价于定义为开覆盖.

再看图 7.1，我们发现，在平面中标记为"紧致"的那些集合，恰好是闭的且是有界的集合，而标记为"非紧致"的那些集合，是既非闭又无界的集合.

例 7.7 圆周 S^1 是紧致的，由于它是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个有界闭子集. 回想起一个纽结是 $\mathbf{R}^3$ 中 S^1 的一个嵌入. 由于 S^1 是紧致的，因此这样的一个嵌入的原象，在 $\mathbf{R}^3$ 中是紧致的. 我们通常认为，一个纽结是在 $\mathbf{R}^3$ 中一个嵌入的原象，而不是此纽结本身. 因此，我们称一个纽结是 $\mathbf{R}^3$ 的一个紧致子集.

例 7.8 环面 T 是紧致的. 我们可用以下 3 种方法来加以证明.

方法 1 环面是由一个圆周绕 z 轴旋转而得到的 $\mathbf{R}^3$ 的子空间（如例 3.5 所述）. 环面是闭的，由于已知在它的补集中的任意点，存在与此环面相分离的，一个半径充分小的以那个点为中心的一个开球. 而且，此环面是有界的，由于它包含于中心在原点，半径为 4 的球中. 因为此环面在 $\mathbf{R}^3$ 中是闭且有界的，所以它是紧致的.

方法 2 环面与积空间 $S^1\times S^1$ 是同胚的. 圆周 S^1 是紧致的. 因此，这个环面是两个紧致空间的乘积，因而是紧致的.

方法 3 环面与一个空间同胚，此空间是把正方形的对边视为相同而成的一个商空间而得到的. 此正方形是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个有界闭子集，因而是紧致的. 此外，在此正方形上的一个商映射，是一个连续函数，而在一个连续函数的映射下，一个紧致空间的原象是紧致的. 因此，这个环面是紧致的.

在例 7.8 中的第 2 种方法，还使我们能对于任何 $n>2$ 得出 n 维环面是一个紧致拓扑空间的结论. 此外，第 3 种方法还使我们能得出结论：圆环、默比乌斯带、克莱因瓶、球面和射影平面全都是紧致的.

而如果在定理 7.15 中，用一个任意的度量空间来代替 $\mathbf{R}^n$，那么在这种更一般的情况下，紧致还等价于闭且有界吗？回答是否定的. 这种等价有一种含义继续有效，即在一个度量空间中一个紧致子集，是闭且有界的. 然而，一个度量空间中闭且有界的子集未必是紧致的. 我们希望读者在练习 7.19 中证明这些结论.

在紧致性的概念方面，数学家试图获得的一种性质，是序列有一个收敛的子序列. 在以下的定理中，我们证明对于一个度量空间中的紧致集来说，上述结论成立.

定理 7.16 设 (X, d) 是一个度量空间，并设 A 在 X 中是紧致的. 如果 (x_n) 是 A 中的一个序列，那么，存在收敛于 A 中的一个极限的 (x_n) 的一个子序列 (x_{n_m}).

证明 我们断言，存在 $a\in A$，使得对于无限多个 n，所有以 a 为中心的非空开球都包含 x_n. 假设这个结论不成立. 那么，对于任一 $a\in A$，存在 ε_a，使得对于至多有限多个 n，$B_d(a, \varepsilon_a)$ 包含序列 (x_n) 的项. 考虑集族 $\mathcal{O}=\{B_d(a, \varepsilon_a)\}_{a\in A}$. 不存在有限个 $\mathcal{O}$ 的子集族能覆盖序列 (x_n)，由于仅对至多有限多个 n，每个集合 $B_d(a, \varepsilon_a)$ 包含序列 (x_n) 的项. 而在另一方面，$\mathcal{O}$ 是紧致集 A 的一个开覆盖，因而存在 $\mathcal{O}$ 的覆盖 A 的一个有限子集族. 由于此序列 (x_n) 是在 A 中，这就产生了矛盾. 于是，存在 $a\in A$，使得对于无限多个 n，所有以 a 为中心的非空开球都包含 x_n.

再对任一 $m\in\mathbf{Z}^+$，设 x_{n_m} 是在序列 (x_n) 中使得 $n_m>n_{m-1}$ 且 $x_{n_m}\in B_d\left(a, \dfrac{1}{m}\right)$ 的一个点. 于是，(x_{n_m}) 是 (x_n) 的收敛于 $a\in A$ 的一个子序列. ■

例 7.9 考虑由

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{16},\frac{3}{16},\cdots\right)$$

定义的 $[0, 1]$ 中的序列. 此序列在 $[0, 1]$ 中摆动，而在此序列中没有重复项. 然而，由于 $[0, 1]$ 是紧致的，由定理 7.16 可知，存在收敛于某点 $a\in[0, 1]$ 的一个子序列. 有趣的是，在这种情况下，我们可以做得更好. 事实上，对于任一 $a\in[0, 1]$，存在一个收敛于 a 的子序列.（见练习 7.20.）

对于度量空间来说，一个重要的收敛问题如下：如果在一个序列 (x_n) 中的点彼此越来越接近，那么此序列收敛吗？在本节余下的部分研究这个问题.

定义 7.17 设 (X, d) 是一个度量空间. X 中的一个序列 (x_n) 称为**柯西序列**，如果对于任一 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得对于任一 $n, m\geq N$，都有 $d(x_m, x_n)<\varepsilon$.

柯西序列定义中的条件意味着，当 n 充分大时，在此序列 (x_n) 中的点彼此越来越接近，但这个条件对此序列是否收敛并未提供什么信息. 对于 $\mathbf{R}^n$ 来说，以下的定理关于柯西序列的收敛提出了疑问：

定理 7.18 设 (x_n) 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有标准度量 d 的一个柯西序列. 那么 (x_n) 在 $\mathbf{R}^n$ 中收敛于一个极限.

证明 设 (x_n) 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个柯西序列. 取一个 $\mu>0$. 由于 (x_n) 是柯西序列，因此存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得对于任一 $n, m\geq N$，都有 $d(x_m, x_n)<\mu$. 设 C 是半径为 μ、中心为 x_N 的闭球. 那么，C 是一个紧致集，由于它是闭的且是有界的. 而序列 $(x_N, x_{N+1}, \cdots)$ 在 C 中.

由定理 7.16 可知，在 C 中序列（x_N，x_{N+1}，…）有一个收敛于极限 x^* 的子序列．我们断言，原序列（x_n）收敛于 x^*．

于是，设 $\varepsilon>0$．由于（x_n）是一个柯西序列，我们可以对任一 n，$m\geqslant N$ 选取 $M\in\mathbf{Z}^+$，使得对于任一 n，$m\geqslant N$，都有 $d(x_m, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$．再设任一 $k\geqslant M$．我们验证 $d(x_k, x^*)<\varepsilon$，以证明（x_n）收敛于 x^*．由于（x_N，x_{N+1}，…）有一个收敛于 x^* 的一个子序列，因此存在 $j\geqslant M$，使得 $d(x_j, x^*)<\frac{\varepsilon}{2}$．而 j，$k\geqslant M$ 意味着 $d(x_k, x_j)<\frac{\varepsilon}{2}$．因此，由三角不等式可得 $d(x_k, x^*)<\varepsilon$，这正是我们所希望的结果． ■

定义 7.19 一个度量空间称为**完备**的，如果 X 中的任一柯西序列收敛于 X 中的一个极限．

由定理 7.18 可得，具有标准度量的 $\mathbf{R}^n$，是一个完备的度量空间．然而，如果我们设 $X=\mathbf{R}-\{0\}$ 具有度量 $d(x, y)=|x-y|$，那么 X 就不是一个完备的度量空间了．序列 $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$ 在 X 中是一个柯西序列，但在 X 中却不收敛．

以下的定理是有关收敛的另一个有用的结论．

定理 7.20 如果 X 是一个紧致的度量空间，那么 X 是完备的．

证明 见练习 7.21． ■

7.2 节练习

7.14 如果我们用 $\mathbf{R}$ 中的非空闭集来取代 $\mathbf{R}$ 中的非空有界闭区间，引理 7.12 还成立吗？特别地，请证明以下的命题或举出反例：如果对于任一 $n\in\mathbf{Z}^+$，$\{A_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 是使得 $A_n\subset A_{n+1}$ 成立的 $\mathbf{R}$ 中的一个非空闭集族，那么 $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}^+} A_n$ 是非空的．

7.15 证明：$[0, 1]$ 在具有下限拓扑的 $\mathbf{R}$ 中不是一个紧致的子集．

7.16 如果 $\mathbf{R}_d$ 表示具有离散拓扑的 $\mathbf{R}$，对如图 7.12 所示的 $A=\{(x, 2)\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$ 与 $B=\{(3, y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2\}$，确定哪一个子集是 $\mathbf{R}_d\times\mathbf{R}$ 的一个紧致子集．

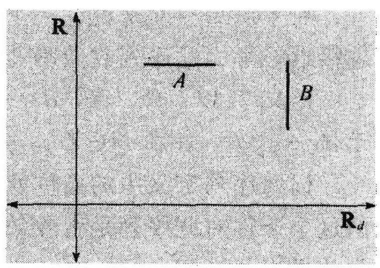


图 7.12 A 与 B，哪个是 $\mathbf{R}_d\times\mathbf{R}$ 的一个紧致子集

7.17 用紧致性来证明：平面与球面是不同胚的．（请回忆，在 6.2 节中，我们曾对许多对空间加以区别，包括直线与平面，以及直线与球面，但我们曾指出，我们还没有在位置上对平面与球面加以区别．而现在我们用紧致性就可以作出这种区别了．）

7.18 本题我们论证：如果我们在定理中放弃 X 是豪斯多夫空间的条件，那么 X 中紧致集的交，未必是一个紧致集．定义**附加点轴**（extra-point line）如下．设 $X=\mathbf{R}\cup\{p_e\}$，其中 p_e 是不包含在 $\mathbf{R}$ 之中的一个附加点．设 $\mathcal{B}$ 是由所有区间 $(a, b)\subset\mathbf{R}$ 及所有形如 $(c, 0)\cup\{p_e\}\cup(0, d)$ 的集合（$c<0$，$d>0$）所组成的 X 的子集族．

(1) 证明：$\mathcal{B}$ 是 X 上一个拓扑的一组基．

(2) 证明：X 上所得到的拓扑不是豪斯多夫的．

(3) 找 X 的两个紧致子集，它们的交不是紧致的．证明：这些集合是紧致的，而它们的交不是紧

致的.

7.19 (1) 设 (X, d) 是一个度量空间. 证明：如果 A 在 X 中是紧致的，那么 A 在 X 中是闭的，且在度量 d 下是有界的.

(2) 举例说明一个度量空间的一个子集可能是闭且有界的，但不是紧致的.

7.20 考虑在例 7.9 中所定义的序列. 证明对于任一 $a\in[0, 1]$，存在收敛于 a 的一个子序列.

7.21 证明定理 7.20：如果 X 是一个紧致的度量空间，那么 X 是完备的.

7.3 极值定理

与介值定理一样，极值定理是通常在微积分课程中引入的，以拓扑学为基础的一个定理. 正如我们在第 6 章所看到的，介值定理所涉及的是在一个连通的定义域上的实值函数. 本节我们来证明极值定理的一般形式，并考虑它的许多有用的结论.

为了起步，我们需要下列引理，它指出，实轴的每个紧致子集，包含一个最大值和最小值. (见图 7.13.)

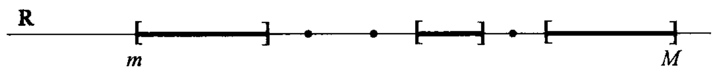


图 7.13 **R** 的每个紧致子集有最大值和最小值

引理 7.21 *设 A 是 $\mathbf{R}$ 的一个紧致子集. 那么对于所有 $a\in A$，存在 $m, M\in A$，使得 $m\leqslant a\leqslant M$.*

证明 在此，我们证明最大值 M 的存在性. 最小值 m 存在性的证明类似. 由于 A 是紧致的，它在 $\mathbf{R}$ 中是闭且有界的. 因此，A 有上界. 于是得出，A 有上确界，记为 M. 当然，对于所有 $a\in A$，$a\leqslant M$. 我们断言，$M\in A$. 我们通过推出矛盾来证明此断言. 设 $M\notin A$，由于 A 是闭的，所以可得出，存在一个 $\varepsilon>0$，使得 $(M-\varepsilon, M+\varepsilon)\cap A=\varnothing$. 于是，$M-\frac{\varepsilon}{2}$是 A 的小于 M 的一个上界，这就产生了矛盾. 因此，A 存在最大值. ■

再用引理 7.21，我们就可建立极值定理.

定理 7.22 (极值定理 (一般形式)) *设 X 是紧致的，而 $f: X\to\mathbf{R}$ 是连续的. 那么，f 在 X 上有最大值和最小值. 即存在 $a, b\in X$，使得对于所有的 $x\in X$，都有 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$.*

证明 由于 X 是紧致的，而且 f 是连续的，由定理 7.5，$f(X)$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个紧致子集. 因此由引理 7.21，$f(X)$ 包含一个最大值 M 和一个最小值 m. 点 m 与 M 在 $f(X)$ 中. 所以存在 $a, b\in X$，使得 $f(a)=m$ 与 $f(b)=M$. 而对于所有的 $x\in X$，我们有 $f(x)\in f(X)$，因而，$f(a)=m\leqslant f(x)\leqslant M=f(b)$，这正是我们所要证明的. ■

例 7.10 在极值定理的简单应用中，我们把地球表面看作一个球面，而地表的温度作为此球面上的一个连续函数. 由于球面是紧致的，极值定理就确保，在地球上的某处存在一个点或一些点，那里的温度比地球上任何其他点的温度都要高，而且还存在一些点，那里的温度比地球上任何其他点的温度都要低.

定理 7.22 的以下推论，是在微积分课程中通常遇到的极值定理的形式. 如果我们设 $X=$

$[a, b]$，它就可以从定理 7.22 推出.

推论 7.23（在 [a, b] 上的极值定理） 假定 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是连续的. 那么，f 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值.

把极值定理与介值定理相结合，就可以得到下列推论：

推论 7.24 设 $[a, b]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的一个有界闭区间，并假定 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是连续的. 那么，f 的象是 $\mathbf{R}$ 中的一个有界闭区间.（见图 7.14.）

证明 见练习 7.22. ■

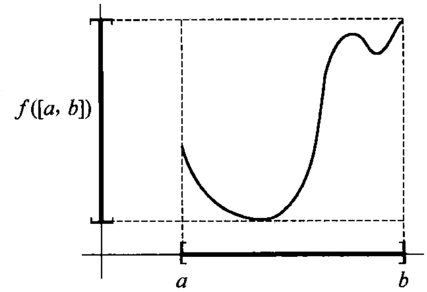


图 7.14　对于一个连续函数 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$，f 的象 $f([a, b])$ 是 $\mathbf{R}$ 中的一个有界闭区间

极值定理是一类最优化定理和应用的基础. 考虑以下的例子：

例 7.11 克莱因出版社的出版商们，想抓住人们热衷于应用拓扑学的新浪潮. 他们计划出版一部应用拓扑学的教材，与市场上那些现行的教材来竞争. 经营部门答应为首版发行提供 50 万美元的经费. 这项经费分配于图书制作的几个方面，包括著作权合同、编辑费、印刷费、广告费和发行费. 设存在 n 个变量 $v_1, \cdots, v_n$. 出版商们进行这次风险投资所能预期的收益，取决于对这些资源如何分配. 例如，如果他们选择以高价格的默比乌斯带的版本格式和最小的广告经费，与他们曾经用过的标准版本格式和最大的广告经费相比，将给他们带来较小的利益. 于是我们就把收益 P，当作变量 $v_1, \cdots, v_n$ 的一个函数. 当然要假定 P 是连续的. P 的定义域是由

$$D = \{(v_1, \cdots, v_n) \mid v_1 \geqslant 0, \cdots, v_n \geqslant 0, v_1 + \cdots + v_n \leqslant 500\,000\}$$

所给出的 $\mathbf{R}^n$ 的子集. 由于 D 是有界闭集，它是紧致的. 因此，极值定理蕴涵，对于教科书的计划方案，存在有关资源分配的一种选择.

然而，极值定理并没有告诉我们如何找一个函数的最大值和最小值，但它确保它们存在. 这是一类典型的拓扑学定理. 同介值定理一样，极值定理断言具有特定性质的点的存在性，但不能提供它的精确位置.

以下的两个定理，将有助于我们建立本书随后的一些结论. 极值定理被用于各个结论的证明之中.

我们回忆起，如果 A 与 B 是一个度量空间 (X, d) 的子集，那么我们定义 A 与 B 之间的距离为

$$d(A,B) = glb\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

以下的定理指出，在一个度量空间中的两个分离紧致集之间，存在一个正的距离.

定理 7.25 设 (X, d) 是一个度量空间. 如果 A 与 B 是 X 的分离紧致集，那么 $d(A, B) > 0$.

证明 距离函数 $d: X \times X \to \mathbf{R}$ 是连续的（见练习 5.13），而由推论 7.11，集合 $A \times B$ 在 $X \times X$ 中是紧致的. 因此，极值定理适用，且意味着 d 在 $A \times B$ 上有最小值. 也就是说，对于任一 $a \in A$ 及 $b \in B$，存在 $a^* \in A$ 及 $b^* \in B$，使得 $d(a^*, b^*) \leqslant d(a, b)$. 于是得出，$d(A,$

$B)=d(a^*, b^*)$. 由于 A 与 B 是分离的，$a^* \neq b^*$，因而 $d(a^*, b^*)>0$. 因此，$d(A, B)>0$，这正是我们要的结论. ■

重要注记 如果我们用"闭"取代"紧致"，定理 7.25 的结论就不成立. 即在一个度量空间中，可能存在满足 $d(A, B)=0$ 的分离闭集 A 与 B.（见练习 7.23.）

在下一个结论中，我们使用的一些函数，是通过求一个点与一个度量空间中一个集合的距离来定义的. 特别地，设 X 是一个度量空间，并设 A 是 X 的一个子集. 由 $f_A(x)=d(\{x\}, A)$ 来定义 f_A: $X \to \mathbf{R}$. 于是，$f_A(x)$ 是单点集 $\{x\}$ 与集合 A 之间的距离. 我们可以把它认为是点 x 与集合 A 之间的距离.

引理 7.26 设 (X, d) 是一个度量空间，并设 A 是 X 的一个子集. 由 $f_A(x)=d(\{x\}, A)$ 定义的函数 f_A: $X \to \mathbf{R}$ 是连续的.

证明 见练习 7.24. ■

以下的引理告诉我们，已知一个紧致度量空间的一个开覆盖存在一个阈值，使得任一具有半径小于此阈值的开球，确保位于此开覆盖中的某个集合之中.

引理 7.27（勒贝格数引理） 设 (X, d) 是一个度量空间，并设 $\mathcal{O}$ 是 X 的一个开覆盖. 那么，存在一个 $\lambda>0$，使得对于任一 $x \in X$，存在一个 $U \in \mathcal{O}$，满足 $B_d(x, \lambda) \subset U$.

数 λ 称为此覆盖 $\mathcal{O}$ 的一个**勒贝格数**.

证明 设 $\mathcal{O}$ 是 X 的一个开覆盖. 如果整个空间 X 在此覆盖之中，那么任何 $\lambda>0$ 都可作为此覆盖的一个勒贝格数. 于是，假定 X 不是此覆盖中的集合. ■

由于 X 是紧致的，$\mathcal{O}$ 中有有限多个集合，例如 $U_1, \cdots, U_n$ 覆盖 X. 对于每个 $i=1, \cdots, n$，设 $C_i=X-U_i$. 每个 C_i 是非空的，由于我们假定 $\mathcal{O}$ 中没有集合等于 X. 由

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{C_i}(x)$$

定义 f: $X \to \mathbf{R}$. 于是，$f(x)$ 是 x 与任一集合 C_i 之间距离的平均值.

我们断言，对任一 $x \in X$，都有 $f(x)>0$. 为了证明此断言，设 $x \in X$. 由于集合 U_i 覆盖 X，因此存在 k，使得 $x \in U_k$. 集合 U_k 是开集，因此存在 $\varepsilon>0$，使得 $B_d(x, \varepsilon) \in U_k$. 于是得到 $f_{C_k}(x)>\varepsilon$，因而 $f(x)>\frac{\varepsilon}{n}$.

函数 f 是连续的，由引理 7.26，每个 f_{C_i} 是连续的，而又由于连续函数相加与相乘仍是连续的.（见练习 4.16.）此外，f 的定义域是紧致的. 因此极值定理蕴涵，f 取得一个极小值 λ. 由于对于所有的 x，都有 $f(x)>0$，所以必定成立 $\lambda>0$.

我们再来证明 λ 是所要求的勒贝格数. 于是，设 $x \in X$，并考虑 $B_d(x, \lambda)$. 我们断言，此开球至少是集合 U_i 之一的一个子集，因而是来自覆盖 $\mathcal{O}$ 的某个集合的一个子集. 设集合 U_i 中没有一个集合包含 $B_d(x, \lambda)$. 于是，对于所有的 i，$f_{C_i}(x)<\lambda$，这蕴涵 $f(x)<\lambda$. 但这与 λ 是 f 在 X 上的绝对最小值的事实相矛盾. 于是就得到，λ 满足此引理的要求.

我们将发现，引理 7.27 的下列推论，有助于我们在本书随后的章节所进行的某些工作.

推论 7.28 设 $\mathcal{O}$ 是有界闭区间 $[a, b]$ 的，由 $\mathbf{R}$ 中的一些开集形成的一个覆盖. 那么，存在 $[a, b]$ 的一个剖分

$$a = a_0 < a_1 < \cdots a_n = b,$$

使得对于每个 $j=1, \cdots, n$，存在一个包含 $[a_{j-1}, a_j]$ 的 $U_j \in \mathcal{O}$.

证明 见练习 7.26. ■

微积分的基本定理是用极值定理来证明的另一个定理. 特别地，极值定理可用于证明与中值定理等价的罗尔定理. 而在证明微积分基本定理时，中值定理是所使用的一个重要工具.

在第 9 章，我们将用拓扑学的工具来证明代数学的基本定理. 不过，我们还不至于说微积分基本定理和代数学基本定理就是拓扑学的定理. 然而，洞察代数学、分析学（微积分是它的一部分）和拓扑学这 3 门学科是如何纠缠在一起的，是很重要的. 虽然它们在一个基础数学的课程计划预备阶段是独特的、不同的课程. 但它们所涵盖的论题、工具和性质并没有什么本质上的差别. 对此我们不应该感到意外，由于这些学科全都来源于对实数系、欧氏空间和它们之间的函数的结构的理解.

7.3 节练习

7.22 **证明推论 7.24**：设 $[a, b]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的一个有界闭区间，并假定 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是连续的. 那么，f 的象是 $\mathbf{R}$ 中的一个有界闭区间.

7.23 在度量空间 (X, d) 中举一个例子，使得闭集 A 与 B 是分离集，且 $d(A, B)=0$.

7.24 **证明引理 7.26**：设 (X, d) 是一个度量空间，并设 A 是 X 的一个子集. 由 $f_A(x)=d(\{x\}, A)$ 定义的函数 $f_A: X \to \mathbf{R}$ 是连续的.

7.25 举例说明，如果放弃空间是紧致的假定，勒贝格数就不存在.

7.26 **证明推论 7.28**：设$\mathcal{O}$是有界闭区间 $[a, b]$ 的由 $\mathbf{R}$ 中的一些开集形成的一个覆盖. 那么，存在 $[a, b]$ 的一个剖分 $a=a_0<a_1<\cdots a_n=b$，使得对于每个 $j=1, \cdots, n$，存在一个包含 $[a_{j-1}, a_j]$ 的 $U_j \in \mathcal{O}$.

补充练习：蒂茨延拓定理

设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，并设 $f: A \to Y$ 是连续的. 知道是否能把 f 延拓到一个连续函数 $F: X \to Y$ 常常是很有意义的. 也就是说，是否存在一个连续函数 $F: X \to Y$，使得对于任一 $a \in A$，都有 $F(a)=f(a)$.

蒂茨延拓定理提供了一般的条件，在此条件下，可得到延拓存在的结论. 特别地，如果 A 是一个正规空间 X 的一个闭子集，而 $J \subset \mathbf{R}$ 要么是一个有界闭区间，要么是一个开区间，否则就是整个 $\mathbf{R}$，那么蒂茨延拓定理确保能把任一连续函数 $f: A \to J$ 延拓为连续函数 $F: X \to J$.

在以下的练习中，我们对以下特殊情况的蒂茨延拓定理进行证明. 一般的蒂茨延拓定理的证明可以在 [Mun] 中找到.

定理 7.29(度量空间中的蒂茨延拓定理) *设 A 是度量空间 X 的一个闭子集，那么，任一连续函数 $f: A \to [-1, 1]$可延拓为连续函数 $F: X \to [-1, 1]$.*

我们对蒂茨延拓定理的证明，使用了一致收敛定理（定理 4.13)，此定理已在 4.1 节中的一组练习中被建立.

我们将用蒂茨延拓定理来证明第 9 章中的收缩存在定理（定理 9.14). 然后在第 11 章用于对若尔当曲线定理的证明.

在证明定理 7.29 之前，我们需要几个辅助性结论. 以下的引理指出，如果 B 与 C 是度量空间 X 的一个

分离非空闭子集，那么存在一个实值连续函数，它在 B 与 C 上分别取常数值 b 与 c，而在 $B\cup C$ 的补集上取 b 与 c 之间的值：

引理 7.30 设 B 与 C 是度量空间 X 的一个分离非空闭子集，并假定 b，$c\in\mathbf{R}$，其中 $b<c$，那么存在一个连续函数 g：$X\to[b, c]$，使得 $B=g^{-1}(b)$ 且 $C=g^{-1}(c)$.

SE7.27 与引理 7.26 一样，设 $f_B(x)$ 与 $f_C(x)$ 分别是 $x\in X$ 与集合 B 与 C 之间的距离. 请证明：由

$$g(x)=\frac{cf_B(x)+bf_C(x)}{f_B(x)+f_C(x)}$$

所定义的函数 g：$X\to[b, c]$ 满足引理 7.30 的必要条件. 利用引理 7.30 就可以证明以下的引理，于是我们就能把它用来证明蒂茨延拓定理：

引理 7.31 设 X 是一个度量空间，且设 $A\subset X$ 是闭集. 假定 f：$A\to[-k, k]$ 是连续的. 那么，存在一个连续函数 g：$X\to\left[-\frac{k}{3}, \frac{k}{3}\right]$，使得对于所有 $a\in A$，都有

$$|f(a)-g(a)|\leqslant\frac{2k}{3}.$$

证明引理 7.31 的思路是让满足 $f(x)\leqslant-\frac{k}{3}$ 的那些 x，成立 $g(x)=-\frac{k}{3}$. 让满足 $f(x)\geqslant-\frac{k}{3}$ 的那些 x，成立 $g(x)=\frac{k}{3}$. 另外，让 g 在 $-\frac{k}{3}$ 与 $\frac{k}{3}$ 之间变动. （见图 7.15.）特别地，设 $B=f^{-1}\left(\left[-k, -\frac{k}{3}\right]\right)$ 且 $C=f^{-1}\left(\left[\frac{k}{3}, k\right]\right)$. 集合 B 和 C 是 A 的分离闭子集，而由于 A 在 X 中是闭的，因此集合 B 和 C 在 X 中也是闭的. 由引理 7.30，存在一个连续函数 g：$X\to\left[-\frac{k}{3}, \frac{k}{3}\right]$，使得 $g^{-1}\left(-\frac{k}{3}\right)=B$，$g^{-1}\left(\frac{k}{3}\right)=C$.

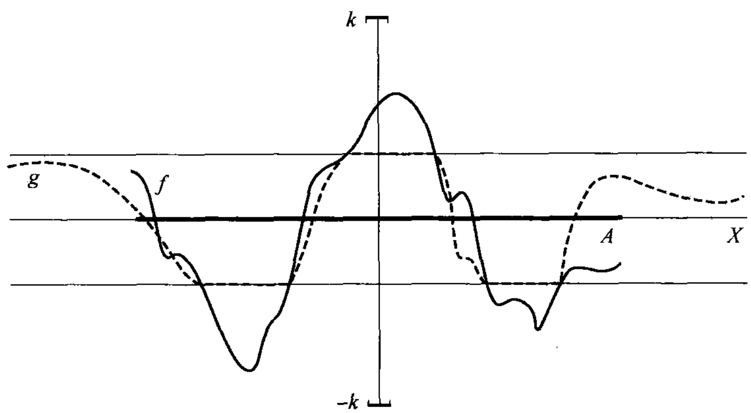


图 7.15　函数 g 近似于 f 且映射为 $\left[-\frac{k}{3}, \frac{k}{3}\right]$

SE7.28 证明对于任一 $a\in A$，都有 $|f(a)-g(a)|\leqslant\frac{2k}{3}$.

度量空间中蒂茨延拓定理的证明 设 A 是度量空间 X 的一个闭子集，并设 f：$A\to[-1, 1]$ 是连续函数. 为了证明此定理，我们在 X 上构建一个逐次逼近于 f 的连续函数序列 F_n. 按照此约定，我们在 X 上就得到一个与 A 上的函数 f 相等的连续函数 F.

由引理 7.31，存在一个函数 g_1：$X\to\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$，使得对于所有 $a\in A$，都有 $|f(a)-g_1(a)|\leqslant\frac{2}{3}$.

而此连续函数 $f-g_1$ 把 A 映射为区间 $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. 再用引理 7.31，存在一个函数 $g_2: X\to\left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]$，使得对于所有 $a\in A$，都有 $|f(a)-g_1(a)-g_2(a)|\leqslant\frac{4}{9}$. 继续上述过程，我们就得到一个连续函数的序列

$$g_n: X\to\left[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right],$$

使得对于任一 $a\in A$，都有

$$|f(a)-g_1(a)-\cdots-g_n(a)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

SE7.29 证明：对于任一 $x\in X$，都有 $|g_1(x)+\cdots+g_n(x)|\leqslant 1$.

对于任一 $n\in\mathbf{Z}^+$，由 $F_n(x)=g_1(x)+\cdots+g_n(x)$ 定义 $F_n: X\to[-1, 1]$. 每个函数 F_n 作为连续函数的和是连续的.

SE7.30 证明：对于任一 $x\in X$，函数值的序列 $(F_n(x))$ 是 $[-1, 1]$ 中的一个柯西序列.

由于对于任一 $x\in X$，$(F_n(x))$ 是 $[-1, 1]$ 中的一个柯西序列，定理 7.18 蕴涵序列 $(F_n(x))$ 收敛于一个极限 $F(x)\in[-1, 1]$. 按照这种方式定义了一个函数 $F: X\to[-1, 1]$. 我们断言，F 就是我们所要的 f 的延拓. 首先证明 F 是连续的.

SE7.31 证明函数序列 F_n 一致收敛于函数 F.

由一致收敛定理（定理 4.13）可得 F 是连续的.

SE7.32 证明 F 是 f 的一个延拓，即证明对于任一 $a\in A$，都有 $F(a)=f(a)$.

因此，F 就是我们所要求出的 f 的连续延拓，这就完成了蒂茨延拓定理的证明. ■

7.4 极限点紧致性

数学家采用我们在 7.1 节中所引进的紧致性定义之前，曾考虑过另外一些定义. 例如有以下的候选定义：

定义 7.32 一个拓扑空间 X 是**极限点紧致**的，如果 X 的无穷子集有一个极限点.

例 7.12 在 $\mathbf{R}$ 中子集 $A=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}^+\right\}$ 是极限点紧致的. 设 B 是 A 的一个无穷子集. 那么，B 必定包含形如 $\frac{1}{n}$ 的值，其中 n 可以任意大. 因此，0 是 B 的一个极限点. 于是，A 的任一无穷子集有一个极限点，蕴涵 A 是极限点紧致的.

例 7.13 设 X 是具有有限补拓扑的一个无穷子集. 我们来证明 X 是极限点紧致的. 为此，设 B 是 A 的一个无穷子集. 我们断言，X 的任一极限点是 B 的一个极限点. 如果 $x\in X$，而 U 是 x 的一个邻域，那么由于 U 包含 X 所有的，但不过是有限多个点，它与 B 交于无限多个点. 特别地，U 与 B 交于异于 x 的那些点，蕴涵 x 是 B 的一个极限点. 因此，X 的任一无穷子集 B 都有一个极限点，这就蕴涵 X 是极限点紧致的.

例 7.3 与例 7.12 合在一起就可得出，在 $\mathbf{R}$ 中子空间 $A=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}^+\right\}$ 既是紧致的，又是极限点紧致的. 以下的定理指出，这并非巧合.

定理 7.33 如果一个拓扑空间 X 是紧致的，那么它是极限点紧致的.

证明　我们来证明，如果 X 不是极限点紧致的，那么 X 就不是紧致的. 设 X 不是极限点紧致的. 于是，X 就有一个不存在极限点的无穷子集 B. 由于任一 $x\in B$ 不是 B 的一个极限点，于是得出，对于任一 $x\in B$，存在 x 的一个邻域 U_x，使得 $U_x\cap B=\{x\}$. 而又由于 B 没有极限点，推论 2.9 蕴涵 B 是闭集. 因此，$X-B$ 是开集. 设$\mathcal{O}$是开集族 $\{U_x\mid x\in B\}\cup\{X-B\}$. 那么，$\mathcal{O}$是 X 的一个开覆盖. 此外，$\mathcal{O}$没有有限的子覆盖，由于 B 中任何无穷多个点 x 仅包含于$\mathcal{O}$中的开集 U_x 之中. 因此，X 有一个不存在有限子覆盖的开覆盖. 于是得出 X 不是紧致的. ■

例 7.14　圆盘是紧致的，因而是极限点紧致的. 这就蕴涵，每个无限子集有一个极限点. 然而，存在没有明显极限点的无限子集. 例如，取集合 $A\subset\mathbf{R}^2$，用极坐标 $(r,\ \theta)$ 表示为

$$A=\left\{\left(\frac{\theta-1}{\theta},\theta\right)\middle|\,\theta=1,2,3\cdots\right\},$$

如图 7.16 所示. 此点集成螺旋形状地移向圆周 S^1，但是这个点集没有明显的一个点，使这个集合聚集在其中. 尽管如此，定理 7.33 告诉我们，这个集合必定至少有一个极限点.

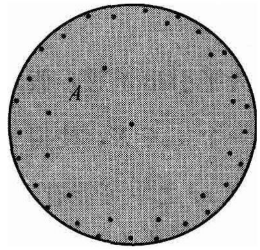


图 7.16　在圆盘中必有 A 的一个极限点

定理 7.33 的逆命题不成立. 正如以下的例子所说明的，极限点紧致性未必蕴涵紧致性.

例 7.15　设 $\mathbf{Z}$ 有由基

$$\mathcal{B}=\{(-n,n)\mid n\in\mathbf{Z}^+\}$$

所生成的拓扑. 在此拓扑中，$\mathbf{Z}$ 不是紧致的，由于基$\mathcal{B}$是一个不存在有限子覆盖的开覆盖. 然而我们断言，在此拓扑中 $\mathbf{Z}$ 是极限点紧致的. 事实上我们可以证明，$\mathbf{Z}$ 的每个非空子集都有一个极限点. 为此，设 A 是 $\mathbf{Z}$ 的一个非空子集. s 是集合 A 中的任一个元素. 对于使得 $|t|>|s|$ 的任一 $t\in\mathbf{Z}$，可知每个包含 t 的开集必定包含 s. 因此，满足 $|t|>|s|$ 的任一 t 是 A 的一个极限点. 因此，A 有一个极限点，蕴涵在$\mathcal{B}$所生成的拓扑中，$\mathbf{Z}$ 是极限点紧致的.

如果我们限制于度量空间，那么极限点紧致与紧致是等价的. 这也是在度量空间中成立的，便于使用的性质的另一个例子. 我们将在定理 7.36 中提出这一结论，但在此之前我们证明两个有用的引理.

引理 7.34　设 $(X,\ d)$ 是一个度量空间. 如果 $A\subset X$，且 c 是一个极限点，那么，对于任一 $\varepsilon>0$，开球 $B_d(c,\ \varepsilon)$ 与 A 交于无穷多个点.

证明　设 c 是 A 的一个极限点. 我们通过引出矛盾来证明所要的结论. 于是，设存在一个开球 $B_d(c,\ \varepsilon^*)$，它与 A 交于无穷多个点，例如 $a_1,\ \cdots,\ a_n$. 在其中，至少有一个点不等于 c，由于 c 是 A 的一个极限点. 因此

$$\mu=\min\{d(c,a_i)\mid i=1,\cdots,n,\text{且 }a_i\neq c\}$$

是已知的，且为正数. 于是得出，$B_d\left(c,\ \frac{\mu}{2}\right)$除了可能的 c 之外，不包含 A 的点. 但这与 c 是 A 的一个极限点相矛盾. 因此，对于任一 $\varepsilon>0$，开球 $B_d(c,\ \varepsilon)$ 与 A 交于无穷多个点. ■

我们所需要的第二个引理，是关于极限点紧致度量空间的勒贝格数引理. 在此，我们面临的情况稍微有些特殊. 我们已经有了引理 7.27，以及紧致度量空间的勒贝格数引理，而且已经知道了紧致性等价于极限点紧致性，那么是否就已经拥有了极限点紧致度量空间的勒贝格数引理呢? 回答是否定的. 我们还没有对于度量空间给出紧致性与极限点紧致性是等价的证明. 事实上，这正是我们在这里要设法加以证明的. 为此，我们需要完成极限点紧致度量空间的勒贝格数引理证明的任务，虽然它最终与我们已经证明的勒贝格数引理是等价的.

引理 7.35 设 (X, d) 是一个极限点紧致度量空间，并设$\mathcal{O}$是 X 的一个开覆盖. 那么存在一个 $\lambda>0$，使得对于任一 $x\in X$，都有一个 $U\in\mathcal{O}$，满足 $B_d(x, \lambda)\subset U$.

证明 设 (X, d) 是一个极限点紧致度量空间，并设$\mathcal{O}$是 X 的一个开覆盖. 由于$\mathcal{O}$覆盖 X，于是得出，对于任一 $x\in X$ 都存在一个 $U_x\in\mathcal{O}$，使得 $x\in U_x$. 设 $\varepsilon_x>0$，使得 $B_d(x, \varepsilon_x)\subset U_x$ 成立. ■

为了引出矛盾，假定在引理陈述中所说的 λ 不存在. 那么，对于任一 $n\in\mathbf{Z}^+$，我们可以选取一个 $x_n\in X$，使得 $B_d\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$不包含于 $U\in\mathcal{O}$之中.

点 x_n 之中可能有重复，但我们断言，集合 $Y=\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 包含无限多个不同的点. 我们通过证明不存在 $p\in X$，使得对于无限多个 n 成立 $p=x_n$ 来证明这一断言. 为了引出矛盾，假定存在这样一个点 p. 那么，由于对于无限多个 n 都有 $p=x_n$，我们就可以选取 $M\in\mathbf{Z}^+$，使得 $p=x_M$，且$\frac{1}{M}<\varepsilon_p$. 再由 ε_p 的定义，存在 $U_p\in\mathcal{O}$，使得 $B_d(p, \varepsilon_p)\subset U_p$. 此外，由于$\frac{1}{M}<\varepsilon_p$，就有$B_d\left(p, \frac{1}{M}\right)\subset B_d(p, \varepsilon_p)$. 因此，$U_p$ 是$\mathcal{O}$中使得 $B_d\left(p, \frac{1}{M}\right)\subset U_p$ 的一个集合. 但由于 $p=x_M$，这就与 x_M 的定义相矛盾. 于是得出，对于无限多个 n，不存在使得 $p=x_n$ 成立的 $p\in X$，因而 Y 是一个无限集.

由于 X 是极限点紧致的，因此 Y 有一个极限点 y. $B_d(y, \varepsilon_y)$ 包含于某个集合 $O_y\in\mathcal{O}$之中. 由引理 7.34，由于 y 是 Y 的一个极限点，因此无限多个 x_n 位于 $B_d\left(y, \frac{\varepsilon_y}{2}\right)$之中. 选取 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得 $x_N\in B_d\left(y, \frac{\varepsilon_y}{2}\right)$，且$\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon_y}{2}$. 于是得出，$B_d\left(x_N, \frac{1}{N}\right)\subset B_d(y, \varepsilon_y)\subset O_y$. 这就与 x_N 的定义相矛盾. 于是得出，在引理陈述中所说的 λ 是存在的. ■

这样，我们就为证明所想得到的定理作好了准备.

定理 7.36 如果 (X, d) 是一个度量空间，那么 X 是紧致的，当且仅当它是极限点紧致的.

证明 由于我们已建立了定理 7.33，只需证明，如果 X 是一个极限点紧致的度量空间，那么 X 是紧致的. 为此，我们设 X 是一个具有度量 d 的极限点紧致度量空间，并设$\mathcal{O}$是 X 的一个开覆盖. 我们来证明$\mathcal{O}$有一个有限的子覆盖.

由引理 7.35，存在$\mathcal{O}$的一个勒贝格数 λ. 考虑由

$$\mathcal{C}=\{B_d(x,\lambda)\mid x\in X\}$$

定义的 X 的覆盖.

我们断言，$\mathcal{C}$有一个有限的子覆盖. 我们使用$\mathcal{C}$的这一子覆盖，有助于我们得到$\mathcal{O}$的一个

有限子覆盖．为了证明$\mathcal{C}$有一个有限子覆盖，我们假定此断言不成立，从而导出矛盾．于是，设不存在$\mathcal{C}$的覆盖 X 的有限子集族．取 $x_1 \in X$．那么，$B_d(x_1, \lambda)$ 不覆盖 X，因而我们取 $x_2 \in X - B_d(x_1, \lambda)$．而 $\{B_d(x_1, \lambda), B_d(x_2, \lambda)\}$ 都不覆盖 X，所以取 $x_3 \in X - (B_d(x_1, \lambda) \cup B_d(x_2, \lambda))$．继续上述过程，我们定义集合$Y = \{x_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+} \subset X$，使得对于任一 $k \in \mathbf{Z}^+$，都有 $x_k \notin \bigcup_{j=1}^{k-1} B_d(x_j, \lambda)$．（见图 7.17.）

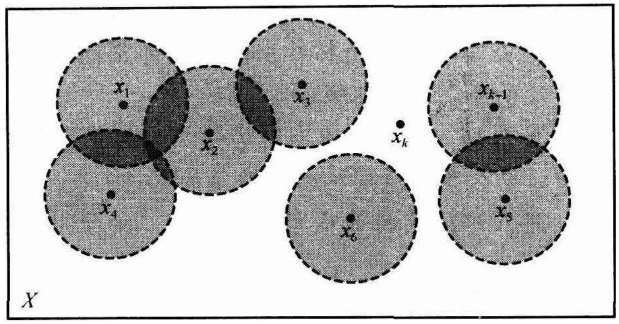


图 7.17　当 $i<k$ 时，x_k 不在任何球 $B_d(x_i, \lambda)$ 之中

Y 中的点是各不相同的．因此，Y 是一个无限集．设 y 是 Y 的一个极限点．那么由引理 7.34，$B_d\left(y, \frac{\lambda}{2}\right)$包含 Y 中的无限多个点．设 x_p 和 x_q 是这样两个点，再设 $p<q$．由于 x_p 和 x_q 都位于 $B_d\left(y, \frac{\lambda}{2}\right)$之中，于是得到 $d(x_p, x_q)<\lambda$．但这与 $x_q \notin \bigcup_{j=1}^{q-1} B_d(x_j, \lambda)$ 的事实产生矛盾．因此，我们就可以推断$\mathcal{C}$有一个有限子覆盖．

设 $\{B_1, \cdots, B_m\}$ 是$\mathcal{C}$的一个子覆盖．任一 B_i 是一个半径为 λ 的开球．由于 λ 是覆盖$\mathcal{O}$的一个勒贝格数，于是得到，对于任一 $i=1, \cdots, m$，存在一个 $O_i \subset \mathcal{O}$，使得 $B_i \subset \mathcal{O}_i$．于是，集族 $\{O_1, \cdots, O_m\}$ 是$\mathcal{O}$的一个有限子覆盖．因此 X 是紧致的． ■

7.4 节练习

7.33 设 $\mathbf{R}_d$ 表示具有离散拓扑的 $\mathbf{R}$，直接用极限点紧致性的定义，对以前由图 7.12 所示的 $A=\{(x, 2) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ 与 $B=\{(3, y) \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\}$，来确定其中哪一个是 $\mathbf{R}_d \times \mathbf{R}$ 的一个极限点紧致子集．

7.34 设 $Y=\{1, 2\}$ 具有平凡拓扑，而 $\mathbf{Z}^+$ 是具有离散拓扑的正整数集．证明积空间 $Y \times \mathbf{Z}^+$ 是极限点紧致的，但不是紧致的．

7.35 证明 $[0, 1]$ 作为具有下限拓扑的 $\mathbf{R}$ 的一个子空间，不是极限点紧致的．

7.36 设 X 是一个极限点紧致的空间，而 A 是 X 的一个闭子集．证明 A 在此子空间拓扑中是极限点紧致的．

7.5 单点紧化

正如我们已经看到的，紧致空间和紧致集有许多有用的性质．例如

(1) 在度量空间中，紧致集是有界闭集．

(2) 在度量空间的一个紧致子集中，序列有收敛的子序列．

(3) 紧致度量空间是完备的．

(4) 在紧致空间上的连续实值函数有极小值和极大值．

此外，我们还看到一个豪斯多夫空间所拥有的有用性质．例如

(1) 在一个豪斯多夫空间中，单点集是闭的．

(2) 在一个豪斯多夫空间中，收敛序列收敛于唯一的极限．

可惜，在我们所使用的拓扑空间中，并非总是具有紧致空间和豪斯多夫空间所提供的优点. 本节我们引入局部紧致的性质，以及一种称为单点紧化的构造，从而使我们能够把一个单点加入到一个局部紧致的豪斯多夫空间 X 中，以得到一个把 X 作为子空间的紧致的豪斯多夫空间 Y. 在此时，$X=\mathbf{R}^3$，我们将看到单点紧化产生 3 维球 S^3.

定义 7.37 一个拓扑空间是**局部紧致**的，如果对于任一 $x\in X$，存在一个包含于 X 的一个紧致子集之中的邻域.

例 7.16 任一紧致空间当然是局部紧致的，由于每一个 $x\in X$ 都有既作为它的一个邻域又作为包含此邻域的一个紧致集的 X.

例 7.17 实轴 $\mathbf{R}$ 是局部紧致的，由于对于任一 $x\in\mathbf{R}$，我们有 $x\in(x-1,\ x+1)\subset[x-1,\ x+1]$，而 $[x-1,\ x+1]$ 是紧致的.

例 7.18 $\mathbf{R}$ 的在标准拓扑中的子空间 $\mathbf{Q}$ 不是局部紧致的.（见练习 7.37.）

定义 7.38 设 x 是一个豪斯多夫空间，Y 等于 X 与附加的单点（记为 ∞）的并.（见图 7.18.）对 $Y=X\cup\{\infty\}$ 上的一个拓扑，把以下两种类型的子集定义为开集：

(1) 在 X 中是开集.

(2) 形如 $Y-C$ 的集合，其中 C 是 X 的一个紧致子集.

我们称所得到的拓扑空间 Y 为 X 的**单点紧化**.

当然，我们需要证实，此开集族所描述的恰好是一个拓扑. 下面进行证实.

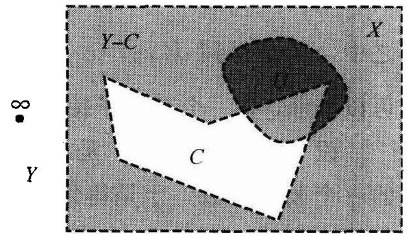


图 7.18 在单点紧化 $Y=X\cup\{\infty\}$ 中的开集 U 和 $Y-C$

定理 7.39 设 X 是一个豪斯多夫空间. 在 X 单点紧化的定义中 $Y=X\cup\{\infty\}$ 的子集族，是 Y 上的一个拓扑.

证明 空集是 Y 中的开集，由于它是 X 中的一个开子集. 整个集合 Y 本身，在 Y 中也是开集，由于它在 Y 中是空集 $\varnothing$ 的补集，而 $\varnothing$ 是 X 的一个紧致子集.

为了证明 Y 中开集的有限交在 Y 中是开集，只要检验一对开集 U 与 V 的交就可以了. 然后再用数学归纳法，就可以得到任意有限交的结果了. 为此，设 U 与 V 是 Y 中的开集. 我们需要检验 3 种不同的情况. 首先，如果 U 与 V 都是 X 中的开集，那么 $U\cap V$ 是 X 中的一个开集，从而使它成为 Y 中的一个开集. 其次，假定 $U=Y-C_1$ 与 $V=Y-C_2$，其中 C_1 与 C_2 是 X 的紧致子集. 于是 $U\cap V=Y-(C_1\cup C_2)$. 由于紧致集的有限并仍是紧致的，因此 $C_1\cup C_2$ 是 X 的一个紧致子集. 于是得出，对于 X 的一个紧致子集 C，$U\cap V=Y-C$，因而在这种情况下，$U\cap V$ 在 Y 中同样是开集. 最后，假定 U 是 X 中的开集，而 $V=Y-C$，其中 C 是 X 的一个紧致子集. 那么，由于 ∞ 不在 U 中，于是得出 $U\cap V=U\cap(X-C)$. 而由定理 7.8 可知，C 在 X 中是闭的，由于它在豪斯多夫空间 X 中是一个紧致集. 因此，$X-C$ 在 X 中是开的，蕴涵 $U\cap(X-C)$ 在 X 中为开. 于是 $U\cap V$ 在 X 中为开，从而在此时使得它在 Y 中也为开. 于是得出，如果 U 与 V 是 Y 中的任意开集，那么 $U\cap V$ 在 Y 中也是开的，这正是我们所要证明的.

最后，我们证明开集的任意并是开集. 我们可以把这一任意并表示为以下的形式：

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\Big)\cup\Big(\bigcup_{\beta\in B}(Y-C_\beta)\Big),$$

其中每个 U_α 在 X 中是开的，而每个 C_β 是 X 的一个紧致子集．集合 $\bigcup_{\alpha-A} U_\alpha$ 在 X 中是开的，我们用 U 来表示它．此外，

$$\bigcup_{\beta\in B}(Y-C_\beta)=Y-\bigcap_{\beta\in B}C_\beta,$$

又由于任一集合 C_β 是豪斯多夫空间 X 的紧致子集，定理 7.6 蕴涵 $\bigcap_{\beta\in B}C_\beta$ 是 X 的一个紧致子集．设 $C=\bigcap_{\beta\in B}C_\beta$，我们发现 $\bigcup_{\beta\in B}(Y-C_\beta)=Y-C$，且 C 是 X 的一个紧致子集．因此，我们仅需要验证 $U\cup(Y-C)$ 在 Y 中是开的，其中 U 在 X 中是开的，而 C 是 X 的一个紧致子集．设 $C'=X-U$ 为 U 在 X 中的补，那么 C' 在 X 中是闭的，因而

$$\begin{aligned}U\cup(Y-C)&=(X-C')\cup(Y-C)\\&=(Y-C')\cup(Y-C)\\&=Y-(C'\cap C).\end{aligned}$$

C 是豪斯多夫空间 X 的一个紧致子集．所以 C 在 X 中是闭的．因此，$C'\cap C$ 在 X 中是闭的，而由于 $C'\cap C$ 是紧致集 C 的一个子集，于是得到 $C'\cap C$ 是 X 的一个紧致子集．因此，$Y-(C'\cap C)$ 是 Y 中的一个开集，蕴涵 $U\cup(Y-C)$ 是 Y 中的一个开集．于是得出，Y 中开集的任意并是 Y 中的一个开集．所以，在 X 单点紧化的定义中所描述的 Y 的子集族是 Y 上的一个拓扑． ■

X 是单点紧化 $Y=X\cup\{\infty\}$ 的一个子集．因此，X 从 Y 传承一个子空间拓扑．以下的定理指出，这个子空间拓扑与原拓扑是相同的，因而我们可以把 X 看作是它的单点紧化的一个子空间．

定理 7.40 设 X 是一个豪斯多夫空间，并设 $Y=X\cup\{\infty\}$ 是它的单点紧化．那么传承自 Y 的 X 的子空间拓扑，等于 X 上的原拓扑．

证明 见练习 7.38． ■

接下来，我们说明使用术语"紧致化"的理由．

定理 7.41 设 X 是一个豪斯多夫空间．它的单点紧化 $X\cup\{\infty\}$ 是紧致的．

证明 设 $\mathcal{O}$ 是 Y 的一个开覆盖．定义 $\mathcal{O}_x$ 是由 $\{V\cap X\mid V\in\mathcal{O}\}$ 所给出的 X 的子集族．$\mathcal{O}_x$ 中的集合在传承自 Y 的 X 的子空间拓扑中是开的．因此由定理 7.40，它们在 X 中是开集．于是得出，$\mathcal{O}_x$ 是 X 中的一个开覆盖．

$\mathcal{O}$ 是 Y 的一个开覆盖，因而存在 $U\in\mathcal{O}$，使得 $\infty\in U$．$U=Y-C$ 必定成立，其中 C 是 X 的一个紧致子集．集族 $\mathcal{O}_x$ 覆盖 C．由于 C 是 X 的一个紧致子集，所以可得出，存在一个覆盖 C 的有限集族 $\{V_1\cap X,\cdots,V_n\cap X\}\subset\mathcal{O}_x$，因此 $\{U,V_1,\cdots,V_n\}$ 是 $\mathcal{O}_x$ 的一个有限子覆盖，蕴涵 Y 是紧致的． ■

即使我们能构建任意豪斯多夫空间的单点紧化，但结果未必是豪斯多夫的．例如，有理数集合 **Q** 的单点紧化，作为 **R** 的一个子空间，并不是一个豪斯多夫空间．（见练习 7.40.）另一方面，我们有以下的定理：

定理 7.42 设 X 是一个局部紧致的豪斯多夫空间．那么，X 的单点紧化 $Y=X\cup\{\infty\}$ 是豪斯多夫的．

证明 为了看出 Y 是豪斯多夫的，设 x 与 y 是 Y 中的点．在第一种情况下，假定 x 与 y 都在 X 中．由于 X 是豪斯多夫空间，我们就可以在 X 中找到分别包含 x 与 y 的分离开集 U 与 V．集合 U 与 V 在 Y 中也是开集，因而在 Y 中存在 x 与 y 的分离邻域．在第二种情况下，

设 $x=\infty$，且 $y\in X$. 由于 X 是局部紧致的，因此在包含 y 的一个邻域 U 的 X 中，存在一个紧致子集 C. Y 中的开集 $Y-C$ 和 U 是分离集，且分别包含 x 与 y. 于是在这种情况下，在 Y 中也存在 x 与 y 的分离邻域. 因此，Y 是豪斯多夫的. ■

例 7.19 平面的单点紧化，与球面 S^2 是同胚的. 在例 4.16 我们已证明了，在球极平面射影下挖去北极 N 的 2 维球面，与此平面是同胚的. 此平面的单点紧化，本质上填补回挖去的点 N. 为了使之明晰起见，我们通过在 $S^2-\{N\}$ 中任取一点，通过球极平面射影，在平面上找所对应的点，来定义一个把此球面 S^2 映射到单点紧化 $R^2\cup\{\infty\}$，且把 N 映射到∞的函数. （见图 7.19.）所得到的函数 f 是一个同胚.

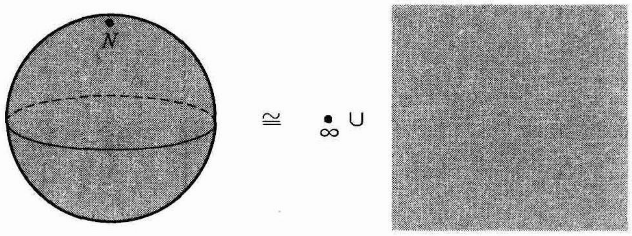


图 7.19 球面与平面的单点紧化是同胚的

当所考虑的平面是复平面 $\mathbf{C}$ 时，单点紧化 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 称为**黎曼球面**或**扩充复平面**. 在这种情况下，添加无限远点∞不仅起逻辑的作用，而且还起代数的作用$\left(例如\dfrac{1}{0}=\infty\right)$，所得到的空间，在复分析中作为许多函数的定义域.

例 7.20 3 维球面 S^3 是 $\mathbf{R}^4$ 中与原点距离为 1 的一个点集. 可能难于实现可视化，由于我们没有让 4 维空间实现可视化的天生的经历. 然而，根据与上一例中所出现的类似的论证，我们可以证明，3 维球面 S^3 与 $\mathbf{R}^3$ 的单点紧化是同胚的.

当数学家研究纽结理论时，他们总是假定纽结的嵌入是在紧致空间 S^3 之中，而不是在非紧致的子空间 $\mathbf{R}^3$ 内. 正是由于在 $\mathbf{R}^3$ 中添加了一个单点，他们就能够获得在一个紧致环境中进行研究的便利.

7.5 节练习

7.37 证明：在传承自标准拓扑的 $\mathbf{R}$ 的子空间拓扑之中，$\mathbf{Q}$ 是局部紧致的.

7.38 **证明定理 7.40**：设 X 是一个豪斯多夫空间，并设 $Y=X\cup\{\infty\}$ 是它的单点紧化. 那么传承自 Y 的 X 的子空间拓扑，等于 X 上的原拓扑.

7.39 证明：(0，1) 的单点紧化与圆周是同胚的.

7.40 证明：$\mathbf{Q}$ 的单点紧化不是豪斯多夫的.

7.41 (1) 描述并说明求开圆环 $S^1\times(0,1)$ 的单点紧化的结果.

(2) 一条**开默比乌斯带**，是对 $[0,1]\times(0,1)$ 通过对通常的默比乌斯带同样粘合对边的方法而形成的空间. 描述并说明求开默比乌斯带的单点紧化的结果.（提示：所得到的空间是我们曾经遇到过的空间.）

7.42 设 X 是一个豪斯多夫空间，并设 $Y=X\cup\{\infty\}$ 是 X 的单点紧化.

(1) 证明：如果 X 不是紧致的，那么 $\mathrm{Cl}(X)=Y$.

(2) 证明：如果 X 是紧致的，那么 $\mathrm{Cl}(X)=X$，而 Y 与它的元素之一 $\{\infty\}$ 是不连通的.（这就表明当对一个已经是紧致的空间取单点紧化时，通常不会出现附加的结果.）

第8章

动力系统与混沌

在以往30年，人们已经发现了一种称为动力系统的数学领域．动力系统是对时变过程建模时所使用的一种特殊类型的函数．这种过程在流体力学、人口增长模型、天体力学、心脏机能、粒子动力系统，以及许多随时间而变的物理系统的场合经常出现．在对特定的动力系统进行分析时，常常使用定性工具和方法，而这些定性方法，通常以来自拓扑学的概念为基础．

在19世纪后期和20世纪初期拓扑学的发展中，要推出一位领军人物——庞加莱(1854—1912)，通常他还被认为是动力系统这一领域的主要奠基者．庞加莱研究了三体问题，为在引力的相互影响下运动中的三体的位置和速度而建模．由于相关的微分方程的一般求解公式难以得到，庞加莱就采取了一种全新的手段，对定义这些微分方程的空间内的结构，进行定性的研究．于是动力系统这一领域就应运而生了．

在本章，我们考虑通过对一个已知的函数反复进行运算的方法来定义动力系统，这是把一个空间映射到它自身的函数．前两节我们考察这些系统的基本性质．在8.3节中，我们提供混沌的动力系统的一个拓扑学定义，并探索一个系统能被完全确定的较新的理念，即系统的所有的性态可以由初始条件和它的简单演化规则而确定，并展示称为混沌的无法预测的性态．在8.4节中，我们提出有助于掀起混沌革命的一种简单的人口模型．最后，在8.5节中，我们证明依赖于初始条件的敏感性（通常称为“蝴蝶效应”），是混沌的拓扑学定义的一个结果．

8.1 函数迭代

本节我们专注于动力系统，它是通过对把一个空间映射到自身的函数反复进行运算来定义的．特别地，设X是一个拓扑空间，而f：$X\to X$是一个把X映射到自身的函数．对于任一$n\in\mathbf{Z}^+$，定义函数f的n次拷贝的复合$f^n(x)=f\circ f\circ\cdots\circ f(x)$．这一想法是，从$x$开始，对$x$施加$f$，然后再对$f(x)$施加$f$，继续这一迭代过程，直到我们得到$f^n(x)$为止．

定义8.1 由f：$X\to X$定义的**动力系统**，是一个函数族$\{f^n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$，其中$f^n$把$X$映射到$X$．

例8.1 设f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$由$f(x)=x/3$定义．于是由f定义的动力系统，是由$f^n(x)=x/3^n$所定义的函数族．

在讨论通过一个函数f：$X\to X$的迭代来定义的动力系统的应用时，我们认为$f(x)$是处

于状态 x 之后一个时间单位时，此系统的新状态．例如，如果我们在为细菌种群的增长（以小时计）建模时，就有表示在种群规模为 x 以后 1 小时，所形成种群规模的一个函数 $f(x)$．而如果我们为一个火箭的位置和速度建模时，就有表示在此火箭的位置和速度为 $(x,\ v)$ 之后 1 秒钟时此火箭的位置和速度的一个函数 $f(x,\ v)$．

让我们看几个其他定义动力系统的例子．

例 8.2 考虑以下 4 个定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数：

(1) 由 $f(x)=-2x$ 定义的 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

(2) 由 $g(x)=\frac{1}{2}x$ 定义的 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

(3) 由 $h(x)=-x$ 定义的 $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

(4) 由 $k(x)=0$ 定义的 $k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

对其中每个函数计算 $x=0$ 时的值，其结果都是 0．我们称 0 是相关的动力系统的不动点．（随后，我们将定义“不动点”和本例所使用的其他术语．）

首先考虑函数 f．如果我们取特定的点 x_0，那么 $f^n(x_0)=(-2)^n x_0$．因此，如果 $x_0\neq 0$，那么 f 在 x_0 重复迭代后，就得到离 0 越来越远的值，在正值与负值之间摆来摆去．f 在 $\mathbf{R}$ 上的动态特性，在图 8.1 中以所谓动力系统**相图**的形式被定性地描绘出来．

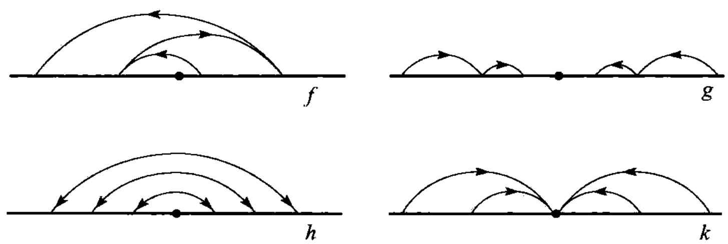


图 8.1　f，g，h，k 的相图

再考虑 g．此时 g 在一个非零值进行迭代，得到逐渐接近于 0 的值，以 0 为极限．在这种情况下，0 被称为是一个渐近稳定的不动点．

对于 h，我们发现一种不同的动态图景．在 0 我们有不动点，但是在任何其他值 x_0，对 h 迭代的结果，却在 $-x_0$ 和 x_0 之间摆动．每个非零值 x_0，称为此动力系统的周期为 2 的点．

最后考虑 k．此时动力系统比较简单．在每个点实施 k 的运算后，就直接得出以 0 为不动点．所以，0 是一个不动点，而任何其他点，被认为是一个最终要出现的不动点．

定义 8.2 设 f: $X\to X$，并设 $x\in X$.

(1) 在 f 下 x 的**轨线**是序列

$$(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x), \cdots),$$

并记为 $O(x)$.

(2) 我们称 x 是 f 的一个**不动点**，如果 $f(x)=x$．所以一个不动点 x 的轨线，是在点 x 的一个常数序列．

(3) 我们称 x 是 f 的一个**最终要出现的不动点**，如果 x 不是 f 的一个不动点，但对于某

个 $n\in\mathbf{Z}^+$，$f^n(x)$ 是一个不动点.

(4) 假定 $m\in\mathbf{Z}^+$. 我们称 x 是 f 的一个**周期点**或 **m 周期点**，如果 $f^m(x)=x$ 而对于 $j=1$，…，$m-1$，$f^j(x)\neq x$. 在这种情况下，x 的轨线，称为一条**周期轨线**或一条**周期为 m 的轨线**，并且称 m 为此**周期点**或周期轨线的**周期**.

(5) 我们称 x 是 f 的一个**最终要出现的周期点**，如果 x 不是 f 的一个周期点，但对于某个 $n\in\mathbf{Z}^+$，$f^n(x)$ 是一个周期点.

如果 x 是一个函数 f：$X\to X$ 的 m 周期点，那么点 x，$f(x)$，…，$f_{m-1}(x)$ 都是 m 周期点，且都是相异的.（见练习 8.3.）于是在 x 对 f 迭代时，我们就环绕这 m 个周期点连续循环轮转.

一个不动点是一个周期为 1 的点，所以我们把不动点列入函数周期点的一个集合之中.

例 8.3 这里我们考虑有关储蓄账户的两个简单的例子. 首先，假设我们在一个储蓄账户中存款，以获取（每年以复利计息)5%的利息. 在初次存款后，我们既没有再为此账户继续存款，也没有从此账户中取过款. 我们只是设此账户的总金额孳生了利息. 由 $f(x)=1.05x$ 所给出的函数 f：$[0,\infty)\to[0,\infty)$ 定义了一个动力系统，这个系统为此账户逐年改变的总金额而建模. f 的动态特性是显而易见的：在 0 处有一个不动点，而在任何其他点，有一条轨线，随着 f 的逐次迭代而远离 0.（见图 8.2.）

再设每年把利息记入账户后，我们要么从此账户取款 1000 美元（如果此账户中至少有那么多金额），要么轧平此账户（如果此账户的金额少于 1000 美元）. 在这种情况下，由

$$g(x)=\begin{cases}1.05x-1000 & \text{若 } 1.05x\geqslant 1000,\\ 0 & \text{若 } 1.05x\leqslant 1000\end{cases}$$

给出的 g：$[0,\infty)\to[0,\infty)$ 定义了一个动力系统，此系统为账户金额的变化而建模. 在这里，0 也是一个不动点. 通过解方程 $g(x)=x$ 会发现，在 $x=20\,000$ 处存在另一个不动点. 我们还可以用推理的方法，找到在 $x=20\,000$ 处存在不动点，当账户金额刚好能提供每年取款 1000 美元的 5%的利息时，金额将保持固定. 由于 20 000 的 5%是 1000，于是得出，此不动点出现于 $x=20\,000$ 处. 对大于 20 000 的 x 的值，与 x 相应的利息，就超过了每年取款 1000 美元所需的金额，所以当对 g 逐次迭代的条件下，此账户的金额将无限增加. 当 $x<20\,000$ 时，此账户的金额，最终将等于 0. 因此，小于 20 000 的 x 的非零值，是 g 的最终要出现的不动点. 我们用图 8.3 来说明 g 的动态特性.

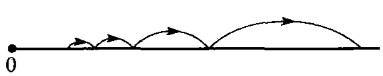


图 8.2　f 的动态特性

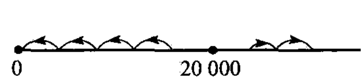


图 8.3　g 的动态特性

正如我们在例 8.3 中所看到的，如果我们有一个由函数 f 迭代所定义的动力系统，那么就可以通过解方程 $f(x)=x$ 来找出不动点. 类似地，我们可以通过解方程 $f^m(x)=x$，而且取它的与 $f^j(x)=x$（$j=1$，…，$m-1$）的解相异的解，来找出周期为 m 的点.

例 8.4 设想位于区间 [0，1] 之上，有一份葡萄干面包的面团. 假设我们均匀地拉伸此

面团，使它的长度加倍，然后把此面团对折，再把它按压在一起，使得它重新位于区间 [0，1] 之上.（见图 8.4.）

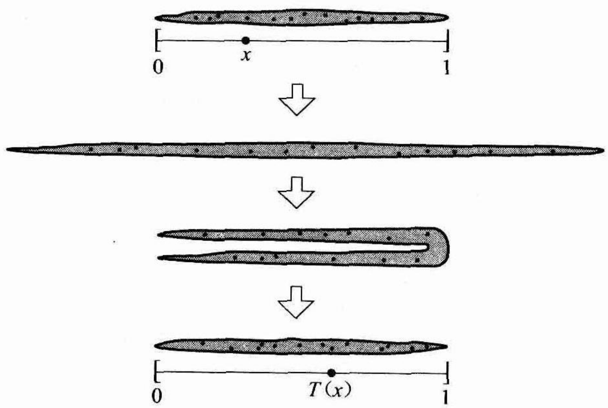


图 8.4 拉伸、对折并按压葡萄干面包的面团

假设通过令 $T(x)$ 等于原来在 x 的一颗葡萄干在对此面团拉伸、对折并按压之后的新位置，来定义 T：[0，1]→[0，1]. 更精确地，T 定义为

$$T(x)=\begin{cases}2x & \text{若 } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ 2-2x & \text{若 } x\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

T 的图形如图 8.5 所示. 不言而喻，T 称为**帐篷函数**. 在图 8.5 中，我们还画出了直线 $y=x$ 的图形. T 的不动点满足 $T(x)=x$，因而它的 x 值出现于 T 的图形与直线 $y=x$ 的交点之处. 我们看到 T 有两个不动点，它们分别位于 0 与 $\frac{2}{3}$ 处.

显而易见，1 与 1/2 是 T 的最终要出现的不动点，但这些点不是唯一的——它们多之又多，在 8.3 节我们把它们全都视为相同的.

再考虑 T^2. 它的图形与 $y=x$ 的图形一起都表示在图 8.6 中. 我们看到 $T^2(x)=x$ 有 4 个解，其中两个是不动点 0 与 2/3，另外两个是 2/5 与 4/5. 后两个是 2 周期点，它们一起构成一条周期轨线.

这里我们仅对此帐篷函数十分复杂的动态特性稍加提及. 在 8.3 节再作进一步的探索，在那时我们将证明 T 是混沌的.

以下的定义为由函数迭代所确定的动力系统建立等价的概念：

定义 8.3 函数 f：$X\to X$ 与函数 g：$Y\to Y$（以及由它们所定义的动力系统），称为**拓扑共轭**的，如果存在一个同胚 h：$X\to Y$，使得 $g\circ h=h\circ f$. 函数 h 称为 f 与 g 之间的一个**拓扑共轭**.

在图 8.7 中，我们对拓扑共轭条件 $g\circ h=h\circ f$ 加以说明. 想法是从左上角的 X 到右下角的 Y 有两条路径——一条横过顶部，然后在右边下降；另一条在左边下降，然后横过底部——都给出同样的结果. 我们称之为转换图. 在本质上，h 把函数 f 映射到函数 g.

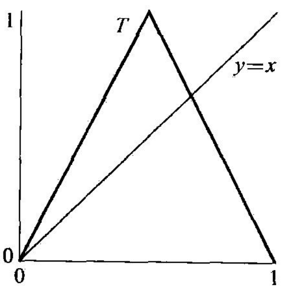


图 8.5 帐篷函数

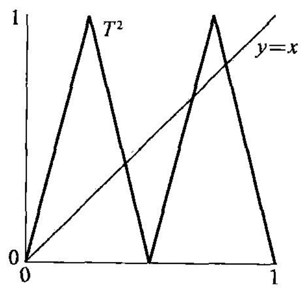


图 8.6 函数 T^2

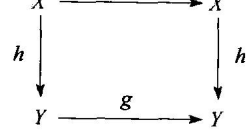


图 8.7 拓扑共轭要求 $g\circ h=h\circ f$

例 8.5 函数 $f(x)=2x$ 与 $g(x)=3x$ 的动态特性从定性的角度来看是相同的. 二者在 0 处都有一个不动点，而所有其他的轨线不是位于 0 的正侧就是位于 0 的负侧，且从 0 朝外移动. 事实上，存在两个拓扑共轭的函数.

$$h(x)=\begin{cases}-|x|^{\log_2 3} & x<0\\ x^{\log_2 3} & x\geqslant 0\end{cases}$$

所定义的函数 h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是满足条件 $g\circ h=h\circ f$ 的一个同胚.

以下的定理指出，两个函数 f 与 g 之间的一个拓扑共轭，当然把 f 的轨线映射到 g 的轨线：

定理 8.4 设 h 是 f: $X\to X$ 与 g: $Y\to Y$ 之间的一个拓扑共轭. 对于任一 $x\in X$ 和 $n\in \mathbf{Z}^+$，我们有 $h(f^n(x))=g^n(h(x))$，因而在 f 下，h 把 x 的轨线映射到在 g 下 $h(x)$ 的轨线.

证明 我们对 n 用数学归纳法来加以证明. 由拓扑共轭的定义，当 $n=1$ 时，结论成立. 假定此结论当 $n-1$ 时成立. 那么

$$\begin{aligned}h(f^n(x)) &= h(f^{n-1}(f(x))) = g^{n-1}(h(f(x))) = g^{n-1}(g(h(x)))\\ &= g^n(h(x)),\end{aligned}$$

由归纳法的假设，以上第二个等式成立. 于是，如果结论当 $n-1$ 时成立，那么它当 n 时也成立. 因此由归纳法，对于任一 $n\in\mathbf{Z}^+$，都有 $h(f^n(x))=g^n(h(x))$. ■

以下的推论是定理 8.4 的一个直接结论.

推论 8.5 设 h 是 f: $X\to X$ 与 g: $Y\to Y$ 之间的一个拓扑共轭，并假定 $x\in X$. 那么以下蕴涵关系成立：

(1) 如果 x 是 f 的一个不动点，那么 $h(x)$ 是 g 的一个不动点.

(2) 如果 x 是 f 的一个 m 周期点，那么 $h(x)$ 是 g 的一个 m 周期点.

(3) 如果 x 是 f 的一个最终要出现的不动点，那么 $h(x)$ 是 g 的一个最终要出现的不动点.

(4) 如果 x 是 f 的一个最终要出现的周期点，那么 $h(x)$ 是 g 的一个最终要出现的周期点.

证明 见练习 8.9. ■

上述推论蕴涵，f 的重要动态特性，反映于与 f 拓扑共轭的一些函数之中. 本章我们将遇到类似的结论，因而可以看出，拓扑共轭的函数经迭代有等价的动态特性.

8.1 节练习

8.1 对于以下任一函数 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，求所有的不动点和周期点，并为此动态系统画出相图：

(1) $f(x)=x^3$ (2) $f(x)=-x^3$ (3) $f(x)=-x^{1/3}$

(4) $f(x)=x-x^2$ (5) $f(x)=\frac{4}{\pi}\tan^{-1}(x)$ (6) $f(x)=1-x^2$

(7) $f(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$ (8) $f(x)=\frac{\pi}{2}\sin(x)$ (9) $f(x)=e^x$

(10) $f(x)=2(x-x^2)$ (11) $f(x)=x+\sin(x)$

8.2 (1) 考虑由 $L_a(x)=ax$ 定义的线性系统 L_a: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，其中 $a\in\mathbf{R}$. 通过一族相图，当 a 取所有实数时，对在 L_a 中所看到的不同动态性态进行分类.

(2) 证明：如果 L_a 与 L_b 有同样的动态特性（在 (1) 中视为相同的），那么 L_a 与 L_b 是拓扑共轭的.

8.3 证明：如果 x 是函数 f：$X\to X$ 的一个 m 周期点，那么点 x，$f(x)$，$f^2(x)$，…，$f^{m-1}(x)$ 各不相同，且都是 m 周期点.

8.4 像你为帐篷函数 T 所做的那样，求出尽可能多的最终要出现的不动点（在 8.3 节中我们将证明它们为何全都被视为是相同的）.

8.5 为帐篷函数 T 求 3 周期点.

8.6 考虑在例 8.3 中的第二个储蓄模型：

$$g(x)=\begin{cases}1.05x-1000 & \text{若 } 1.05x\geqslant 1000,\\ 0 & \text{若 } 1.05x\leqslant 1000.\end{cases}$$

(1) 确定 $g^{-1}(0)$，即确定导致下一年余额为零的金额范围.

(2) 确定导致 $n-1$ 年后余额非零，但在 n 年后余额为零的金额范围.

8.7 本题要求你通过详细的计算寻求与由 $f_a(x)=ax(1-x)$ 定义的函数 f_a：$[0, 1]\to[0, 1]$ 有关的轨线. 我们将在 8.4 节进一步考察此函数族.

(1) 对 $f_{0.6}$：$[0, 1]\to[0, 1]$，$f_{0.6}(x)=0.6x(1-x)$ 寻求并比较由初始值 0，0.1，0.7 所确定的轨线.

(2) 对 $f_{1.6}$：$[0, 1]\to[0, 1]$，$f_{1.6}(x)=1.6x(1-x)$ 寻求并比较由初始值 0，0.1，0.7 所确定的轨线.

(3) 对 $f_{3.2}$：$[0, 1]\to[0, 1]$，$f_{3.2}(x)=3.2x(1-x)$ 寻求并比较由初始值 0.25 和 0.75 所确定的轨线.

(4) 对 f_4：$[0, 1]\to[0, 1]$，$f_4(x)=4x(1-x)$ 寻求并比较由初始值 0.261 和 0.262 所确定的轨线.

8.8 求 g_a：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g_a(x)=a(x+x^2)$ 的不动点，其中 $a>0$. 在 x—a 坐标系画出不动点，并说明当参数 a 改变时它们的位置如何改变.

8.9 **证明推论 8.5**：设 h 是 f：$X\to X$ 与 g：$Y\to Y$ 之间的一个拓扑共轭，并假定 $x\in X$. 那么，以下蕴涵关系成立：

(1) 如果 x 是 h 的一个不动点，那么 $h(x)$ 是 g 的一个不动点.

(2) 如果 x 是 h 的一个 m 周期点，那么 $h(x)$ 是 g 的一个 m 周期点.

(3) 如果 x 是 h 的一个最终要出现的不动点，那么 $h(x)$ 是 g 的一个最终要出现的不动点.

(4) 如果 x 是 h 的一个最终要出现的周期点，那么 $h(x)$ 是 g 的一个最终要出现的周期点.

8.10 由

$$g(x)=\begin{cases}3x & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{3},\\ 2-3x & \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{2}{3},\\ 3x-2 & \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

定义函数 g：$[0, 1]\to[0, 1]$，证明 g 与帐篷函数不是拓扑共轭的.

8.11 设 f：$X\to X$ 是连续的. 证明：如果 $x\in X$，且 $y=\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)$，那么 y 是 f 的一个不动点. 即如果一个点的轨线收敛，那么它收敛于一个不动点.（提示：用定理 4.7.）

8.12 设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，并设 I 与 J 是使得 $f(I)\subset J$ 且 $f(J)\subset I$ 成立的分离有界闭区间. 证明在 I 中存在一个 2 周期点.

8.13 (1) 设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个同胚. 证明 f 没有周期大于 2 的周期点.

(2) 证明对于任一 $n\in\mathbf{Z}^+$，存在一个具有 n 周期点的同胚 f：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$.

8.14 设 f：$X\to X$ 是一个单射.

(1) 证明：对于任一 $n\in\mathbf{Z}^{+}$，f^{n}：$X\to X$ 也是一个单射.

(2) 证明：f 没有最终要出现的周期点.

8.15 考虑 $f(x)=\frac{1}{1-x}$. 设 X 是 f 在其上定义了一个动力系统的 $\mathbf{R}$ 的最大子空间. 证明：X 有 3 个元素，并证明任一 $x\in X$ 是具有一条轨线的一个 3 周期点，此轨线包含 X 的每个元素中的一个点.

8.2 稳定性

在许多物理环境和数学模型中，我们观察趋向于固定或稳定的状态. 例如从一个烤箱中取出来的一块饼有一个温度，经冷却就趋向于固定的室温；一名儿童当他让秋千迅速地上下运动以平衡振幅减弱的效应时，就在这个秋千上达到一个稳定的振动. 又例如，我们在数学上看到，对于 $f(x)=\frac{1}{2}x$ 来说，每个点都有一条收敛于不动点 0 的轨线，而对于 $f(x)=x^{1/3}$ 来说，除了 0 以外，每个点都有收敛于周期轨线 $\{-1, 1\}$ 的一条轨线.

本节我们通过称为动力系统的不动点或周期点的渐近稳定性，来描述这些性态. 我们从与稳定性有关的一些定义开始进行讨论.

定义 8.6 已知 f：$X\to X$，设 x^{*} 是 f 的一个不动点.

(1) 我们称 x^{*} 是**稳定的**，如果对于任一包含 x^{*} 的开集 U，存在一个包含 x^{*} 的开集 V，使得对于任一 $x\in V$，x 的轨线位于 U 之中.

(2) 我们称 x^{*} 是**渐近稳定的**，如果 x^{*} 是稳定的，而且如果存在一个包含 x^{*} 的开集 U，使得对于任一 $x\in U$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f^{n}(x) = x^{*}.$$

(3) 我们称 x^{*} 是**中性稳定的**，如果 x^{*} 是稳定的，但不是渐近稳定的.

(4) 我们称 x^{*} 是**不稳定的**，如果 x^{*} 不是稳定的.

定义 8.7 已知 f：$X\to X$，设 x^{*} 是 f 的一个 m 周期点. 如果 x^{*}，$f(x^{*})$，$f^{2}(x^{*})$，…，$f^{m-1}(x^{*})$ 作为 f^{m} 的不动点全部是稳定的，我们就称 x^{*} 是一个**稳定周期点**，或有一条**稳定周期轨线**. 类似地，我们可对周期点和周期轨线定义渐近稳定. 如果 x^{*} 是一个**稳定周期点**，但不是渐近稳定的，我们就称它是中性稳定的周期点，或有一条**中性稳定的周期轨线**. 如果 x^{*} 不是一个稳定周期点，我们就称它是一个**不稳定的周期点**，或有一条**不稳定的周期轨线**.

在定义 8.7 中，在 f 是连续的情况，x^{*} 作为一个周期点的稳定性，只是通过作为 f^{m} 的不动点的稳定性来确定的. 特别，如果 f 是连续的，且是 f^{m} 的一个稳定不动点，那么 $f(x^{*})$，$f^{2}(x^{*})$，…，$f^{m-1}(x^{*})$ 也是稳定的不动点.

同样的结论，对 x^{*} 是一个渐近稳定周期点，中性稳定周期点，或不稳定周期点的情况也成立.（见练习 8.17.）

例 8.6 我们再次考虑例 8.2 的 4 个例子.

(1) 由 $f(x)=-2x$ 定义的 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

(2) 由 $g(x)=\frac{1}{2}x$ 定义的 g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

(3) 由 $h(x)=-x$ 定义的 h：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

(4) 由 $k(x)=0$ 定义的 k：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

以上的每个函数都以 $x=0$ 为不动点. 对于 f，请注意，如果我们取包含 0 的开区间 $U=(-1, 1)$，那么除了在 0 的轨线之外，从 U 开始的任一轨线最终离开 U. 因此，0 是 f 的一个不稳定的不动点. 再对于 g 考虑不动点 0. 已知任一包含 0 的开区间 U，设 V 是包含于 U 中的一个开区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$. 从 V 开始的任一轨线仍留在 V 中，并趋近于极限 0. 因此，0 是 g 的一个渐近稳定的不动点. 对于 k 来说，在 0 的不动点也是渐近稳定的不动点. 对于 h 而言，在 0 的不动点是中性稳定的，且每个异于 0 的点，是一个中性稳定的 2 周期点.

例 8.7 再一次考虑例 8.3 中的储蓄模型. 对于账户累计利息的情况，既不存入又不取出时，就有由 $f(x)=1.05x$ 定义的动力系统. 对于这个 f，我们在 0 有一个不稳定的不动点. 如果我们从任一金额非零的账户开始，不管金额多小，此账户的金额离开 0 而增长.

在第二种储蓄模型中，我们在取得利息后每年取款 1000 美元，此动力系统定义为：

$$g(x)=\begin{cases}1.05x-1000 & \text{若 } 1.05x\geqslant 1000,\\ 0 & \text{若 } 1.05x\leqslant 1000.\end{cases}$$

在这种情况下，0 是渐近稳定的不动点. 如果我们从金额接近于 0 的账户开始，那么在长期持有此账户后，我们将终结于 0.（事实上，对于充分小的初始金额，我们立即达到 0.）在另一方面，我们在 20 000 有一个不稳定的不动点. 在此动力系统中，大于 20 000 的初始金额将无限增加，而小于 20 000 的初始金额将减少到 0.

正如我们已经指出过的，稳定的不动点和周期点，是在对一个动力系统的数学方法，并对为一个动力系统建模的一个物理系统的性态进行长期探讨时我们常看到或探索到的点. 在例 8.8 和 8.10 的论述中就会看到这样的点.

例 8.8 设由 $f(x)=2x(1-x)$ 来定义函数 f：$[0, 1]\to[0, 1]$. 如果我们取一个值 $w\in(0, 1)$，并用计算器来计算 $f(w)$，且在 w 对 f 进行逐次迭代后发现，计算器每次最终都回到 0.5. 通过这个过程我们发现，所出现的是 f 的一个稳定的不动点. 事实上，0.5 是渐近稳定的不动点，而此系统把在 $(0, 1)$ 中的所有值都推向于它. 因此，无论是接近于 0.5 还是固定于 0.5，此系统存在长期的性态.

当然，我们能够通过解方程 $2x(1-x)=x$，来为 f 求出不动点 0.5. 解此方程得到 $x=0$ 或 0.5. 所以，在 0 也有一个不动点. 在 0 的不动点是不稳定的，因而对 f 逐次迭代的过程不能显现此不动点，除非我们选它（或选 1）为起点. 不能期望此系统的长期性态在 0 处不动.

尽管用计算器在 $w\in(0, 1)$ 对 f 作有限多次的逐次迭代后，为我们提供值 0.5，点 w 实际上并不是 f 的一个最终要出现的不动点. 理由是，我们最终恰好得到的 0.5，是用计算器对它的结果按照四舍五入的方式得出的，而在某点刚好四舍五入为 0.5，于是它是不动点. 所以，如果 $w\in(0, 1)$ 且 $w\neq 0.5$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(w)=0.5$，但对于任一 n，$f^n(w)\neq 0.5$.

观察在 $\mathbf{R}$ 中一个区域上所定义一个动力系统性态的方便方法，是称为**蛛网图**的方法.（见图 8.8.）我们用上例的函数 f：$[0, 1]\to[0, 1]$ 来说明这种方法. 一开始画出 $f(x)=2x(1-x)$

与 $y=x$ 的图形，然后取一个初始值 $a\in(0,1)$，并从直线 $y=x$ 上的点 (a,a) 出发，沿垂直方向到 $f(x)$ 上的点 $(a,f(a))$，然后再沿水平方向到直线 $y=x$ 上的点 $(f(a),f(a))$. 重复这些步骤，就把我们引向直线 $y=x$ 上的点 $(f^2(a),f^2(a))$. 继续重复这一过程，就得到在直线 $y=x$ 上所描绘出的 a 的轨线.

以下的定理对线性函数 $f(x)=mx+b$ 所有可能的不动点和稳定性性质加以分类.

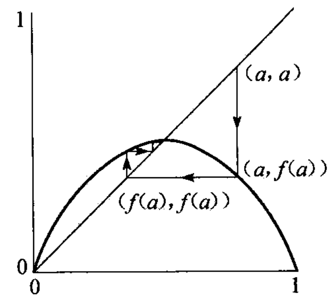


图 8.8 $f(x)=2x(1-x)$ 的一个蛛网图

定理 8.8 设 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是线性函数 $f(x)=mx+b$.

(1) 如果 $m\neq1$，那么 f 有唯一的不动点. 如果 $m=-1$，那么，此不动点是中性稳定的. 如果 $|m|<1$，那么此不动点是渐近稳定的. 如果 $|m|>1$，那么，此不动点是不稳定的.

(2) 如果 $m=1$，那么当 $b\neq0$ 时，f 没有不动点，而当 $b=0$ 时，任一 $x\in\mathbf{R}$ 都是中性稳定的不动点.

证明 见练习 8.19. ■

在图 8.9 中，我们用蛛网图来说明在定理 8.8 中所确认的某些稳定性性质.

而如果一个函数在一个不动点是可微的，那么以下的定理指出，此不动点的稳定性可以通过在此不动点处的导数值来确定，只要此值不是 -1 或 1.

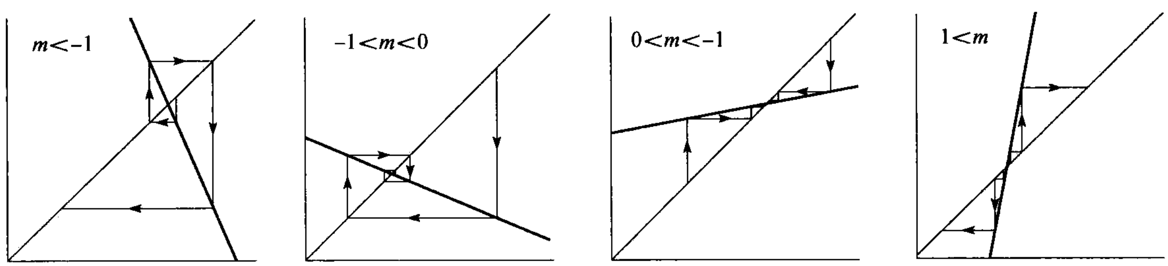


图 8.9 线性函数 $f(x)=mx+b$ 的稳定性性质

定理 8.9 设 X 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集. 假定 x_0 是 f: $X\to X$ 的一个不动点，且 f 在 x_0 是可微的. 于是，如果 $|f'(x_0)|<1$，那么 x_0 是渐近稳定的；如果 $|f'(x_0)|>1$，那么 x_0 是不稳定的.

我们对定理 8.9 不作证明. 它的证明可以在动力系统的标准入门教材例如 [DevR] 中找到. 证明的思路是，只要 $|f'(x_0)|\neq1$，作为 f 的一个不动点的 x_0 的稳定性，由作为 f 在 x_0 处的线性逼近的一个不动点 x_0 的稳定性来确定. (见图 8.10.) 上述线性逼近是函数 $L(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

定理 8.9 没有涉及 $|f'(x_0)|=1$ 时的转移情况，那时 x_0 可能是中性稳定的、渐近稳定的，或不稳定的. (见练习 8.20.)

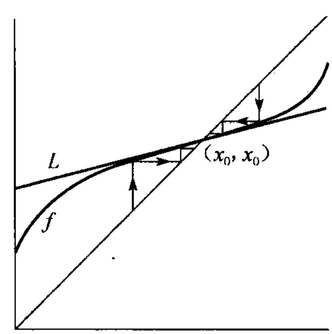


图 8.10 对于 f 与 L 来说，不动点 x_0 的稳定性是相同的

例 8.9 让我们回顾以前曾经考虑过的某些例子，以考察如何用定理 8.8 与 8.9 来对我们关于稳定性的观察加以验证.

对于在例 8.3 中由 $f(x)=1.0.5x$ 给出的不取款的储蓄模

型，我们在 0 处有一个不动点．f 在 0 处的斜率是 1.05，它的值大于 1，因而此不动点是不稳定的．

对于在例 8.3 中由

$$g(x)=\begin{cases}1.05x-1000 & \text{若 } 1.05x\geqslant 1000,\\ 0 & \text{若 } 1.05x\leqslant 1000\end{cases}$$

给出的考虑取款的储蓄模型，我们在 0 和 20 000 处有不动点．g 在 20 000 处的斜率是 1.05，蕴涵 20 000 是一个不稳定的不动点．g 在 0 处的斜率是 0，蕴涵 0 是一个渐近稳定的不动点．

对于例 8.8 中的函数 $f(x)=2x(1-x)$，在 0 与 $\frac{1}{2}$ 处存在不动点．此外，由于 $f'(0)=2$，所以 0 是一个不稳定的不动点；而又由于 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以 $\frac{1}{2}$ 是一个渐近稳定的不动点．

对于例 8.8 中的帐篷函数 T 来说，我们在 0 与 $\frac{2}{3}$ 处存在不动点．在 0 处，T 的斜率是 2；在 $\frac{2}{3}$ 处，T 的斜率是 -2．于是得出，二者都是不稳定的不动点．在 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{4}{5}$ 还存在周期为 2 的点．我们从图 8.6 中 T^2 的图形可以看出，T^2 在每一点的斜率都是 -4．因此，这些周期点是不稳定的．于是，对于帐篷函数，我们既不能预期看到此系统经长期趋向不动点 0 与 $\frac{2}{3}$ 的过程而趋于平静，也不能预期看到此系统经长期趋向周期轨线 $\left\{\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right\}$ 的过程而趋于平静．事实上，正如我们在 8.3 节中将看到的，存在密集分布于 $[0,1]$ 的周期点 T，但它们都是不稳定的，所以此系统不会以它们为归宿．

不一致之处在于，T^2 的导数与在周期轨线 $\left\{\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right\}$ 上任一点的导数相同．事实上，已知 $f: X\to X$，其中 $X\subset\mathbf{R}$，如果 $x_1, \cdots, x_n$ 构成 f 的一条 m 周期轨线，并设 f 是可微的，那么 f^m 在 $x_1, \cdots, x_n$ 之中任一点的导数，等于 $f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_n)$，即在此轨线的任一点求导所得到的值的乘积．(见练习 8.21.)

例 8.10 我们在本例考虑挂于系在天花板的一根弹簧上的一个重块．假定存在一个平衡位置，当不存在运动时，重块就停留在那个位置．把此平衡位置作为确定重块位移的原点．我们还假定，当此重块运动时它在平衡位置上下振动，离此平衡位置所提升的距离不超过 M．我们通过函数 $f: [0, M]\to[0, M]$ 为此重块的运动建模，这样定义这个函数：如果此重块以前振动的最大高度是 x 的话，那么 $f(x)$ 就是此重块在一个特定振动的最大高度．(见图 8.11.)

对于衰减运动，例如由空气阻力所引起的运动的情况，正如图 8.12 左边所示，我们有 $f(0)=0$，而对于其他所有的 x，都有 $f(x)<x$．于是，我们在 0 处有一个稳定的不动点，而经过长期运作，我们预期能看到此弹簧－重块系统趋于平衡．

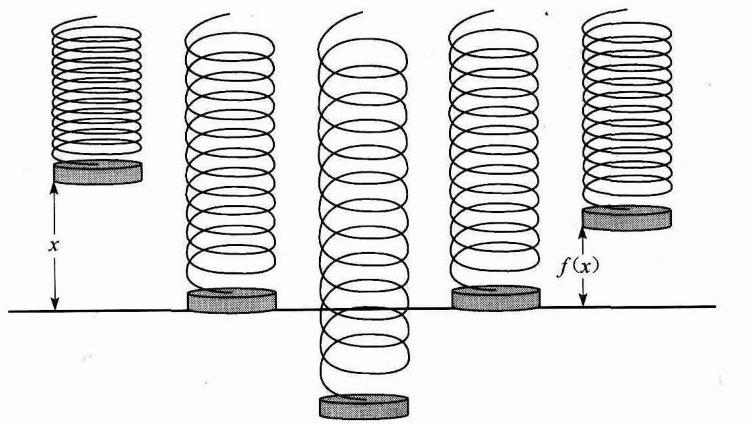


图 8.11 振动中的弹簧与重块

另一方面，假定我们激励此运动，例如通过在任一时刻给此弹簧施加一个向下的拉力，沿朝下的方向通过此平衡位置. 在这种情况下，正如图 8.12 右边所示，我们有 $f(0)=0$，而对于其他所有的 x，都有 $f(x)>x$. 此时，我们在 0 处有一个不稳定的不动点. 此系统一旦运动，就保持振幅越来越大的运动.

让我们来观察当把以下两种情景，即小规模的衰减和大规模的激励相结合时，究竟会出现什么结果. 假定当此振动的最大点接近于 0 时，对此重块施加一个拉力，而当此振动的最大点较大时我们让衰减保持. 我们假定 $f(0)=0$，而对于接近于 0 的 x 有 $f(x)>x$，而对于较大的 x 有 $f(x)<x$，并且设 f 在小规模的激励和大规模的衰减之间的转换之中时是连续的. (见图 8.13.) 由介值定理可知，有一个点 $x_0>0$，使得 $f(x_0)=x_0$，也就是说，我们有一个不动点. 请注意，此不动点并不代表重块处于一种不动的情况，而是代表此重块在每次振动所回复到的平衡位置以上的最大高度. 我们把它认为是一种持续振动——既不衰减又不增长的振动. 于是，小规模的激励与大规模的衰减结合在一起，就产生一种持续振动.

此外，假定 f 的图形如图 8.13 所示，那么 $0<f'(x_0)<1$，且 x_0 是渐近稳定的. 因此，持续振动是我们所预期的经长期运作后此系统所趋于的性态.

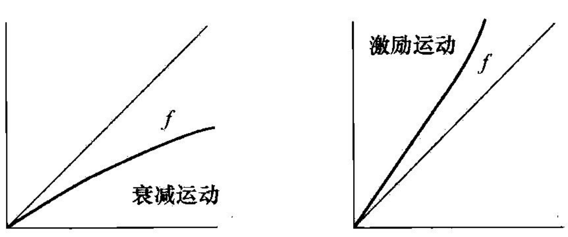


图 8.12 衰减运动与激励运动的图形

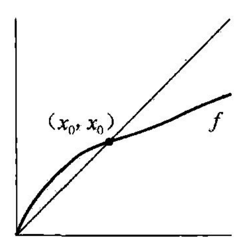


图 8.13 小规模衰减和大规模激励的整合

在例 8.10 中所看到的持续振动，在物理系统是常见的. 正如你在吹一个木管乐器的簧片时，就会产生一个小幅度的激励，此激励通过恢复力来阻扰簧片保持降半音的倾向. 此激励与恢复力的平衡所形成的振动，产生由乐器所形成乐曲的声音. 范德波尔振荡器是为持续振动所建立的一种经典的微分方程模型. 它是首先由范德波尔（1889—1959）作为心脏搏动的

一种模型而引入的，但更一般地被作为电子线路的一种模型来加以考察. 此微分方程既反映小规模激励，又反映大规模衰减，因而它的解趋于一种持续振动.（见 [Str].）

8.2 节练习

8.16 对以下每种函数确定它的不动点和周期点，并对所有这样的点，用定理 8.9 来确定它是稳定的：

(1) $f(x)=x^3$　(2) $f(x)=-x^3$　(3) $f(x)=-x^{1/3}$

(4) $f(x)=\frac{4}{\pi}\tan^{-1}(x)$　(5) $f(x)=1-x^2$　(6) $f(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$

(7) $f(x)=\frac{\pi}{2}\sin(x)$　(8) $f(x)=2(x-x^2)$　(9) $f(x)=x+\sin(x)$

8.17 假设 f 是一个连续函数.

(1) 证明：如果 x^* 是 f 的一个稳定的 m 周期点，那么 $f(x^*)$，$f^2(x^*)$，…，$f^{m-1}(x^*)$ 也是稳定的 m 周期点.

(2) 证明：如果 x^* 是 f 的一个渐近稳定的 m 周期点，那么 $f(x^*)$，$f^2(x^*)$，…，$f^{m-1}(x^*)$ 也是渐近稳定的 m 周期点.

(3) 证明：如果 x^* 是 f 的一个中性稳定的 m 周期点，那么 $f(x^*)$，$f^2(x^*)$，…，$f^{m-1}(x^*)$ 也是中性稳定的 m 周期点.

(4) 证明：如果 x^* 是 f 的一个不稳定的 m 周期点，那么 $f(x^*)$，$f^2(x^*)$，…，$f^{m-1}(x^*)$ 也是不稳定的 m 周期点.

8.18 为例 8.3、8.4 和 8.8 中的动力系统画蛛网图，说明在例 8.9 中所讨论的稳定性性质.

8.19 **证明定理 8.8**：设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是线性函数 $f(x)=mx+b$.

(1) 如果 $m\neq1$，那么 f 有唯一的不动点，且如果 $m=-1$，那么此不动点是中性稳定的；如果 $|m|<1$，那么此不动点是渐近稳定的，如果 $|m|>1$，那么此不动点是不稳定的.

(2) 如果 $m=1$，那么当 $b\neq0$ 时，f 没有不动点，而当 $b=0$ 时，任一 $x\in\mathbf{R}$ 都是中性稳定的不动点.

8.20 对于定理 8.9 没有涉及的转移情况，其中在 f 的一个不动点 x_0，有 $|f'(x_0)|=1$，此时 x_0 可能是中性稳定的、渐近稳定的，或不稳定的.

(1) 举例说明函数 f 有一个满足 $|f'(x_0)|=1$ 的不动点 x_0，但 x_0 是中性稳定的.

(2) 举例说明函数 f 有一个满足 $|f'(x_0)|=1$ 的不动点 x_0，但 x_0 是渐近稳定的.

(3) 举例说明函数 f 有一个满足 $|f'(x_0)|=1$ 的不动点 x_0，但 x_0 是不稳定的.

8.21 假定 $X\subset\mathbf{R}^n$ 且 f：$X\to X$ 是可微的证明：如果 x_1，…，x_n 构成 f 的一条 m 周期轨线，并设 f 是可微的，那么对于任一 i，

$$(f^m)'(x_i)=f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_m).$$

8.22 牛顿法是逐次逼近函数 f：$D\to\mathbf{R}$ 的一种迭代过程，其中 $D\subset\mathbf{R}$. 我们假定 f 是二阶可微的. 对此 f，定义 $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. 牛顿法背后的思路是，初始猜测 f 的零点为 x_0，然后在 x_0 对 g 进行迭代，得到点的一个（我们预期的）收敛于 f 的一个零点序列 $x_n=g^n(x_0)$.

(1) 证明：如果 x 是 g 的一个不动点，那么 x 是 f 的一个零点.

(2) 证明：g 的每个不动点是渐近稳定的.

如果 x 满足 $f'(x)=0$，那么 g 在 x 没有定义. 这一个 x 可能是 f 的一个零点. 如果 z 是使得 $f'(z)\neq0$ 的 f 的一个零点，那么 (1) 和 (2) 中的结论蕴涵，如果我们初始猜测为充分接近于 z 的

x_0，那么在 g 下 x_0 的轨线收敛于 z.

再考虑我们有 g 的两个不动点 z_1 与 z_2，而在它们之间不存在不动点的情况．由（2），分别存在 z_1 与 z_2 的邻域 U_1 与 U_2，使得 U_i 中的每一点的轨线收敛于 z_i．z_1 与 z_2 之间必定会发生以下的情况，即其轨线收敛于 z_1 的那些点与轨线收敛于 z_2 的那些点相分离．至少我们可以做以下的工作：

（3）证明：g 的每对不动点之间存在使 g 没有定义的一点．

8.3 混沌

1961 年美国麻省理工学院的气象学家 E. 洛伦茨，试图在计算机上用 12 个较复杂的方程所表达的模型来仿真大气模型．他一反完全用计算机对以前的数据进行反复运算的惯例，决定重新用一部分上次运算所输出的数据，来开始进行计算．不过，计算机输入的数据所保持的精确度不再达到 60 位，他所使用的是由计算机所提供的，具有 30 位精确度的打印数据．更令他惊奇的是，计算的结果与以前的结果完全不同．他发现了对初始条件的敏感度．即使这些方程不变，只要输入条件有小的改变，就会引起输出的巨大改变．这常常被称为“蝴蝶效应”，当香港一只蝴蝶扇动一下它的翅膀，最后可能会足以引起美国得克萨斯州的一场龙卷风．换句话说，微小的改变能产生戏剧性的冲击．这就是为什么进行长期天气预报如此困难的原因所在．洛伦茨在他的有关这一发现的现代经典论文“Deterministic nonperiodic flow”（确定性的非周期气流）中说，

> 当我们的结论……应用于大气……它们意味着，用任何方法对充分遥远的未来进行预测都是不可能的，除非确切地知道现在的条件．考虑到难以发现的不精确性和天气观测不够完整，看来，精确地进行周期很长的预报是不存在的．

借助计算机的帮助，洛伦茨对庞加莱在 60 年前曾直观描述过的，作为对三体问题研究结论的一个现象进行了观察．庞加莱在 1903 年的论文“Science and Method”（科学和方法）中曾提出：

> 如果我们确切地知道自然界的规律和宇宙在初始状态的情景，就能预测到同一宇宙在随后时刻的情景．但是……我们所知道的也只是初始状态的近似情况而已．如果我们能以同样的近似程度来预测随后的情景的话，这就是我们所要求的一切……但是并非总能如此，也可能会出现，由于初始条件细微的差别而使最后的现象引起巨大差别的情况 [Pet].

在庞加莱和洛伦茨等人的时代，都有人瞥见过这种有趣的现象，由于它被人们广泛地观察与理解，被确认为是许多物理和数学系统的一个艰深部分，这就导致了采用计算机作为数学与科学的一种实验工具．

数学和科学的一场革命应运而生，在随后几个年代，许多数学家和科学家致力于对这种现象及其性质和结论进行识别、描述和定义．混沌这个名称广泛地用于来源于敏感地依赖于初始条件的一般结构和性态．

除了敏感地依赖于初始条件的不可预测性以外，混沌还包括一个规律性的因素．在一个混沌系统中的一些轨线，可能在整个时间段（可能非常长）是周期的，但是它们在最后，却

偏离为另一个多半是与周期状态明显不同的性态范围. 地球环绕太阳的规律性，在一个总体混沌的系统中，可能具有近似的长期周期性.（关于这种可能性的进一步的讨论，见 [Pet].）

本节我们提出混沌的一个拓扑学定义，还讨论混沌的某些本质特征：它是确定性的，但却是不可预测的；它具有隐藏的规律性，而在同时它把整个定义域混杂在一起. 我们还进一步考察帐篷函数，并提出证明它是混沌的两种途径. 最后，我们介绍对于初始条件的敏感依赖性，并提出一个定理，说明在一个无限度量空间上的每个连续混沌函数，具有对于初始条件的敏感依赖性.

在本节，我们引入依赖于初始条件的敏感性，不过，到 8.5 节我们才提出论述这一概念的定理，即在一个无限的度量空间上的每个连续混沌函数，存在依赖于初始条件的敏感性.

定义 8.10 设 X 是一个拓扑空间函数 f：$X\to X$ 称为是**混沌的**或**具有混沌**，如果

(1) f 的周期点的集合在 X 中是稠密的.

(2) 对于 X 中的任一开集 U 与 V，存在 $x\in U$ 与 $n\in\mathbf{Z}^+$，使得 $f^n(x)\in V$.

第 1 个条件意味着，存在稠密分布于整个区域的规则周期的性态. 无论我们在此区域中所选取的是什么点，都存在任意接近的周期点.

第 2 个条件称为拓扑传递性，意味着在此定义域中的任一对区域通过此系统混杂在一起. 给定任意一对开集，在第一个集合中至少存在一个点，经过某种迭代映射到第二个集合.

再一次考虑帐篷函数

$$T(x)=\begin{cases}2x & \text{若 } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\\ 2-2x & \text{若 } x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

在 8.1 节中我们已经给出了 T 和 T^2 的图形. 在图 8.14 中，我们画出了 T^3 与 T^4 的图形. 图案是显而易见的，对于任一 $j=1, 2, \cdots, 2^{n-1}$，T^n 的图形是张在区间$\left[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}\right]$中的一个“帐篷”. 于是得出，每个这样的区间，包含 T^n 的图形与直线 $y=x$ 的两个交点. 这些交点是 T 的周期点. 因此，当 n 越来越大时，区间$\left[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}\right]$把 $[0, 1]$ 分割为越来越小的区间，其中每个区间包含周期点.

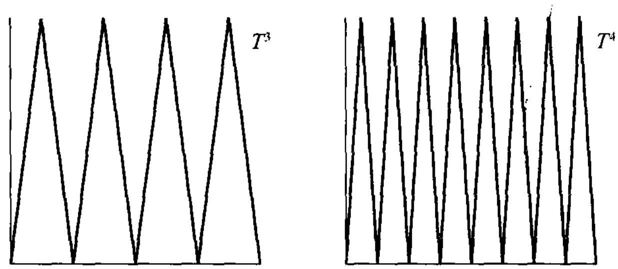


图 8.14 T^3 与 T^4 的图形

此外，T^n 把每个区间$\left[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}\right]$映射到 $[0, 1]$ 上. 所以，当 n 越来越大时，在整个区间 $[0, 1]$ 通过 T^n 的伸展或“混合”而得到的区间越来越小. 因此，混沌的两个主要构成要素，是由这个帐篷函数提供的. 在本节最后的一组补充练习中，通过对这种方法逐步加以详细叙述，来证明 T 是混沌的.

不过，我们现在采取一种不同的方法来证明 T 是混沌的. 这种方法以 $[0, 1]$ 中实数二进制表达式为基础. 具体来说，我们利用以下的事实，即任一 $x\in[0, 1]$ 可以表示为

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_m}{2^m}+\cdots,$$

其中每个 a_i 等于 0 或 1. 对于这样的 x，我们有二进制表达式 $x=.a_1a_2\cdots a_m\cdots$

对于 $a=0$ 或 1，我们设 $a^*=1-a$. 注意到 $(a^*)^*=a$，而如果 x 有二进制表达式 $.a_1a_2\cdots a_m\cdots$，那么 $1-x$ 有二进制表达式 $.a_1^*a_2^*\cdots a_m^*\cdots$

再设 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，那么 x 有形如 $.0a_2\cdots a_m\cdots$的二进制表达式，因而得出

$$2x=2\left(\frac{0}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_m}{2^m}+\cdots\right)=.a_2a_3\cdots a_m\cdots.$$

此外，如果 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，那么 x 有形如 $.1a_2\cdots a_m\cdots$的二进制表达式；所以 $1-x=.0a_2^*\cdots a_m^*\cdots$，而 $2-2x=.a_2^*a_3^*\cdots a_m^*\cdots$.（请注意，二进制表达式不是唯一的，例如 1/2 既可以表示为 .1000000…，也可以表示为 .01111111…，而由于这个理由，我们既可以把 1/2 包括在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$中，也可以把它包括在$\left[\frac{1}{2},1\right]$中.）

因此，利用二进制表达式，可以把帐篷函数 T：[0，1]→[0，1] 表示如下：

$$T(.a_1a_2\cdots a_m\cdots)=\begin{cases}.a_2a_3\cdots a_m\cdots & \text{若 } a_1=0,\\ .a_2^*a_3^*\cdots a_m^*\cdots & \text{若 } a_1=1.\end{cases}$$

例如，由 $T(.000\cdots)=.000\cdots$，就可确认在 0 处有不动点. 而 1 的二进制表达式是 .111…，而 $T(.111\cdots)=.000\cdots$，所以 $T(1)=0$. 对于 2/3，它的二进制表达式是 .1010…，而 $T(.1010\cdots)=.1010\cdots$，于是（正如我们已知道的）2/3 是一个不动点. 对于 2/5，它的二进制表达式是 .01100110…，而 $T(.01100110\cdots)=.11001100\cdots=4/5$. 另一方面，$T(.11001100\cdots)=.011011\cdots=2/5$. 因此，正如我们以前就已知道的，我们有 2 周期点 2/5 与 4/5.

正如下列引理所指出的，利用 T 的上述表达式，我们还有一种表示 $T^n(.a_1a_2\cdots a_m\cdots)$ 的简单方法：

引理 8.11 对于 $.a_1a_2\cdots a_m\cdots\in[0,1]$ 和 $n\in\mathbf{Z}^+$，

$$T^n(.a_1a_2\cdots a_m\cdots)=\begin{cases}.a_{n+1}a_{n+2}\cdots & \text{若 } a_n=0,\\ .a_{n+1}^*a_{n+2}^*\cdots & \text{若 } a_n=1.\end{cases}$$

证明 我们对 n 用数学归纳法来加以证明. 对于 $n=1$，结论由 T 的定义得出. 假设结论对于 $n-1$ 成立，那么

$$\begin{aligned}T^n(.a_1a_2\cdots a_m\cdots)&=T(T^{n-1}(.a_1a_2\cdots a_m\cdots))\\&=\begin{cases}T(.a_na_{n+1}\cdots) & \text{若 } a_{n-1}=0,\\ T(.a_n^*a_{n+1}^*\cdots) & \text{若 } a_{n-1}=1.\end{cases}\end{aligned}$$

其中第二个等式成立，这由归纳法的假设得到. 假定 $a_n=0$，那么 $T^n(.a_1a_2\cdots a_m\cdots)$ 要么等于 $T(.0a_{n+1}a_{n+2}\cdots)$，要么等于 $T(.1a_{n+1}^*a_{n+2}^*\cdots)$. 无论哪种情况，由 T 的定义，结果都是我们所想得到的 $.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$.

再设 $a_n=1$，那么 $T^n(.a_1a_2\cdots a_m\cdots)$ 要么等于 $T(.1a_{n+1}a_{n+2}\cdots)$，要么等于 $T(.0a_{n+1}^*a_{n+2}^*\cdots)$.

无论哪种情况，都得到我们所想要的结果 $.a_{n+1}^*a_{n+2}^*\cdots$.

因此，如果结论对于 $n-1$ 成立，它对于 n 也成立，由归纳法可知结论对于所有的 $n\in\mathbf{Z}^+$ 成立. ■

在证明 T 是混沌时，我们使用下面的引理，它指出，如果在 [0，1] 中的两点有相应的二进制表达式，它们的前 n 位一致，那么这两个点之间的距离至多为 $\frac{1}{2^n}$.

引理 8.12 设 x 与 y 分别有二进制表达式 $.a_1a_2\cdots a_m\cdots$ 与 $.b_1b_2\cdots b_m\cdots$，如果对于 $i=1,\cdots,n$，有 $a_i=b_i$，那么 $|x-y|\leqslant\frac{1}{2^n}$.

证明 我们有

$$
\begin{aligned}
|x-y| &= \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{a_j-b_j}{2^j}\right| \\
&\leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\frac{a_j-b_j}{2^j}\right| \\
&\leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^j} \qquad (\text{由于} |a_j-b_j|\leqslant 1) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1}{2^n} \qquad \left(\text{由于} \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}=1\right).
\end{aligned}
$$

现在我们来确立 T 是混沌的. ■

定理 8.13 帐篷函数 T 是混沌的.

证明 首先，我们来证明 T 的周期点在 [0，1] 中是稠密的. 为此只要证明如果 $x\in[0,1]$ 且 $\varepsilon>0$，那么，存在一个周期点 p，使得 $|x-p|<\varepsilon$ 成立就可以了. 为此，设 $x\in[0,1]$，且 $\varepsilon>0$ 是任意的. 假定 $.a_1a_2\cdots a_m\cdots$ 是 x 的一个二进制表达式，且存在充分大的 $n\in\mathbf{Z}^+$，使得 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. 如果我们设

$$p=.a_1a_2\cdots a_n0a_1a_2\cdots a_n0a_1a_2\cdots a_n0\cdots,$$

那么，由引理 8.11 可得 p 是一个周期点，而引理 8.12 蕴涵 $|x-p|<\varepsilon$. 于是 T 的周期点在 [0，1] 中是稠密的.

为了证明拓扑传递性，设 U 与 V 在 [0，1] 中是开集，并设 $x=.a_1a_2\cdots a_m\cdots\in U.\ b_1b_2\cdots b_m\cdots$ 是任意的. 由于 U 是开集，所以存在 $\varepsilon>0$，使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap[0,1]\in U$. 设 $n\in\mathbf{Z}^+$ 充分大，使得 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ 成立. 取 $y=.b_1b_2\cdots b_m\cdots\in V$，并考虑

$$p=.a_1a_2\cdots a_n0b_1b_2b_3\cdots.$$

由引理 8.12，$|x-p|\leqslant\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，因而 $p\in U$. 引理 8.11 蕴涵 $T^{n+1}(p)=y\in V$. 于是得出 T 是拓扑传递的，因而是混沌的. ■

在 T 的拓扑传递性的证明中，二进制表达式 $.b_1b_2\cdots b_m\cdots$ 完全是任意的，且可能与 [0，1] 中的任意点有关. 我们实际上证明的是，已知 U 在 [0，1] 中为开集，那么存在 $n\in\mathbf{Z}^+$，使得 T^n 把 U 映射到 [0，1] 上. 这并不奇怪，因为我们早就注意到这一现象. 特别地，对于 [0，1] 中的开集 U，存在充分大的 $m\in\mathbf{Z}^+$，使得某个区间 $\left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}\right]$ 包含于 U 中. 我们以前曾讨论过 T^m 把每个这样的区间 $\left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}\right]$ 映射到 [0，1] 上.

虽然它在混沌的定义中未起作用，但我们仍可以看出，T 的最终要出现的不动点在 [0，1] 中是稠密的. 从引理 8.11 可得出，在 [0，1] 中相应二进制表达式以全为 0、全为 1 或 0，1 交替结尾的任一点，是一个最终要出现的不动点. （事实上，这已包括了所有可能的情况，见练习 8.23.）已知 x 有一个二进制表达式 $.a_1a_2\cdots a_m\cdots$，具有二进制表达式 $.a_1a_2\cdots a_n000\cdots$ 的点在 x 的 $\frac{1}{2^n}$ 的范围之内，因而在任意接近 x 之处存在一些点，它们是最终要出现的不动点.

容易看出，帐篷函数的周期点都是不稳定的. 事实上以下的定理指出，对于定义在一个无限豪斯多夫空间的任一混沌函数，所有的周期点都是不稳定的. 于是，即使周期点稠密分布于整个定义域，在这一混沌系统中，我们也不指望能看到其中任一点具有长期项的形式.

定理 8.14 设 X 是一个无限豪斯多夫空间，f 是一个连续函数. 如果 $f: X\to X$ 是连续且混沌的，那么 f 的任一周期点都是不稳定的.

证明 见练习 8.25. ■

通常，关于一个函数是混沌的直接证明，远不如像对于帐篷函数所进行的证明那样容易. 然而，拓扑共轭可能有助于确认混沌函数. 以下的定理表明，正如我们可以预期的，在拓扑共轭下混沌得以保持. 因此，已知一个混沌函数，与它拓扑共轭的任意一个函数也是混沌的.

定理 8.15 如果 f 与 g 是拓扑共轭的函数，而且 f 有混沌，那么 g 有混沌.

证明 见练习 8.26. ■

由 $Q(x)=4x(1-x)$ 定义的函数 Q：[0，1]→[0，1]，与帐篷函数是拓扑共轭的. 拓扑共轭是由 $h(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 定义的同胚 h：[0，1]→[0，1] 给出的. 直接可证明，$h\circ T=Q\circ h$.（见练习 8.27.）

于是，定理 8.13 与 8.15 蕴涵 Q 有混沌. 请注意，Q 的图形与 T 的图形有类似的特征.（见图 8.15.）二者都可以看做是把区间 [0，1] 拉伸为两倍长，然后再把拉伸后的区间折叠起来，使得（除了在 $x=1/2$ 处以外）它二对一地映射到 [0，1] 上.

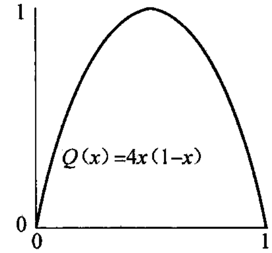


图 8.15 函数 $Q(x)=4x(1-x)$

函数 T 与 Q 所呈现的拉伸与折叠，是引起混沌的典型的非线性性态. 拉伸导致把轨线强行分开，而同时，折叠使动力系统局限于一个紧致区域. 这两种性态的整合，可能归于对于初始条件的敏感依赖及混沌所呈现的不可预测性. 对于初始条件的敏感依赖性，是一种度量性质，定义如下：

定义 8.16 设 (X, d) 是一个度量空间．函数 $f: X\to X$ 有**对于初始条件的敏感依赖性**，如果存在一个 $\delta>0$，使得对于任一 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$，存在 $y\in B_d(x, \varepsilon)$ 和 $n\in\mathbf{Z}^+$，使得 $d(f^n(x), f^n(y))>\delta$.

于是，函数 f 存在对于初始条件的敏感依赖性，如果存在一个距离 δ，使得任意与每个点 x 接近的那些点，在 f 的某次迭代下的象，离在 f 的同次迭代下的象要远 δ. 我们称 δ 为 f 的**敏感性常数**.

在 8.5 节中，我们将证明混沌蕴涵对于初始条件的敏感依赖性．在本节的引言中我们曾指出过，混沌性的性态是确定性的，但却是不可预测的，而且它具有隐藏的规律性，而在同时，它把整个定义域混杂在一起隐藏的规律性和混杂性，分别借助周期点的稠密集和拓扑传递性而被引入混沌的定义之中．具有确定性是所有动力系统的一种特征；其思路是，如果知道初始的点，那么未来就由定义此动力系统的函数完全确定．一个混沌系统的不可预测性，是由对于初始条件的敏感依赖性而导致的．如果在获悉初始状态时出现任何不确定性和差错，那么——正如洛伦茨关于大气的论述——进行精确的长期预报是不可能的.

8.3 节练习

8.23 证明：$x\in[0, 1]$ 是帐篷函数的一个最终要出现的不动点，当且仅当 x 的二进制表达式以全为 0、全为 1 或 0，1 交替的一个序列结尾.

8.24 (1) 证明：如果 X 有一个平凡拓扑，那么当且仅当 f 有一个周期点，$f: X\to X$ 是混沌的.

(2) 证明：如果 X 有一个离散拓扑，且 $f: X\to X$ 是混沌的，那么 X 是有限集，且 f 是 X 元素的一个循环排列.

8.25 **证明定理 8.14**：设 X 是一个无限豪斯多夫空间，f 是一个连续函数．如果 $f: X\to X$ 是连续且混沌的，那么 f 的任一周期点都是不稳定的.

8.26 **证明定理 8.15**：如果 f 与 g 是拓扑共轭的函数，而且 f 有混沌，那么 g 有混沌.

8.27 验证：由 $h(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 定义的同胚 $h: [0, 1]\to[0, 1]$，是帐篷函数与由 $Q(x)=4x(1-x)$ 定义的函数 $Q: [0, 1]\to[0, 1]$ 之间的拓扑共轭.

8.28 验证：由 $Q(x)=4x(1-x)$ 定义的函数 $Q: [0, 1]\to[0, 1]$，与由 $R(x)=1-2x^2$ 定义的函数 $R: [-1, 1]\to[-1, 1]$ 是拓扑共轭的．（于是得出 R 是混沌的结论.）

8.29 证明：由

$$g(x)=\begin{cases}3x & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{3},\\ 2-3x & \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant \frac{2}{3},\\ 3x-2 & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

定义的函数 $g: [0, 1]\to[0, 1]$ 是混沌的，用三进制表达式来证明以下各命题：

(1) 周期点是稠密的.

(2) g 是拓扑传递的.

8.30 证明：如果 $f: X\to X$ 有一个点 x，它的轨线在 X 中是稠密的，那么 f 是拓扑传递的．（如果 X 是 $\mathbf{R}$ 或

S^1 的一个紧致子集，那么这个定理的逆命题亦成立，但它的证明需要用到本书未介绍过的工具.）

8.31 在 $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ 上，设 θ 表示从 x 轴正向按逆时针方向测量时角度取值为 θ 的点. 由 $f(\theta)=2\theta$ 来定义函数 $f: S^1 \to S^1$. 对于（1）与（2），请证明 f 是混沌的.

（1）证明：对于 $n, j \in \mathbf{Z}^+$，角的表达式为 $\frac{2\pi j}{2^{n-1}}$ 的点是 f^n 的不动点，从而证明 f 的周期点在 S^1 中是稠密的.

（2）证明：形如 $\left[\theta, \theta+\frac{\pi}{2^{n-1}}\right] \subset S^1$ 的每个区间在 f^n 下被映射到 S^1 上，再用此结论证明 f 是拓扑传递的.

补充练习：证明帐篷函数是混沌的另一种方法.

我们现在提供帐篷函数是混沌的第二种证明. 这个方法使已为人所知的 T^n 的图形的本质显而易见. 我们首先给出以下的引理，它断言 T^n 的图形在每个区间 $\left[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}\right]$ 上是“帐篷状”的.

引理 8.17 *对于任一 $n \in \mathbf{Z}^+$ 及 $j=1, 2, \cdots, 2^{n-1}$，我们有*

$$T^n(x)=\begin{cases} 2^n x-2j+2 & \text{若 } x \in \left[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j-1/2}{2^{n-1}}\right], \\ -2^n x+2j & \text{若 } x \in \left[\frac{j-1/2}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}\right]. \end{cases}$$

特别地，在 $\left[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}\right]$ 上函数 T^n 在端点等于 0，在中点等于 1，在区间的任一半中是线性的.

SE8.32 证明引理 8.17.（提示：用数学归纳法；由 T 的定义，结论在 $n=1$ 时成立.）

由此引理可直接证明以下的定理：

定理 8.18 *帐篷函数 T 是混沌的.*

证明 我们首先来证明周期点在 [0，1] 中是稠密的. 只要证明 [0，1] 中的每个开集包含一个周期点就可以了. 设 $U \subset [0, 1]$ 是一个任意开集.

SE8.33 证明：存在 $n, j \in \mathbf{Z}^+$，使得区间 $\left[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}\right]$ 位于 U 中.

SE8.34 按上题的 n，证明 T^n 在 U 中有一个不动点，因而在 U 中存在 T 的一个周期点.

然后我们来确认拓扑传递性. 设 U 与 V 是 [0，1] 中的任意开集.

SE8.35 用 SE8.33 和引理 8.17 来证明：存在 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得 $V \subset T^n(U)$，因而得出 T 是拓扑传递的结论. ■

8.4 复杂动力系统的简单人口模型

本节的标题来自一篇名为“具有非常复杂动力系统的简单数学模型”的论文. 该文发表于 1976 年的《自然》杂志上，它的作者是物理学家、生物数学家 R. 梅（1936—）.

梅的这篇论文是混沌革命的一个里程碑. 随着有趣的数学成果和它们潜在的应用结论的提出，这篇论文呼吁科学团体要深刻理解：即使简单的非线性方程，也可能具有范围广泛的性态，从不动点到周期点直至混沌；而在一个已建模的系统中的不可预测的性态，以前认为是来自外部环境的“噪声”，却可能是系统内部混沌性态的结果. 梅进一步强调，这些观念早先已在学生们的数学教育中引入过，“通过对简单的非线性方程可能产生的那些紊乱现象的观

察，来增强学生们的直觉.”本节我们考察曾由梅所讨论过的逻辑斯谛人口模型，并强调模型性态的某些特征.

假定我们有一个人群，它的人数从一代到另一代由函数 F 给出，其中 $F(p)$ 表示从当代人数为 p 所产生的下一代的人数. 我们假定下一代的人数，与以下两个因素成正比：一是当代的人数，二是环境所允许人口增长的场所数量. 于是，$F(p)=kpR(p)$，其中 $R(p)$ 是反映人口在其中可以增长的场所的一个函数. 我们假定环境拥有一个最大人数 M，而 $R(p)$ 简单地由最大人数与当时人数的差 $M-p$ 给出. 于是，$F(p)=kp(M-p)$.

为了简化起见，我们用由 p 表示可能的人数与最大人数之比，即用 $x=p/M$ 来代替变量 p 进行运算. 因此，我们的模型具有形式 $f(x)=\alpha x(1-x)$，定义域为 [0, 1]. 我们称之为**逻辑斯谛增长函数**. 我们认为 α 是一个增长率，用不同的增长率来区分不同的函数，把它记为 f_α，而不是 f.

我们仅对能使得 f_α 把 [0, 1] 映射到自身 [0, 1] 的增长率 α 感兴趣. 这在 $\alpha\in[0, 4]$ 时出现. 我们用**逻辑斯谛族**来表示参数值 $\alpha\in[0, 4]$ 相应的逻辑斯谛函数族. 在图 8.16 中，我们画出了 f_0，f_1，f_2，f_3 和 f_4 的图形. f_0 的动力系统比较简单：无论一代的人口有多少，在下一代立刻变为 0 对于接近 0 的 α 的值 f_0 的动力系统没有多大的差别. 特别是，这样的 f_0 在 0 处有一个渐近稳定的不动点，而在 [0, 1] 中的每条轨线趋近于极限 0. 在另一方面，在我们的参数区域的另一个端点处，$\alpha=4$，我们有函数 $f_4(x)=4x(1-x)$，我们已经在上一节证明它存在混沌.

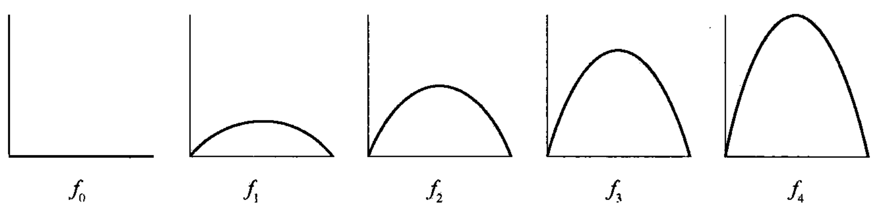


图 8.16

于是我们留下了问题，当我们从把所有点映射到 0 的一个函数 f_0 变为存在混沌的 f_4 时，f_α 的动力系统会出现什么变化呢？通向混沌的道路是一条令人迷憾的道路. 它不能加以分析，即使加以描述也需要许多篇幅. 我们所讨论的仅仅是按照这种方式所发现的某些要点. 进一步的细节，可以在关于动力系统和混沌的许多入门教材中找到. 另外，我们将指出另一些参考书.

首先考虑图 8.17. 我们称此图为**轨线图**，它所描述的是当 α 从 0 变为 4 时，这些函数 f_α 预期的长期性态如何演变. 在此轨线图上水平轴表示参数 α，垂直轴表示在每个函数 f_α 的定义域 [0, 1] 中的变量 x. 此轨线图通过令 α 等于以下各个 9601 个值：0，$\frac{1}{2400}$，$\frac{2}{2400}$，…，$\frac{9599}{2400}$，4，并完成下列步骤而得到：

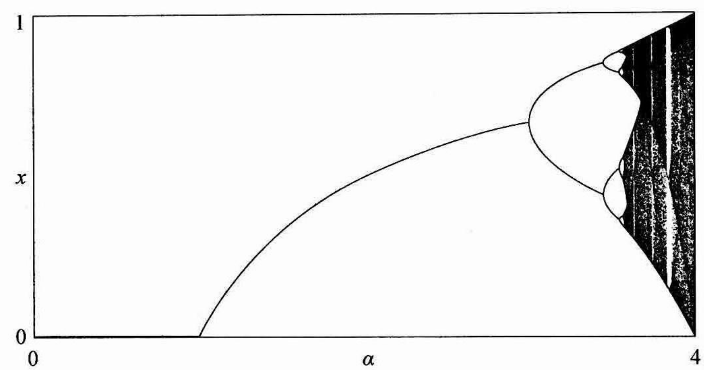


图 8.17 逻辑斯谛族的轨线图（得到 Chip Ross 的许可）

（1）计算在 f_α 下 0.5 的轨线上的前 2075 个点，即计算

$$f_\alpha(0.5), f_\alpha^2(0.5), \cdots, f_\alpha^{2075}(0.5).$$

（2）在此轨线图上，画出与所计算出的 2075 个轨线点的最后 75 个点所对应的以下各点：

$$(\alpha, f_\alpha^{2001}(0.5)), \cdots, (\alpha, f_\alpha^{2075}(0.5)).$$

于是，对于任一 $\alpha\in[0, 4]$，由此轨线图中在 α 处的垂直切片，发现 f_α 长期性态的一个估计．例如，在 $\alpha=1$，正是所画出的值 0．因此，对于 f_1，预期的长期性态趋近于在 0 处的一个不动点．对于 $\alpha=2$，已画出了在 0.5 的单个的点．于是，对于 f_2，预期的长期性态趋近于在 0.5 的一个不动点．而对于 $\alpha=3.4$，接近于 0.45 与 0.85 的值已画出．这反映出对于 $f_{3.4}$，预期的长期性态，趋近于在近似于 0.45 与 0.85 之间摆动的一条周期轨线．让我们用分析的方法来验证这些观察结果，并进一步探索在此轨线图上所描绘出的性态．

为了确定 f_α 的不动点，我们来解 $f_\alpha(x)=x$，求出解为 0 与 $\frac{\alpha-1}{\alpha}$．注意到当 $\alpha\in[0, 1]$ 时，$\frac{\alpha-1}{\alpha}$ 在定义域 [0, 1] 之外，但当 $\alpha\in[1, 4]$ 时，$\frac{\alpha-1}{\alpha}$ 在定义域 [0, 1] 之内．用定理 8.9 来分析这些不动点的稳定性，我们发现当 $\alpha\in[0, 1]$ 时，0 是渐近稳定的，而当 $\alpha\in(1, 4]$ 时，0 是不稳定的．当 $\alpha\in(1, 3)$ 时，$\frac{\alpha-1}{\alpha}$ 是渐近稳定的，而当 $\alpha\in(3, 4]$ 时，$\frac{\alpha-1}{\alpha}$ 是不稳定的．（见练习 8.36.）在图 8.18 中，我们在类似于轨线图中所用的 $x-\alpha$ 坐标系中，画出了这些不动点．我们用一条实心线来标出渐近稳定的不动点所在之处的值，而用一条虚线来标出不稳定的不动点所在之处的值．

在不动点 0 丧失它的稳定性之处，α 的值恰好是不动点 $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ 与 0 处的不动点一起进入我们定义域的 α 的值．此外，不动点 $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ 丧失它的稳定性，大约出现在那个位置，即周期为 2 的轨线进入轨线图中所出现的情景．以下我们探索周期为 2 的周期轨线的起源．我们在这里所发现的稳定性的改变，是称为**分岔**的性态改变的一些例子．

为了找出 f_α 的 2 周期点，我们求解 $f_\alpha^2(x)=x$．与 f_α 的这个不动点一起，我们还求出解

$$\frac{1+\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-2\alpha-3}}{2\alpha}.$$

这些是 2 周期点，而对于每个 α，它们构成一条周期为 2 的轨线．这些 2 周期点是由 $\alpha\in(3,\ 4]$所确定的，在我们的定义域中，它们恰好出现于我们认为它们该去之处，当 α 取此值时，不动点$\frac{\alpha-1}{\alpha}$丧失它的稳定性．当 $\alpha=3$ 时，不动点$\frac{\alpha-1}{\alpha}$引起所谓的**倍周期分岔**，它的稳定性终止，从而生成一条周期为 2 的轨线．如果我们用定理 8.9 来确定这些 2 周期点的稳定性，就发现当 $\alpha\in(3,\ 1+\sqrt{6})$ 时它们是渐近稳定的，而当 $\alpha\in(1+\sqrt{6},\ 4]$ 时是不稳定的．（见练习 8.38.）在图 8.19 中，我们把图 8.18 加以扩展，使得包括这些 2 周期点．请注意图 8.19 与参数取值遍及 $0\leqslant\alpha\leqslant1+\sqrt{6}$时的轨线图二者的类似性．

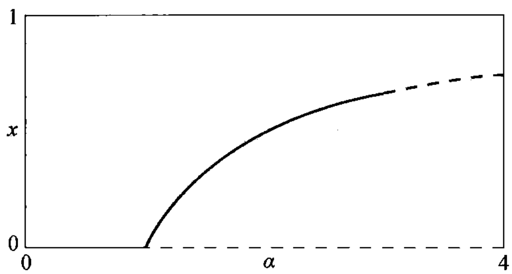


图 8.18 逻辑斯谛族的不动点及其稳定性

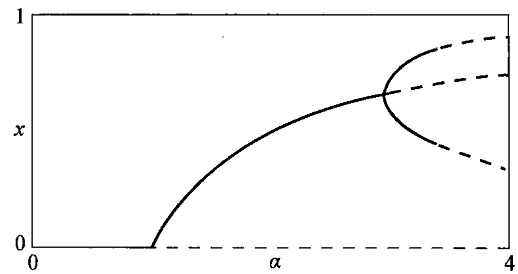


图 8.19 逻辑斯谛族的不动点及 2 周期点

正如我们已观察到的，这些 2 周期点在 $1+\sqrt{6}$处丧失它们的稳定性．在那里究竟发生了什么情况呢？在图 8.20 中，我们仅考虑 $3.4\leqslant\alpha\leqslant3.6$ 的情况，把图 8.17 的轨线图骤然放大来考察这张轨线图，看来一条渐近稳定的周期为 4 的轨线，起源于周期为 2 的轨线丧失它的稳定性的那个点．于是，我们就有另一个倍周期．通过解方程 $f_\alpha^4(x)=x$，难以用分析的方法来验证这一结论，由于这涉及解一个 16 次的多项式方程．但是，可以通过对于接近 $1+\sqrt{6}$的 α 的这个值，用图形考察 $f_\alpha^4(x)=x$ 的方法来验证倍周期．（见练习 8.40.）

轨线图背后的故事还刚刚开始．当参数 α 增加时，周期为 4 的轨线，分岔为周期为 8 的轨线，再分岔为周期为 16 的轨线，等等．这些倍周期之间的参数区间，变得越来越短，与这些倍周期相应的参数值趋近于一个极限 $L\approx3.57$.

在此倍周期的极限 L 处，我们有无限多条周期轨线，而且我们进入参数定义域的一个区域，在那里可发现一系列有趣的性态．此外，我们虽然不能提供所有的细节，但有以下一些要点：

（1）存在无限多个参数 α 的值，在那里 f_α 在 $[0,\ 1]$ 的一个无限子集上是混沌的．

（2）对于任一 $\alpha\in[L,\ 4]$，f_α 有无限多个周期点．

（3）存在 $[L,\ 4]$ 的一个开的稠密子集 P，使得对于任一 $\alpha\in P$，f_α 恰好有一条渐近稳定的周期轨线．对于所有其他的 $\alpha\in[L,\ 4]$，不存在 f_α 的渐近稳定的周期轨线．

（4）对于任一奇数 n，存在参数的一个开区间，在那里存在一条渐近稳定的周期为 n 的轨线．

(5) 刚才提到的周期为 n 的轨线出自所谓的二重分岔（见练习 8.42），并且最后在与前面所观察到的倍周期相类似的，倍周期的一个波状花边出现一开始，就丧失了它的稳定性.

在此轨线图中我们能看到“窗口”，那里存在具有周期为奇数的渐近稳定的轨线，且在那里有随后的倍周期出现. 例如在图 8.21 中，相应于我们更详细地考察与 $3.8\leqslant\alpha\leqslant 3.9$ 相应的轨线图. 我们能看到，当大约 $\alpha=3.83$ 时，周期为 3 的轨线出现，然后当大约 $\alpha=3.84$ 时，分岔为周期为 6 的轨线. 周期为 3 的轨线的起源，随后在练习 8.4 中给出.

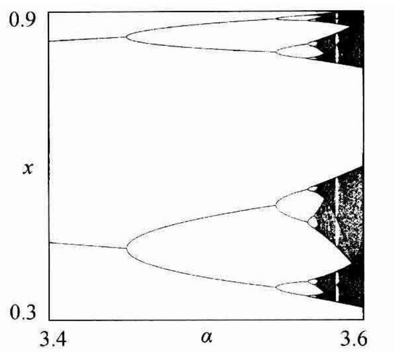


图 8.20 $34\leqslant\alpha\leqslant 36$ 时 f_α 的轨线图（得到 Chip Ross 的许可）

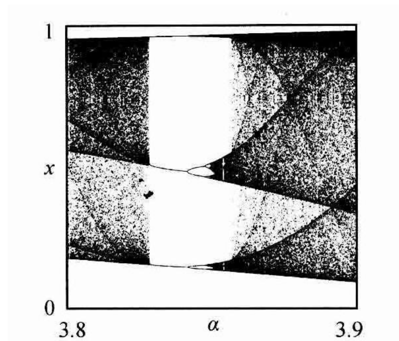


图 8.21 说明周期为 3 的轨线起源的当 $3.8\leqslant\alpha\leqslant 3.9$ 时 f_α 的轨线图（得到 Chip Ross 的许可）

逻辑斯谛族和另一些与它类似的类，已经推广到揭示轨线图背后的动力系统历程的研究.（例如，见 [DevR] 和 [Gil].）一个引人入胜的结果是，我们曾描述过的性态范围对于此逻辑斯谛族来说并不是唯一的. 但可以看出，对于定义在整个区间的另一些函数族，在这个区间，此函数族把整个单峰函数族提升为一个充满具有混沌的区间上的一个函数. 当 α 从 0 变为 1 时，定义在 [0, 1] 上的函数族 $s_\alpha(x)=\alpha\sin(\pi x)$，就是这样的一族.

那么，我们这样对由逻辑斯谛方程建模的人群所能表达的是什么呢？梅氏论文的一个主题是，即使非常简单的函数也可能显示复杂的动力系统，因而在一些简单的自然系统中所观察到的复杂行为，可能传承自这些系统，而不是外部对它们影响的结果. 不动点、周期点和混沌，全都是在这些自然系统所能预期的现象，而当这些系统中的参数改变时，我们能预期这些现象之间异乎寻常的转变，与在逻辑斯谛族中所观察到的转变相类似.

正当混沌革命持续进行之时，许多数学家和科学家，开始在逻辑斯谛族中所观察到的性态方面对一些系统进行考察. 在这种简单模型中的动力系统，有助于深入理解诸如流体中的湍流、天体的运动、疾病的传播和机械中的振动等现象.

混沌不是复杂、不可预测性态的唯一来源，但确认混沌及它的相关构造，有助于数学家和科学家较好地理解非线性系统的动力系统. 当然，拓扑学的概念在这方面起着重要的作用.

8.4 节练习

在以下练习中，f_α 指的是由 $f_\alpha(x)=\alpha x(1-x)$ 所定义的函数，其中 $\alpha\in[0, 4]$.

8.36 确定 f_α 的不动点，并用定理 8.9 来推断它们的稳定性.

8.37 对 α 的下述情况，即 α 稍小于 1、α 等于 1 和 α 稍大于 1，在定义域 $x\in$ [0, 1] 中画出 f_α 的草图. 讨论当参数 α 越过 1 时，你所观察到的不动点和它们稳定性的变化. 在这里所观察到的分岔，称为**超临**

界分岔.

8.38 确定 f_a^2 的周期为 2 的点，并用定理 8.9 来推断它们的稳定性.（提示：求此周期为 2 的点，涉及解一个 4 次多项式方程；所求的不动点，是此 4 次方程的两个解.）

8.39 用一个计算机绘图程序对 a 的下述情况，即 a 稍小于 3、a 等于 3 和 a 稍大于 3，来考察函数 f_a^2 与直线 $y=x$ 的图形，以逼近 f_a^2 的不动点. 在你所观察到的 f_a^2 的不动点中，哪些是 f_a 的不动点？哪些是 f_a 的周期为 2 的点？讨论当参数 a 越过 3 时所观察到的变化. 在这里所观察到的分岔，称为**倍周期分岔**.

8.40 用一个计算机绘图程序，考察函数 f_a^4 与直线 $y=x$ 的图形，以逼近 a 的值，当 a 取这个值时此倍周期分岔，出现从一个渐近稳定的周期为 2 的轨线，到一个渐近稳定的周期为 4 的轨线的转变.

8.41 考虑由 $g_\lambda(x)=\lambda x-x^3$ 所定义的函数族 g_λ：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，其中 $\lambda\in[0,2]$.

(1) 确定不动点和它们的稳定性.

(2) 讨论在整个参数域上所出现的分岔，并说明当分岔出现时 g_λ 的图形（相对于直线 $y=x$）如何改变. 这种分岔称为**音叉分岔**. 正是当 $a=3$ 时 f_a^2 所出现的音叉分岔在此逻辑斯谛族引起了第一倍周期分岔.

8.42 考虑由 $h_\lambda(x)=\lambda+x-x^2$ 所定义的函数族 h_λ：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，其中 $\lambda\in[-1,1]$.

(1) 确定不动点和它们的稳定性.

(2) 讨论在整个参数域上所出现的分岔，并说明当分岔出现时 h_λ 的图形（相对于直线 $y=x$）如何改变. 这种分岔称为**二重分岔**. 请解释此名称的含义.

8.43 用一个计算机绘图程序，考察函数 f_a^3 与直线 $y=x$ 的图形，以逼近 a 的值，当 a 取这个值时，二重分岔出现，引起图 8.21 所示的周期为 3 的窗口.

8.5 混沌蕴涵对初始条件的敏感依赖性

本节证明对初始条件敏感依赖性的度量表示法，是混沌拓扑学定义的一个结论. 特别地，我们有以下的定理：

定理 8.19 *设 X 是一个度量空间，f：$X\to X$ 是连续且混沌的. 那么，f 具有对初始条件的敏感依赖性.*

1992 年，J. 班克斯、J. 布鲁克斯、G. 凯恩斯、G. 戴维斯和 P. 斯特西，在文［Ban］中证明了上述这一结论. 关于混沌和对初始条件敏感依赖性的某些最早的系统叙述，包含在对函数是混沌的一些要求之中.（例如，见［DevR].）对初始条件敏感依赖性的理解，是对混沌的两个拓扑学要求的一个必然结果，这就使得有可能仅仅用拓扑学的术语来叙述混沌的定义.

证明 设 X 是以 d 为度量的一个度量空间，f：$X\to X$ 是连续且混沌的. 我们来证明，存在一个 $\delta>0$，使得对于任一 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，有 $y\in B_d(x,\varepsilon)$ 和 $n\in\mathbf{Z}^+$，使得 $d(f^n(x),f^n(y))>\delta$.

首先选取两个周期点 q 和 q'，它所在的轨线是分离的. 设 δ_0 是这两条轨线之间的最小距离（也就是说，δ_0 是任何两个点之间的最小距离，一个点在轨线 q 上，另一个点在轨线 q' 上）. 由于这两条轨线是分离的，$\delta_0>0$，设 $\delta=\frac{\delta_0}{8}$. 我们断言，$\delta$ 满足定理的要求. 于是，设任一 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$. 不失一般性，我们可以假定 $\varepsilon\leqslant\delta$. 以下我们来证明，存在 $y\in B_d(x,\varepsilon)$ 和 $n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $d(f^n(x),f^n(y))>\delta$.

由于 f 的周期点是稠密的，因此在 $B_d(x,\varepsilon)$ 中存在一个周期点 p. 假定 p 以 m 为周期.

要么 x 到轨线 q 上每个点的距离至少为$\frac{\delta_0}{2}$，要么 x 到轨线 q' 上每个点的距离至少为$\frac{\delta_0}{2}$. 不然的话，由三角不等式，存在一对点——一个在 q 上，另一个在 q' 上——它们的距离小于 δ_0，这就与 δ_0 的定义相矛盾. 不失一般性，可假定 x 到轨线 q 上每个点的距离至少为$\frac{\delta_0}{2}=4\delta$.

设 B_0 是半径为 δ 环绕 q 的开球，而对于任一 $j=1,2,\cdots,m$，设 B_j 是半径为 δ 环绕 $f^j(q)$ 的开球. 由任一 f^j 的连续性，集合 $(f^j)^{-1}(B_j)$ 是开集. 此外，任一这样的集合包含 q. 设

$$V=B_0\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m}((f^j)^{-1}(B_j))\right).$$

集合 V 是包含 q 的一个开集. 请注意，在这里所使用的 m，是 p 的周期，未必是 q 的周期. 构造 V 背后的想法是，找 q 的一个邻域，使得在此邻域中的任一 v，从 f 的前 m 次迭代所得到的点 $f^1(v),\cdots,f^m(v)$ 与 q 的轨线相距不超过 δ. 作此要求的理由是使得简短明了.

由拓扑传递性，存在 $w\in B_d(x,\varepsilon)$ 与 $k\in\mathbf{Z}^+$，使得 $f^k(w)\in V$. 整数 k 与 $k+m$ 相隔 m，所以存在 $h\in\mathbf{Z}^+$，使得 $k\leqslant hm\leqslant k+m$. 我们断言，$d(f^{hm}(p),f^{hm}(w))>2\delta$. 这蕴涵 $f^{hm}(x)$ 与 $f^{hm}(p)$ 或 $f^{hm}(w)$ 的距离必大于 δ，又由于 p 或 w 都在 $B_d(x,\varepsilon)$ 中，这表明 δ 满足定理的要求. 稍后，我们再重提此事.

为了证明 $d(f^{hm}(p),f^{hm}(w))>2\delta$ 这一断言，首先注意到 $f^{hm}(p)=p$，所以我们就证得 $d(p,f^{hm}(w))>2\delta$. 还请注意，由于 $f^k(w)\in V$，因此 f 在 w 上的随后 m 次迭代，确保（正如我们早先所指出过的）都位于与 q 的轨线相距不超过 δ 的范围内. 特别地，$f^{hm}(w)\in B_{hm-k}$，因而 $d(f^{hm}(w),f^{hm-k}(q))<\delta$. 于是，由三角不等式，

$$\begin{aligned}d(x,f^{hm-k}(q))&\leqslant d(x,p)+d(p,f^{hm}(w))+d(f^{hm}(w),f^{hm-k}(q))\\&<\delta+d(p,f^{hm}(w))+\delta\\&=2\delta+d(p,f^{hm}(w)).\end{aligned}$$

由于 x 与 q 的轨线的距离至少为 4δ，于是得出 $4\delta\leqslant d(x,f^{hm-k}(q))$，因此，$4\delta<2\delta+d(p,f^{hm}(w))$，蕴涵 $d(p,f^{hm}(w))>2\delta$. 所以，我们证实了此断言：$d(f^{hm}(p),f^{hm}(w))>2\delta$.

再设 $n=hm$. 要么 $d(f^n(x),f^n(w))>\delta$，要么 $d(f^n(x),f^n(p))>\delta$，否则，我们就有

$$d(f^n(x),f^n(w))\leqslant\delta\text{ 及 }d(f^n(x),f^n(p))\leqslant\delta,$$

由三角不等式，上式蕴涵 $d(f^n(p),f^n(w))\leqslant 2\delta$，于是产生矛盾. 由于 w 与 p 都在$B_d(x,\varepsilon)$ 中，所以在 $B_d(x,\varepsilon)$ 中存在 y 和 $n\in\mathbf{Z}^+$，使得 $d(f^n(x),f^n(y))>\delta$ 成立，于是定理 8.19 得到证明. ■

在 J. 班克斯及其同行的成果之后，其他人又对周期点的稠密集、拓扑传递性的存在性与对初始条件的敏感依赖性之间的关系，进一步作了探索. 许多有意义的成果脱颖而出. 例如，1994 年 M. 韦勒库普和 R. 伯格伦德在［Vel］中，对 $\mathbf{R}$ 中的一个区间 I 证明了，如果 $f:I\to I$ 是连续的，且有拓扑传递性，那么 f 有周期点的一个稠密集，因而是混沌的. 因此，对于 $\mathbf{R}$ 中的一个区间上的一个连续函数，拓扑传递性足以确保混沌的存在.

1997 年，P. 图伊在［Tou］中证明了，对于连续函数 $f: X\to X$，在定义 8.10 中关于混沌的两个条件，可以合并为下列定理的一个必要条件：

定理 8.20 连续函数 $f: X\to X$ 是混沌的，当且仅当对于 X 中的任一对开集 U 与 V，存在一个周期点 $x\in U$ 和 $k\in \mathbf{Z}^+$，使得 $f^k(x)\in V$.

证明 见练习 8.47. ■

在定理 8.20 中所指出的函数 f 是混沌的条件说，在 f 定义域中的任一对开集，被 f 的某条周期轨线“光顾”. P 图伊进一步证明了，如果在一个混沌函数 f 的定义域中，给定一个有限的开集族，那么存在 f 的一条“光顾”任一开集的周期轨线.

尽管定理 8.20 使得混沌的定义（在连续函数的情况）被简化为一个必要条件，但是具有两个必要条件的定义（定义 8.10）特别有启迪作用，因为它概括了混沌成对的本性：在周期点的稠密集所呈现的规则性，和由拓扑传递性形成的不规则性.

8.5 节练习

8.44 证明：无论拓扑传递性还是周期点稠密集的存在性，仅有二者之一都不足以蕴涵对初始条件的敏感依赖性.

(1) 求一个函数 $f: X\to X$，在它的定义域有周期点的一个稠密集，但不存在对初始条件的敏感依赖性.

(2) 设 $f: S^1\to S^1$ 由 $f(\theta)=\theta+1$ 定义，也就是说圆周旋转 1 弧度. 证明 f 有拓扑传递性，但没有对初始条件的敏感依赖性.（提示：已知在此圆周中有一个区间 U，证明存在 $n\in\mathbf{Z}^+$，使得 $f^n(U)\cap U\neq\varnothing$，但 $f^n(U)\neq U$. 然后再对 $m\in\mathbf{Z}^+$，考虑 f^{mn} (U).）

8.45 本题我们要论证：在拓扑共轭下对初始条件的敏感依赖性不保持. 设 $f: (1,\infty)\to(1,\infty)$ 由 $f(x)=2x$ 定义，再设 $g: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 由 $g(x)=1+x$ 定义.

(1) 证明：f 存在对初始条件的敏感依赖性，但 g 没有.

(2) 通过找一个明确的同胚 $h: (1,\infty)\to\mathbf{R}^+$，证明 f 与 g 是拓扑共轭的.

8.46 练习 8.45 论证了，对初始条件的敏感依赖性，在拓扑共轭下一般不保持，但是正如本题所证明的，如果我们限于在一个紧致的定义域，那么上述依赖性保持.

设 X 与 Y 是分别具有度量 d_X 与 d_Y 的紧致度量空间. 假定 $f: X\to X$ 存在以 δ 为敏感常数的对初始条件的敏感依赖性，并假定 $g: Y\to Y$ 在同胚 $h: X\to Y$ 下与 f 是拓扑共轭的.

(1) 证明：$C=\{(y_1, y_2)\in Y\times Y \mid d_X(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2))>\delta\}$ 是 $Y\times Y$ 上的一个紧致子集.

(2) 证明：对于所有 $(y_1, y_2)\in C$，$d_Y(y_1, y_2)>0$，因而 d_Y 在 C 上取最小正值 δ^*.

(3) 证明：g 存在以 $\frac{\delta^*}{2}$ 为敏感常数的，对初始条件的敏感依赖性.

8.47 **证明定理 8.20**：连续函数 $f: X\to X$ 是混沌的，当且仅当对于 X 中的任一对开集 U 与 V，存在一个周期点 $x\in U$ 和 $k\in\mathbf{Z}^+$，使得 $f^k(x)\in V$.

第9章

同伦与度理论

对两个不同的拓扑空间加以比较，虽然我们已经讨论过，但我们还没有论及如何对两个不同的函数加以比较. 对于函数来说，是否存在有用的等价性呢？在 9.1 节中，我们引入同伦的概念，即一个函数到另一个函数的连续变形. 由彼此同胚的两个函数所分享的一些性质，在本章提出的一些结论中起重要的作用.

在 9.2 节中，我们把同伦应用于一些被我们称为圆函数的函数. 在当为出现一个周期变量的场合建模时，圆周是所使用的一个自然空间. 所谓周期变量，所描述的是，在固定长度的整个连续时间区间上重复的同一状态. 圆函数出现于这样一些场合，此时一个周期变量被映射到另一个周期变量. 例如，当一个搏动的心脏受到一个刺激时，在这个搏动周期内此刺激出现的时刻，被映射到在这个搏动周期内此心脏由于这个刺激而复苏并再次搏动的时刻.

圆函数是把圆周映射到自身的连续函数. 对于这种圆函数，我们引入度的概念. 所谓度，是一种度量此圆函数绕此圆周自身卷多少次的一个量. 它是我们对度所作定义的一个直接结论，此定义说，当且仅当两个圆函数有同样的度，它们是同胚的. 在 9.2 节中，我们定义度；而在 9.6 节中，我们证明在度定义背后所隐藏的某些技术性结论.

在 9.2 节中，我们还引入收缩，并用度来证明 2 维非收缩定理（我们将在第 10 章用这个结论，来证明 2 维布劳威尔不动点定理）. 在 9.3 节中，我们介绍度在一个心脏搏动模型中的应用. 在那里，通过对一个搏动中的心脏所作的一些简单的假定，我们作出结论：在搏动周期内，心脏不能连续对所施加的强度和时间的改变刺激作出反应. 我们讨论不可思议的结论，即当恰好在此搏动周期的适当瞬间对心脏的一个很小的刺激，可能使此心脏陷入纤维性颤动.

在本章，我们还考虑度在数学上的某些应用. 在 9.4 节中，我们用度来证明代数学基本定理. 在 9.5 节中，我们用度来证明 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 与 S^1 不是单连通的，然后用这些结论来对平面与 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 加以区分，并对圆周与 $S^n(n\geqslant 2)$ 加以区分.

9.1 同伦

在本节，我们引入同伦，这个概念能精确地把一个函数变形为另一个函数.

定义 9.1 设 f，g：$X\to Y$ 是连续函数. 假定 $I=[0,1]$ 有一个传承自 $\mathbf{R}$ 的子空间拓扑，而 $X\times I$ 有积拓扑. 我们称 f 与 g 是**同伦的**，如果存在一个连续函数 F：$X\times I\to Y$，使得 $F(x,0)=f(x)$ 且 $F(x,1)=g(x)$. 这一函数 F 称为 f 与 g 之间的一个**同伦**. 表达式 $f\simeq g$ 代表 f 与 g 是同伦的.

图 9.1 描述了一个同伦 F. 由于 $X\times I$ 有积拓扑，我们认为，同伦是把 X 映射到 Y 的一个区间 I. 对于 I 中的一个常数值 t，函数 $F|_{X\times\{t\}}$ 是从 X 到 Y 的一个映射. 当 t 的值在整个区间 I 上改变时，上述映射在一族单参数连续映射中连续改变，从 f 开始，到 g 终止.

例 9.1 用 $F(x, t)=x+t$ 来定义 $F: \mathbf{R}\times I\to\mathbf{R}$. 函数 F 是连续的，由于相加是连续的. 所以，F 是 $f(x)=F(x, 0)=x$ 与 $g(x)=F(x, 1)=x+1$ 之间的一个同伦. 映射 f 是 $\mathbf{R}$ 上的把 $\mathbf{R}$ 中的任一点映成自身的恒等映射. 映射 g 把整个实数轴沿正向移动一个单位. 对于 t 的一个常值，函数 $F|_{X\times\{t\}}$ 把实数轴移动一段距离 t. 当 t 从 0 变为 1，F 就把 f 映成 g.

例 9.2 用 $f(x) =(\cos(\pi x) -\sin(\pi x))$ 来定义 $f: I\to\mathbf{R}^2$，并用 $g(x)=(\cos(\pi x), \sin(\pi x))$ 来定义 $g: I\to\mathbf{R}^2$. 这两个映射都是道路的例子.

这两个映射是同伦的，但是如何看出它们是同伦的呢？我们取它们之间的一个直线式的同伦. 我们称它为直线式同伦，原因是，由于对于任一 $x\in I$，我们沿它们之间的直线段，把 $f(x)$ 变形为 $g(x)$.（见图 9.2.）在实现同伦的过程中，当 t 在 0 与 1 之间任意取值时，我们就使 $f(x)$ 到 $g(x)$ 距离的百分比得到改变.

用 $F(x, t)=(\cos(\pi x), (2t-1)\sin(\pi x))$ 来定义 $F: I\times I\to\mathbf{R}^2$. 函数 F 是连续的，由于它是由连续函数的复合和乘积所组成的. 此外，$F(x, 0)=f(x)$，且 $F(x, 1)=g(x)$，因而 F 是所要求的同伦.

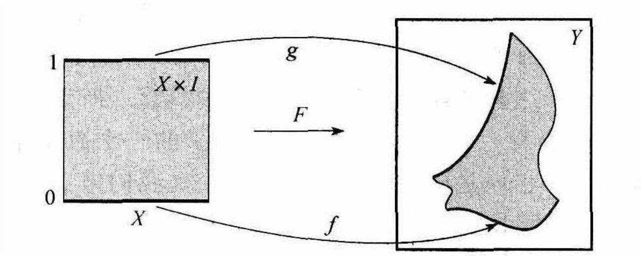


图 9.1 一个同伦把映射 f 变形为映射 g

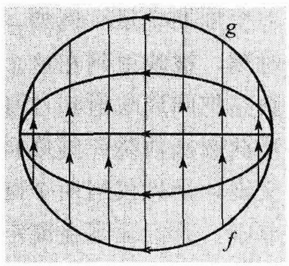


图 9.2 $\mathbf{R}^2$ 中从道路 f 到道路 g 的一个同伦

在上例中，如果我们考虑两条道路 f 与 g 有值域 $\mathbf{R}^2-\{O\}$，那么它们之间的直线式同伦不再有效，由于函数 F 正如所定义的，未能把 $I\times I$ 映成 $\mathbf{R}^2-\{O\}$. 然而，尽管 F 不起一个同伦的作用，但这两个道路在 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 中是同伦的.（见练习 9.4.）

定理 9.2 *在所有连续函数 $f: X\to Y$ 的集合上，关系 $\simeq$ 是一个等价关系.*

证明 我们必须证明此关系具有自反性、对称性和传递性. 为了证明 $\simeq$ 是自反的，设 $f: X\to Y$ 是一个连续函数. 由 $F(x, t)=f(x)$ 定义一个同伦 $F: X\times I\to Y$. 那么 $F(x, 0)=f(x)$，且 $F(x, 1)=f(x)$，所以 $f\simeq f$.

$\simeq$ 是对称的，可由以下的事实得出：如果 $F(x, t)$ 是 f 与 g 之间的一个同伦，那么由 $G(x, t)=F(x, 1-t)$ 所定义的 $G: X\times I\to Y$ 是 g 与 f 之间的一个同伦. 所以，$f\simeq g$ 蕴涵 $g\simeq f$.

为了证明传递性，设 f, g 与 h 是从 X 到 Y 的连续映射. 假定借助同伦 F，f 与 g 是同伦的，而借助同伦 G，g 与 h 是同伦的. 那么如图 9.3 所示，由

$$H(x,t)=\begin{cases}F(x,2t) & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ G(x,2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

定义 $H: X\times I\to Y$. 当 $t=\frac{1}{2}$时，$F(x, 2t)$和 $G(x, 2t-1)$都等于 $g(x)$. 因此它们在定义时所用的集合上是一致的. 于是由粘接引理可得 H 是连续的. 由于 $H(x, 0)=f(x)$且$H(x, 1)=h(x)$，我们就证得 $f\simeq g$ 且 $g\simeq h$ 蕴涵 $f\simeq h$. ■

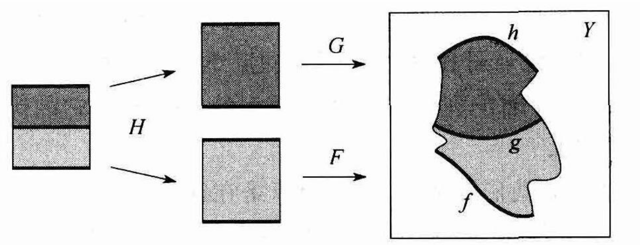


图 9.3　由 F 与 G 构建 H

由于集合上的一个等价关系把此集合分拆产生等价类，在等价关系$\simeq$下，所有连续函数 $f: X\to Y$ 的集合 $C(X, Y)$ 被分拆为一些等价类. 因此，我们有以下的定义：

定义 9.3　设 $C(X, Y)$ 表示所有连续函数 $f: X\to Y$ 的集合. $C(X, Y)$ 中的**同伦类**定义为在关系$\simeq$下的一些等价类. 此同伦类包含一个函数 f，记为 $[f]$.

例 9.3　从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的任一连续映射 f，与由 $g_0(x)=0$ 定义的平凡映射 g_0：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是同伦的. 函数 $F(x, t)=(1-t)f(x)$ 是 f 与 g_0 之间的一个同伦. 于是得出 $C(R, R)$ 组成单个同伦类 $[g_0]$.

9.1 节练习

9.1　证明：从平面上的圆盘 D 映成自身的恒等映射，与从 D 映到原点的映射是同伦的.

9.2　证明：如果 f_1，f_2：$X\to Y$ 与 g_1，g_2：$Y\to Z$ 是同伦的，那么 $g_2\circ f_2$ 与 $g_1\circ f_1$ 是同伦的.

9.3　设 f 与 g 是 $\mathbf{R}$ 中的道路. 证明 f 与 g 是同伦的.

9.4　设 f 与 g 是 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 中的道路. 证明 f 与 g 是同伦的.（提示：证明任一道路与常道路是同伦的，后者把整个区间映成道路的起点. 然后用 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 是道路连通的事实，来证明两条常道路是同伦的.）

9.5　设 $f: I\to Y$ 与 $g: I\to Y$ 是 Y 中使得 $f(0)=g(0)=y_0$ 与 $f(1)=g(1)=y_1$ 的道路.（因此 f 与 g 有同一起点和同一终点.）从 f 到 g 的**道路同伦**，定义为一个使得 $F(x, 0)=f(x)$，$F(x, 1)=g(x)$，$F(0, t)=y_0$ 且 $F(1, t)=y_1$ 成立的一个连续函数 $F: I\times I\to Y$.

(1) 证明：设定义为在 Y 中所有道路的集合上的一个等价关系的道路同伦，具有同一起点和同一终点.

(2) 证明：以 0 为起点、以 n 为终点的任一道路 p：$I\to\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 中从 0 到 n 的直接道路，即由 $p_n(x)=nx$ 所定义的道路 p_n：$I\to\mathbf{R}$，是道路同伦的.

9.6　证明：如果 X 是一个拓扑空间，而 D 是平面上的圆盘，那么，从 X 到 D 只有一个连续函数的同伦类.

9.7　考虑以下的定义：

定义 9.4　如果一个拓扑空间 X 上的恒等函数，与一个常值函数是同伦的，则称此拓扑空间 X 为**可收缩的**.

(1) 证明：可收缩性是一个拓扑不变量. 即证明，如果 X 与 Y 是同胚的，当且仅当 Y 是可收缩的，那么 X 是可收缩的.

(2) 证明：$\mathbf{R}^n$ 是可收缩的.

(3) 设 X 是一个可收缩的空间. 证明: X 是道路连通的.

9.8 设 Y 有 n 个道路分量. 证明在 $C(I, Y)$ 中存在 n 个道路的同伦类.

9.2 圆函数、度与收缩

在本节，我们主要聚焦于连续函数 f: $S^1 \to S^1$. 这样的函数称为**圆函数**. 尽管我们专注于圆周 S^1，但以下所给出的结论，可转为与此圆周同胚的任一空间 X. 我们定义一个圆函数的度，然后用度来证明二维非收缩定理：实现把平面上的圆盘映成它的圆周边界 S^1，并使得 S^1 固定的连续函数是不存在的.

为了表示此圆周上的点，我们用变量 θ，其中 θ 是在此平面从 x 轴正向开始度量而得到的通常的角. (见图 9.4.) 我们假定，如果 θ_1 与 θ_2 相差 2π 的整数倍，则它们表示此圆周上的同一点.

为了实现一些圆函数性态的可视化，我们可以展示它们的图形. 我们把函数 f: $S^1 \to S^1$ 的图形看成集合

$$\{(x,y) \in S^1 \times S^1 \mid_y = f(x)\},$$

此图形是环面的一个子集，而当我们把环面考虑为正方形 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ 的对边视为同一的话，那么我们可以把圆函数的图形展示为 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ 的一个子集（由于认为对边是视为同一的）. 例如，在图 9.5 中，我们展示了 $f(\theta) = \frac{3\pi}{2}$，$g(\theta) = \theta + \frac{\pi}{2}$，$h(\theta) = 2\theta$ 与 $k(\theta) = -\theta$ 的图形.

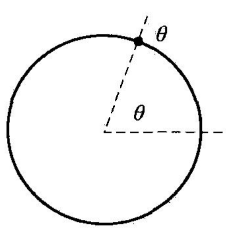
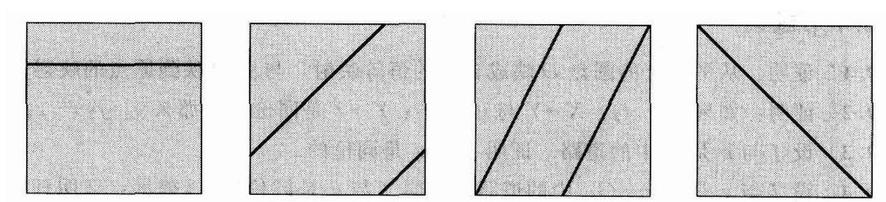


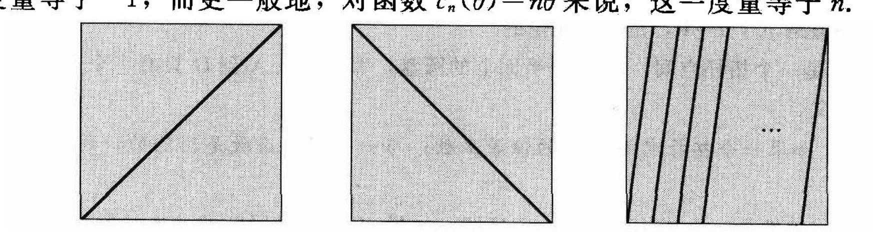
图 9.4 我们用变量 θ 来表示圆周上的点



f g h k

图 9.5 圆函数 f，g，h 与 k 的图形

我们的目标是使度的概念精确化：度是对一个圆函数 f: $S^1 \to S^1$ 把此圆周绕自身卷多少圈的一种度量. 我们希望对于此圆周上的恒等函数，这一度量等于 1，对函数 $f(\theta) = -\theta$ 来说，这一度量等于 -1，而更一般地，对函数 $c_n(\theta) = n\theta$ 来说，这一度量等于 n. (见图 9.6.)



c_1 c_{-1} c_n

图 9.6 函数 c_n 表示绕圆周卷 n 次

一个圆周映射不像 $c_n(\theta)=n\theta$ 那么优美，当它绕圆周卷折时可能出现摆动.（见图 9.7.）它可能环绕此圆周缠绕几圈，然后再返回几次. 当它绕圆周卷折时还可能停顿片刻. 即它可能具有一系列这样或那样的复杂的性态.

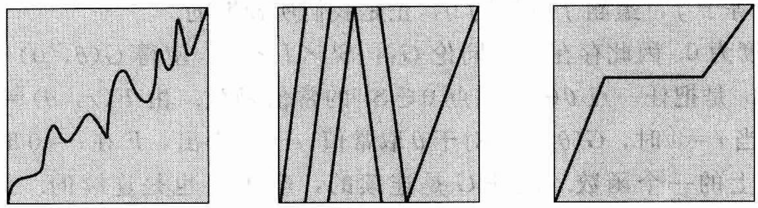


图 9.7 摆动、返回和停顿是我们在观察圆映射时会出现的复杂性态

在定义一个圆函数的度之后，所隐藏的目标是借助同伦以变形来消除所有复杂的性态. 无疑，有了以下的定理我们就可以实现这个目标.

定理 9.5 对于任一圆函数 f：$S^1\to S^1$，存在唯一的 $n\in\mathbf{Z}$，使得 f 与 $c_n(\theta)=n\theta$ 同伦.

定义 9.6 在定理 9.5 中，与 f：$S^1\to S^1$ 有关的唯一的 n 定义为 f 的**度**，并记为 $deg(f)$.

我们在 9.6 节再来证明定理 9.5. 由上述定义，我们可以得到以下的定理，它指出度确定了圆函数的同伦类.

定理 9.7 当且仅当 $deg(f)=deg(g)$，两个圆函数 f，g：$S^1\to S^1$ 是同伦的.

证明 由于同伦是一种等价关系，因此，圆映射的不同的同伦类，是一些分离集. 定理 9.5 蕴涵，它们由 $\{[c_n(\theta)]\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 给出. 因此，当且仅当对某个 $n\in\mathbf{Z}$，$[f]=[g]=[c_n(\theta)]$时，$f\simeq g$. 这恰好在对某个 $n\in\mathbf{Z}$，$deg(f)=deg(g)=n$ 时出现. ■

定理 9.7 的下列推论，在下一节我们用它来讨论度对心脏搏动模型的应用.

推论 9.8 设 F：$S^1\times[a,b]\to S^1$ 是连续的. 如果对于任一 $r\in[a,b]$，我们设 F_r：$S^1\to S^1$ 是由 $F_r(\theta)=F(\theta,r)$ 定义的圆函数，那么 F_r 的度与 r 无关.

证明 见练习 9.10. ■

推论 9.8 指出，如果我们有一个把环面映射为圆周的连续函数 F，那么正如图 9.8 所示，如果我们把 F 限定在与此环面同心的、半径为 r 的一个圆周，那么所得到的圆函数 F_r 与 r 无关.

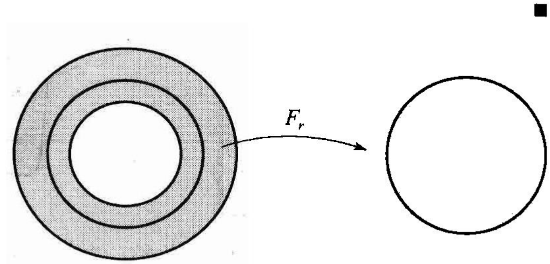


图 9.8 限定 F_r 的度不依赖半径 r

以下的定理是涉及度为 0 的圆映射的一个延拓定理，在本章全章我们都使用它.

定理 9.9 当且仅当 f 延拓为在圆盘 D 上的一个连续函数，圆函数 f：$S^1\to S^1$ 的度为 0.（即当且仅当 f 存在一个连续函数 F：$D\to S^1$，使得对于所有的 $x\in S^1$ 都有 $F(x)=f(x)$.）

证明 在整个证明中，我们都把此圆盘中的点用极坐标（r，θ）来表示.

首先，假定 f 延拓为连续函数 F：$D\to S^1$. 由 $G(\theta,t)=F(t,\theta)$ 定义函数 G：$S^1\times I\to S^1$. 由于 F 是连续的，G 也是连续的. 因此 G 是圆函数 $G|_{S^1\times\{0\}}$ 与 $G|_{S^1\times\{1\}}$ 之间的一个同伦，

蕴涵这些函数有相同的度．函数 $G|_{S^1\times\{0\}}$ 由

$$G|_{S^1\times\{0\}}(\theta)=G(\theta,0)=F(0,\theta)=F(0,0)$$

给出．于是得出，$G|_{S^1\times\{0\}}$ 是一个常值函数，因而它的度为 0．因此 $G|_{S^1\times\{1\}}$ 的度亦为 0．直接可看出，$G|_{S^1\times\{1\}}$ 等于 f，蕴涵 f 的度为 0，正是我们所预期的．

于是设 f 的度为 0．因此存在一个同伦 $G:$：$S^1\times I\to S^1$，使得 $G(\theta,\ 0)=c_0(\theta)$，且 $G(\theta,\ 1)=f(\theta)$，其中 c_0 是把任一点 $\theta\in$ 映成点 $0\in S^1$ 的常值函数．由 $F(r,\ \theta)=G(\theta,\ r)$ 来定义 F：$D\to S^1$．由于当 $r=0$ 时，$G(\theta,\ r)$ 对于 θ 取常值，于是得出，F 在 $r=0$ 时被明确定义，因而是被定义在 D 上的一个函数．此外 G 是连续的，蕴涵 F 也是连续的．最后，$F(1,\ \theta)=G(\theta,1)=f(\theta)$，蕴涵 F 是 f 的一个延拓．■

以下的结论，是可以通过一个圆函数的度，来确定的另一个有用的事实．

定理 9.10　*如果圆函数 f：$S^1\to S^1$ 的度不为零，那么 f 是满射.*

证明　见练习 9.11．■

现在我们来引入收缩的概念，它是把一个空间映射到一个子空间上，且使此子空间固定的连续函数．

定义 9.11　*设 X 是一个拓扑空间，而 A 是 X 的一个子集．从 A 到 X 上的一个***收缩***，是使得对于任一 $a\in A$ 都有 $r(a)=a$ 的连续函数 r：$X\to A$．如果存在一个收缩 r：$X\to A$，那么 A 称为 X 的一个***收缩核***．（见图 9.9．）*

例 9.4　如果 A 是拓扑空间 X 的一个单点子集 $\{a\}$，那么 A 是 X 的一个收缩核，由于把 X 中的任一 x 映射到 a 的函数是一个收缩．

例 9.5　圆周 S^1 是 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 的一个收缩．使用极坐标 $(r,\ \theta)$，由 $f(r,\ \theta)=(1,\ \theta)$ 所定义的函数 f：$\mathbf{R}^2-\{O\}\to S^1$ 是一个收缩．

例 9.6　考虑图 9.10 所示的平面上的环形区域 A．它是把中心在原点、从半径为 1 的圆周 C_1 延伸到半径为 2 的圆周 C_2，并把二者之间的部分包括在内的区域．C_1 与 C_2 各自都是 A 的收缩．然而 $C_1\cup C_2$ 却不是 A 的收缩，由于一个连通空间的连续象，一定是连通的．

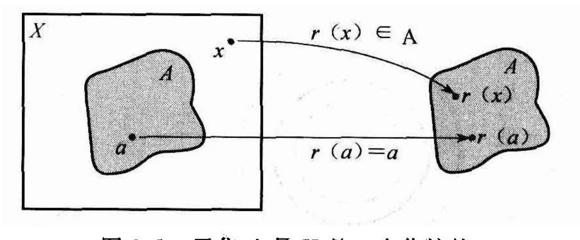


图 9.9　子集 A 是 X 的一个收缩核

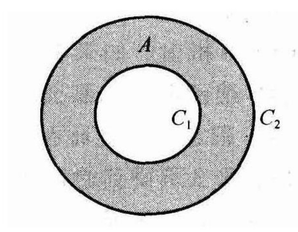


图 9.10　C_1 与 C_2 各自都是圆环的收缩，然而 $C_1\cup C_2$ 却不是

在上例中，C_1 与 C_2 各是圆环 A 的收缩，是下例的一个特殊情况，下例表明，空间 X 与 Y 当然能看作为积空间 $X\times Y$ 的收缩．

例 9.7　已知拓扑空间 X 与 Y，考虑积空间 $X\times Y$．假定 $x^*\in X$．那么对于由 $r(x,\ y)=(x^*,\ y)$ 给出的收缩 r：$X\times Y\to A$，$X\times Y$ 的子集 $A=\{x^*\}\times Y$ 是一个收缩核．因此积空间 $X\times Y$ 包含与作为收缩核的 Y 同胚的子空间（同样包含与作为收缩核的 X 同胚的子空间）．

例如在圆环内存在作为圆环收缩核的圆周子空间（见图 9.11.）

再考虑平面上的圆盘 D. 我们可以确信，从 D 到它的圆周边界的收缩不存在，正如我们可以预期不可能出现以下的情况，即把一个鼓上整张的皮变形为它的边缘，既保持边缘上的点固定又不撕裂这张皮.（见图 9.12.）

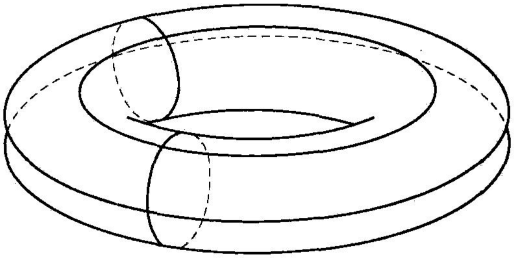


图 9.11　作为圆环收缩核的圆周

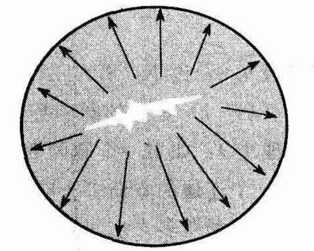


图 9.12　把一个鼓上的皮变形为它的边缘将引起撕裂，说明从 D 到 S^1 的收缩不存在

事实上，从 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 维球到它的 $n-1$ 维球的边界 S^{n-1} 的收缩不存在. 这个一般的结论称为非收缩定理. 以下我们证明此非收缩定理的 1 维、2 维的版本. 由于使用了来自代数拓扑特有的工具，因此易于作出一般的结论.

定理 9.12（1 维非收缩定理） *从 $B^1[-1, 1]$ 到它的球面边界 $S^0=\{-1, 1\}$ 上的收缩不存在.*

证明 从 $[-1, 1]$ 到 $\{-1, 1\}$ 上的收缩不存在的结论是显而易见的，由于作为从一个连通空间到一个不连通空间的一个连续函数的，从 $[-1, 1]$ 到 $\{-1, 1\}$ 上的一个收缩，是不可能存在的. ■

定理 9.13（2 维非收缩定理） *从圆盘 D 到它的圆周边界 S^1 的收缩不存在.*

证明 用反证法来证明. 为此，假定对于所有的 $\theta \in S^1$，存在一个连续函数 $F: D \to S^1$，使得 $F(\theta)=\theta$. 这一函数 F 是由 $\mathrm{id}(\theta)=\theta$ 所定义的恒等函数 $\mathrm{id}: S^1 \to S^1$ 的一个连续延拓. 恒等函数 id 的度为 1，因而定理 9.9 蕴涵，id 不能延拓到定义在 D 上的一个连续函数，这就与假设相矛盾. 因此，从 D 到 S^1 上的收缩不存在. ■

例 9.8 定理 9.13 蕴涵从 $\mathbf{R}^2$ 到 S^1 上的收缩不存在，由于当限定于 D 时，这样一个收缩就提供了从 D 到 S^1 上的一个收缩.

在第 10 章，我们再重提非收缩定理，在那时将证明它与布劳威尔不动点定理等价.

以下我们证明关于收缩的一般存在定理. 尽管从圆盘 D 到 S^1 上的收缩不存在，如果 $A \subset D$ 是一条弧，那么，无论 A 环绕此圆盘的卷绕有多少圈，A 是此圆盘的一个收缩.（见图 9.13.）这个结论的证明要用到蒂茨延拓定理，它已在 7.3 节的一组补充练习中建立.

定理 9.14 *设 D 是圆盘，并设 $A \subset D$ 是一条弧. 那么 A 是 D 的一个收缩.*

证明 由于 A 是一条弧，所以存在映射到 A 上的一个嵌入 $f: [-1, 1] \to D$. 区间 $[-1, 1]$ 是紧致的，因而 A 也是紧致的，蕴涵 A 是豪斯多夫空间 D 的一个闭子集. 由蒂茨延拓定理，函数 $f^{-1}: A \to [-1, 1]$ 有一个连续延拓 $g: D \to [-1, 1]$. 函数 $f \circ g: D \to A$ 是从 D 到 A 上的一个收缩. ■

9.2 节练习

9.9 确定以下各个圆函数的度：

（1）把圆周上的每个点映成它的对心点的对心映射 A：$S^1 \to S^1$，$A(\theta)=\theta+\pi$.

（2）表示把圆周绕自身按一个方向卷一圈，然后再按另一个方向卷一圈的函数

$$f:S^1 \to S^1, f(\theta)=\begin{cases}2\theta & \theta\in[0,\pi],\\ -2\theta & \theta\in[\pi,2\pi].\end{cases}$$

9.10 **证明定理 9.8**：设 F：$S^1\times[a, b]\to S^1$ 是连续的. 如果对于任一 $r\in[a, b]$，我们设 F_r：$S^1\to S^1$ 是由 $F_r(\theta)=F(\theta, r)$ 定义的圆函数，那么 F_r 的度与 r 无关.

9.11 **证明定理 9.9**：如果一个圆函数 f：$S^1\to S^1$ 的度不为零，那么 f 是满射.

9.12 设 X 是一个连通的豪斯多夫空间，而 B 是 X 的一个两点子集. 证明 B 不是 X 的一个收缩核.

9.13 设 X 是一个豪斯多夫空间，而 A 是 X 的一个收缩核. 证明 A 是 X 的一个闭子集.

9.14 说明图 9.14 中的无限螺线 S 为何是此平面的一个收缩核.

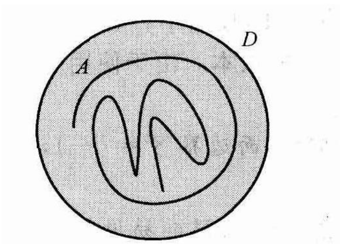


图 9.13 D 中的每一条弧 A 是 D 的一个收缩

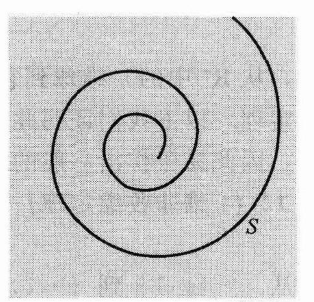


图 9.14 螺线 S 是平面的一个收缩核

9.3 在心脏搏动模型中的一个应用

在本节，我们考察一个刺激搏动心脏的模型. 我们用度理论，来作出关于心脏如何对强度改变的，在搏动周期的不同时刻所施加的刺激作出反应的某些有趣结论. 这个模型选自 A. 温弗里（1942—2002）的一篇题为“突然心脏死亡：拓扑学中的一个问题”的论文. 他是一位理论生物学家，由于对生物系统中的数学模型的研究工作而被人熟知.

我们用在一个圆周上的一个变量 θ，来模拟在搏动周期中的时间.（见图 9.15.）并假定当 $\theta=0$时心脏搏动. 我们可以认为，绕此圆周按顺时针方向旋转，每次它通过心脏搏动的时刻 $\theta=0$. 请注意，这意味着为了方便，我们假定搏动周期为 2π.

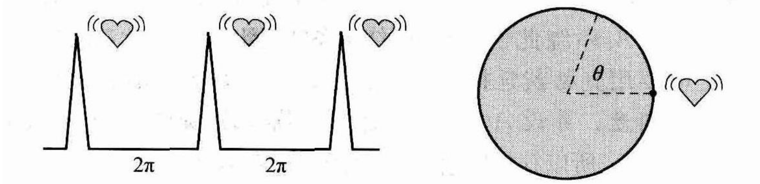


图 9.15 在搏动周期中的时间用圆周上的变量 θ 来模拟

在搏动期间一个刺激被施加于心脏，而我们希望考察此心脏对此刺激的反应. 此反应由

在此刺激被施加后心脏再次搏动所花的时间来度量. 这个变量称为**潜伏**，并记为 L.

在搏动周期中刺激被施加的时刻，称为**耦合区间**，并记为 c. 我们考虑强度改变的刺激从弱 ($s=w$) 到强 ($s=g$)，并考察作为耦合区间和刺激强度的函数 $L(c, s)$. 于是我们有一个函数 $L: S^1\times[w, g]\to S^1$.

心脏对一个弱刺激的反应，称为**弱重新安排**，而对一个强刺激的反应，称为**强重新安排**. 我们对弱重新安排和强重新安排作以下合理的假定：

(1) 由于弱重新安排，源于在搏动速度控制时任何微小变化的刺激也弱，因此这个潜伏是在此刺激之后，在搏动周期中持续的时间.

(2) 由于强重新安排，这个刺激强得足以使得此心脏丧失对过去、源于一个与耦合区间无关的潜伏的记忆.

上述假定转换为如图 9.16 所示的有关潜伏 L 的性质：

(1) 对于任一 $c\in S^1$，$L(c, w)=2\pi-c$.

(2) 对于任一 $c\in S^1$，存在 $\theta^*\in S^1$，使得 $L(c, g)=\theta^*$.

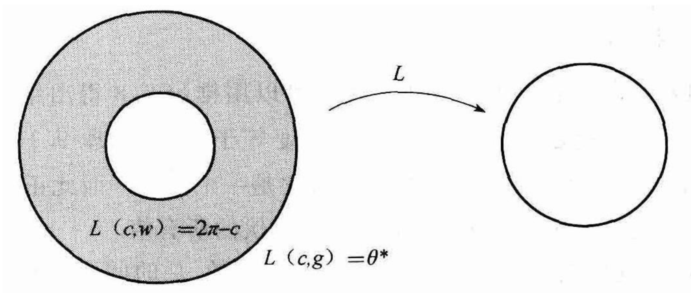


图 9.16 潜伏 $L(c, s)$ 定义在整个区域 $S^1\times[w, g]$

如果我们限定 L 为强度是 s^* 的一个特定的刺激，那么结果是一个圆函数 $L|_{S^1\times\{s^*\}}$. 如果 $L|_{S^1\times\{s^*\}}$ 是连续的，那么它有一个已被明确定义的度.

函数 $L|_{S^1\times\{w\}}$ 的度为 -1，由于它把 $S^1\times\{w\}$ 绕 S^1 按顺时针方向旋转一次. 此外，$L|_{S^1\times\{g\}}$ 的度为 0，由于它是一个常值函数. 但是推论 9.8 蕴涵，如果 L 是连续的，那么 $L|_{S^1\times\{s^*\}}$ 的度与 s^* 无关. 因此 $L: S^1\times[w, g]\to S^1$ 是不连续的. 即按照我们的假定，潜伏不连续地依赖于刺激的计时和在整个强度区间内强度从弱到强的改变.

因此，在心脏对刺激的计时和强度改变的反应出现了间断. 如果心脏在搏动周期内的适当时刻接收到一个刺激，此刺激可能以一种不可预测的方式导致此心脏搏动方式的混乱.

再让我们来考察 $L: S^1\times[w, g]\to S^1$，从我们的假定进一步引出可能附加的拓扑学结论. 由于 L 是不连续的，存在一个点集 $P\subset S^1\times[w, g]$，其中 L 没有连续性. 我们考虑这样的情况，即这个不连续集位于 $S^1\times[w, g]$ 中一个圆盘 K 的内部. (见图 9.17.) 例如，当存在 L 的一个单独的间断点，且此点在 $S^1\times[w, g]$ 的内部时，就会出现这种情况. 我们断言，在作为 K 的边界的圆周上，此潜伏函数 L 取遍从 0 到 2π 的所有的潜伏值.

为了证明此断言，我们对 L 和它的区域作一些改变. 首先，注意到如果 A 是从 $S^1\times[w, g]$ 中挖去 K 的内部所得到的集合，那么由假定 $L|_A$ 是连续的. 为了看出我们构造的

下一步，我们以图形的方式突然让 A 翻转，使得内圆 $s=w$ 在外边，而外圆 $s=g$ 在里边.（见图 9.18.）

然后，我们填满内直径的洞，得到一个新的区域 A'. 进而我们通过令 L'等于在 A'填入部分上的常数 θ^*，把 L 延拓为一个连续函数 L'.（见图 9.19.）由于 L'已经等于在 A 的内边界上的 θ^*，于是得出 L'是一个连续函数.（请注意，如果 $S^1\times\{g\}$ 不一定是常数，但它的度为 0，那么由定理 9.9，我们还可以把 $L|_A$ 延拓为 A'上的一个连续函数.）

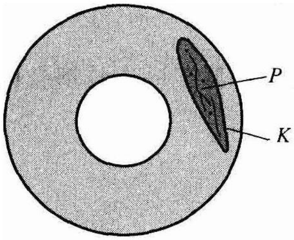


图 9.17 位于 K 中 L 的间断点的集合 P

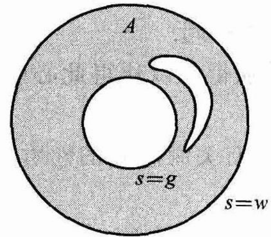


图 9.18 区域 A 的内部朝外翻出

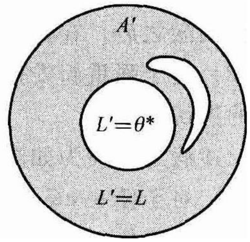


图 9.19 A 上的 L 延拓为 A'上定义的 L'

在拓扑上，区域 A'是一个圆环. 因此，我们可以用推论 9.8 得出结论：$L'|_{\partial K}$的度等于 $L'|_{s=w}$的度. 由于我们以前已讨论过，$L'|_{s=w}$的度等于 -1. 定理 9.10 蕴涵，如果我们把 $L'|_{\partial K}$考虑为由此圆周映成自身的一个函数，那么它是一个满射. 因此正如我们所断言的，在作为 K 的边界的圆周上，函数 L 取遍从 0 到 2π 的潜伏的所有值.

因此，我们看出，反应的一个十分复杂的分布可能在 L 的间断点集合附近出现. 特别，如果 L 有单独的一个间断点 p，且此点在 $S^1\times\{w, g\}$ 的内部，那么函数 L 在环绕 p 的任一圆周上取所有可能的潜伏值. 这时可得出，由于在 p 处刺激强度和计时的很小的变化，就可能涵盖潜伏反应的整个变化范围. 在心脏再次搏动之前，我们不能预测它在此搏动周期中占多长时间. 任何事情都可能发生.

以下介绍有关间断点与间断集概念的定义和定理：

定义 给定一个函数 f：$X\to Y$ 及一个点 $x\in X$，如果对于任一包含 $f(x)$ 的开集 V，存在包含 x 的一个开集 U，使得 $f(U)\subset V$，那么 f 在 x 是**连续**的. 如果 f 在 $x\in X$ 不连续，那么 x 是 f 的一个**间断点**，而 f 的所有间断点的集合，是 f 的**间断集**.

定理 一个函数 f：$X\to Y$ 是连续的，当且仅当它的间断点集是空集.

在这里为此模型提出的拓扑性质，对纤维性擅动的原因提供了可能的解释，往往会对心脏收缩模式引起致命的混乱. McGill 大学有一位资深的纤维性擅动的研究者 G 因斯迈，1914 年，28 岁的他在选择自己的实验对象时不幸濒临死亡. 实验室的管理者无意发现了因斯迈，就用装在他箱子里的实验设备——心脏搏动监测仪来记录他衰弱的心脏搏动. 因斯迈在当天傍晚去世. 因斯迈在他最后的一篇论文中曾作出假设，纤维性擅动可能是从一个不合时宜的电脉冲开始的. 刚才所提出的模型的一些拓扑性质，与因斯迈本人所经历的致命结局一起，当然支持他本人的这个假设.

9.3 节练习

9.15 本题为证明潜伏函数 L：$S^1\times[w, g]\to S^1$ 不是连续的结论提供了另一条途径. 假定 L 是连续的，并由它构造在平面上圆盘上的一个连续函数 f：$D\to S^1$，使得在边界圆周上的约束条件 $f|_{S^1}$：$S^1\to S^1$ 的度为−1. 再用定理 9.9 引出矛盾.

9.4 代数学基本定理

我们以前已经看到了拓扑学在分析学中的两个重要应用，一个是介值定理，另一个是极值定理. 本节我们说明如何用度来证明代数学中的一个重要的、根本性的定理——代数学基本定理.

代数学基本定理断言，每个多项式方程

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0 \tag{9.1}$$

在复平面 $\mathbf{C}$ 内有一个解. 令人惊奇的是，这个基本的代数学的结论，我们居然能够用拓扑学的工具来加以证明.

首先，请注意由于我们可以用 a_n 来除方程（9.1），就只需要考虑形如

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

的方程了. 上述方程在 $\mathbf{C}$ 内有一个解，当且仅当对于任一正实数 c，方程

$$z^n+\frac{a_{n-1}}{c}z^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{c^{n-1}}z+\frac{a_0}{c^n}=0$$

在 $\mathbf{C}$ 内有一个解.（见练习 9.16.）由于 c 选取得足够大，我们可以确保

$$\left|\frac{a_{n-1}}{c}\right|+\cdots+\left|\frac{a_1}{c^{n-1}}\right|+\left|\frac{a_0}{c^n}\right|<1.$$

因此，为了建立代数学基本定理，我们只需要考虑形如

$$z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0=0$$

的方程，其中 $|b_{n-1}|+\cdots+|b_0|<1$，这些方程是下列定理的对象：

定理 9.15 *如果* $|b_{n-1}|+\cdots+|b_0|<1$，*那么方程*

$$z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0=0$$

在 $\mathbf{C}$ *内有一个解.*

证明 我们设法用归谬证法（推出矛盾）来证明这个结论. 假定

$$z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0=0 \tag{9.2}$$

在此复平面上没有解. 设 D 是圆盘，而 S^1 是圆周，在这里看成是此复平面的一个子集. 由于方程（9.2）没有解，我们可以用

$$F(z)=z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0$$

来定义连续函数 F：$D\to\mathbf{C}-\{0\}$.

函数 F 是函数 f：$S^1\to\mathbf{C}-\{0\}$ 的一个延拓，使得 $f(z)=F(z)$.

我们用 $g(z)=\dfrac{f(z)}{|f(z)|}$ 和 $G(z)=\dfrac{F(z)}{|F(z)|}$ 来定义新的连续函数 g：$S^1\to S^1$ 和 G：$D\to S^1$. 函数 G 是函数 g 的延拓，因此，定理 9.9 蕴涵 g 的度为 0.

我们断言 g 与 $c_n(z)=z^n$ 同伦. 函数 c_n 就是以前表示为 $c_n(\theta)=n\theta$ 的函数，在这里它被表示为复变量 z 的一个函数，而不是角度 θ 的一个函数. 有了此断言，我们就可以推出矛盾，这是由于 g 的度为 0，而 c_n 的度却为 $n\neq 0$.

为了证明此断言，用

$$H(z,t)=\frac{(z^n+t(b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0))}{|z^n+t(b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0)|}$$

来定义 H: $S^1\times[0,1]\to S^1$. 为了确认 H 被明确定义，我们需要证明对于所有 $(z,t)\in S^1\times[0,1]$,

$$|z^n+t(b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0)|>0 \tag{9.3}$$

成立. 由于 $t\in[0,1]$, $|b_{n-1}|+\cdots+|b_0|<1$, 且对于任一 $z\in S^1$ 及 $j\in\mathbf{Z}^+$, $|z_j|=1$, 我们有

$$\begin{aligned}|z^n+t(b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0)| &\geqslant |z^n|-t|b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0|\\ &\geqslant 1-t(|b_{n-1}z^{n-1}|+\cdots+|b_1z|+|b_0|)\\ &=1-t(|b_{n-1}|+\cdots+|b_0|)\\ &>1-t\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

由 $H(z,t)$ 的表达式和不等式 9.3 可得出，H 是一个已明确定义的把 $S^1\times[0,1]$ 映成 S^1 的连续函数. 此外，$H(z,1)=\dfrac{f(z)}{|f(z)|}=g(z)$ 且 $H(z,0)=\dfrac{z_n}{|z_n|}=z^n$，最后的等式成立，这是由于对于任一 $z\in S^1$, $|z^n|=1$. 因此 H 是 g 与 c_n 之间的一个同伦，于是，此断言和定理的证明得以完成. ■

9.4 节练习

9.16 证明：方程

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

在 $\mathbf{C}$ 内有一个解，当且仅当对于任一正实数 c，方程

$$z^n+\frac{a_{n-1}}{c}z^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{c^{n-1}}z+\frac{a_0}{c^n}=0$$

在 $\mathbf{C}$ 内有一个解.

9.17 请对定理 9.15 证明中以下部分的每一步加以验证：

$$\begin{aligned}|z^n+t(b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0)| &\geqslant |z^n|-t|b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0|\\ &\geqslant 1-t(|b_{n-1}z^{n-1}|+\cdots+|b_1z|+|b_0|)\\ &=1-t(|b_{n-1}|+\cdots+|b_0|)\\ &>1-t\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

9.18 (1) 证明：如果 $c>0$ 使得

$$\left|\frac{a_{n-1}}{c}\right|+\cdots+\left|\frac{a_1}{c^{n-1}}\right|+\left|\frac{a_0}{c^n}\right|<1,$$

那么，

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

的所有解满足 $|z|<c$.（提示：请证明：如果 $|z|\geqslant c$，那么

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right|<1,$$

并由此证明此方程的解 z 不存在.）

（2）证明：方程

$$z^n+z^{n-1}+\cdots+z+1=0$$

的所有解，位于在复平面上中心在原点、半径为 2 的开圆盘之中.

9.5 再论拓扑空间的区分

在本节，我们对 6.2 节中关于区分拓扑空间的结论加以推广．在 6.2 节中，我们已经用连通性的概念，证明了各种空间相互是不同胚的．在本节，我们以类似的方式使用单连通性的概念.

定义 9.16 一个道路连通的拓扑空间 X，称为**单连通的**，如果任一连续函数 f：$X\to S^1$ 与一个常值函数是同胚的.

如果我们认为连续函数 f：$X\to S^1$ 是 X 中的回路，当 X 中的任一回路都可以变形为 X 中的一个点时，一个道路连通的拓扑空间是单连通的.（见图 9.20.）

例 9.9 不难看出，平面 $\mathbf{R}^2$ 是单连通的．任一连续函数 f：$S^1\to\mathbf{R}^2$ 与一个把 S^1 映成原点的常值函数是同伦的．这一同伦是通过用 $F(x,\ t)=(1-t)f(x)$ 定义的直线同伦 F：$S^1\times I\to\mathbf{R}^2$ 来实现的．另一方面，如果我们从平面挖去原点，那么所得到的空间 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 就不是单连通的了．一个回路绕原点卷一次，不能变形为此平面中的一个点.（见图 9.21.）我们在定理 9.19 中证明这一结论.

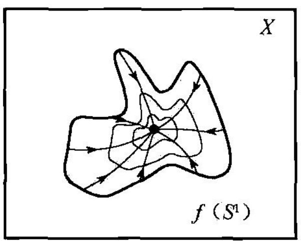


图 9.20 空间 X 是单连通的，如果 X 中的任一回路可以变形为一个点

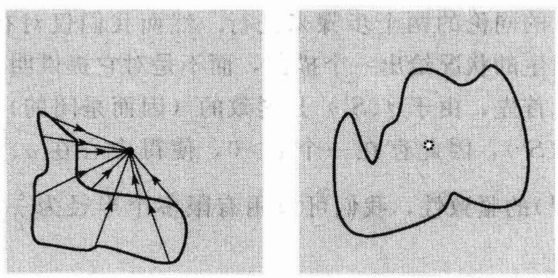


图 9.21 平面是单连通的，但 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 不是

以下涉及单连通性的两个定理是显而易见的．我们把它们的证明留作练习.

定理 9.17 单连通性是一种拓扑性质．即如果 X 与 Y 同胚，那么，当且仅当 Y 是单连通时，X 是单连通的.

证明 见练习 9.20. ■

定理 9.18 如果 X 是单连通的，A 是 X 的一个收缩，那么 A 是单连通的.

证明 见练习 9.21. ■

在 6.2 节中我们已经证明过直线与平面不是同胚的，那时我们是通过证明从直线挖去一

个点产生一个连通空间，而平面挖去一个点，则不是连通空间，从而得出上述结论的. 我们在这里证明平面与 $\mathbf{R}^3$ 不同胚时，也是以同样的思路进行的. 明确地说，我们证明从平面挖去一个点，产生一个不是单连通的空间，而从 $\mathbf{R}^3$ 挖去一个点，则产生一个单连通的空间. 这些结果在直观上是明显的. 以下我们完成一些细节.

定理 9.19 空间 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 不是单连通的.

证明 我们证明，存在与一个常值函数不同伦的连续函数 $f: S^1\to\mathbf{R}^2-\{O\}$. 为此，设 f 是把 S^1 嵌入到自身作为 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 的一个子空间. 我们断言从 f 到一个常值函数的同伦不存在.

假设存在从 f 到一个常值函数的同伦 $F: S^1\times I\to\mathbf{R}^2-\{O\}$. 于是如果我们用 $G(x, t)=\dfrac{F(x, t)}{|F(x, t)|}$ 来定义 $G: S^1\times I\to S^1$，就可得出 G 是从在圆周上的恒等函数到圆周上常值函数的一个同伦. 但是圆周上恒等函数的度为 1，而常值函数的度为 0. 因此由定理 9.7，这样的同伦 G 不存在. 这就与我们假设 F 存在相矛盾. 于是得出 f 与一个常值函数不同伦，因而 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 不是单连通的. ■

再设 α 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个点. 假定 $f: S^1\to\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 是连续的. 显而易见，存在足够的场所，既把 f 变形为一个常值函数，而同时又能避免失去位于 α 的点.（见图 9.22.）在下一个定理的证明中，我们说明如何构造这样一个变形.

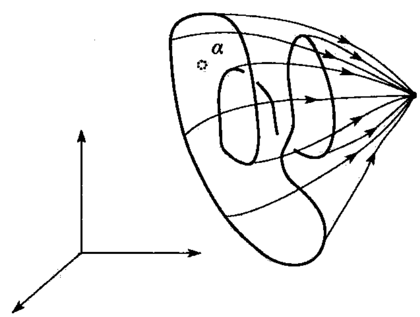


图 9.22 在 $\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 中存在把 $f: S^1\to\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 变形为一个常值函数的场所

定理 9.20 对于任一 $\alpha\in\mathbf{R}^3$，空间 $\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 是单连通的.

证明 我们来证明如果 $f: S^1\to\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 是连续的，那么它与一个常值函数同伦. 我们通过论证从 f 到一个常值函数的同伦的两个步骤来进行. 然而我们仅对在此同伦下所发生的状况给出一个描述，而不是对它提供明确的定义.

首先，由于 $f(S^1)$ 是紧致的（因而是闭的），并由于 $\alpha\notin f(S^1)$，因此存在一个 $\varepsilon>0$，使得中心在 α、半径为 ε 的开球与 $f(S^1)$ 是分离的. 再用 $f(S^1)$ 的紧致性，我们可以用有限多个半径为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的开球来覆盖 $f(S^1)$. 每个这样的开球不包含 α.

如果我们取每个这样的开球在 f 下的原象，结果是 S^1 的一个开覆盖. 由推论 7.28，我们可以用

$$0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_m=2\pi$$

来分割 S^1，使得对于任一 $i=0, \cdots, m-1$，区间 $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ 包含于 S^1 的开覆盖内的一个集合之中. 因此，任一集合 $f([\theta_i, \theta_{i+1}])$ 包含于前面已提过的一个开球之中，确切地说，即在覆盖 $f(S^1)$ 的半径为 $\varepsilon/2$ 的有限开球族中的那些开球. 对于任一 $i=0, \cdots, m-1$，取这样的一个开球，并把它记为 B_i. 对于任一 $i=0, \cdots, m$，集合 $S_i=f(\theta_i)$，再设 S_i 是连接 S_i 与 S_{i+1} 的线段.（请注意，线段 S_i 可能是单独的一个点.）每个 S_i 位于开球 B_i 之中.

作为此同伦的第一步，我们把 B_i 内的每个 f（$[\theta_i, \theta_{i+1}]$）变形为 S_i.（见图 9.23.）这个

变形，可以实现在整个区域使任一点 s_i 保持固定．由于 B_i 不包含 α，这个变形发生在 $\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 之中．于是 $f(S^1)$ 在 $\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 中变形为一条闭曲线 P，它完全由线段组成．

对于任一 $i=0, \cdots, m-1$，设 A_i 是通过 α，s_i 和 s_{i+1} 的平面（或是通过 α，s_i 和 s_{i+1} 的直线，如果它们共线的话．）．我们可以选取一个点 $\beta\in\mathbf{R}^3$，使得 β 不位于任一集合 A_i 之中．请注意，α 不位于以 β，s_i 和 s_{i+1} 为顶点的任一三角形 T_i 之中．（对于三角形来说，此时可能出现 $s_i=s_{i+1}$ 的情况．）

再讨论此同伦的第二步，我们把 T_i 内的每条线段 S_i 变形为点 β，而作此变形使得它们全都粘合在一起，导致从闭曲线 P 到点 β 的一个连续变形．（见图 9.24．）同伦的这个第二步也发生在 $\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 之中，由于不位于任一集合 T_i 之中．

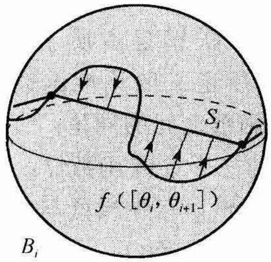


图 9.23 $f([\theta_i, \theta_{i+1}])$ 变形为 B_i 之中的 S_i

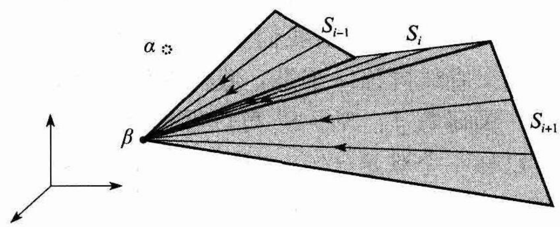


图 9.24 任一 S_i 变形为 β

当我们把此同伦的两步组合在一起时，得到从 f 到一个连续函数的一个同伦，于是得出对于任一 $\alpha\in\mathbf{R}^3$，空间 $\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 是单连通的． ■

最后，借助定理 9.17、9.19 和 9.20，我们可以对平面与 3 维空间加以区分．

定理 9.21 平面 $\mathbf{R}^2$ 与 3 维空间 $\mathbf{R}^3$ 不是同胚的．

证明 设存在一个同胚 $f: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$．由于 $\mathbf{R}^2-\{O\}$ 不是单连通的，而 $\mathbf{R}^3-\{f(O)\}$ 也不是单连通的，于是得出矛盾．于是没有这样的 f 存在，因此得到 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{R}^3$ 不是同胚的结论． ■

我们用于证明 $\mathbf{R}^3-\{\alpha\}$ 是单连通的方法，也可用来证明对于任一 $n\geqslant 3$ 和任一 $\alpha\in\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n-\{\alpha\}$ 是单连通的．此外，由 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ 给出的函数 $f: \mathbf{R}^n-\{\alpha\}\to S^n$ 是一个收缩．因此定理 9.18 蕴涵，对于任一 $n\geqslant 2$，S^n 是单连通的．圆周 S^1 不是单连通的．（见练习 9.22．）因此，对于任一 $n\geqslant 2$，S^1 与 S^n 不是同胚的．

9.5 节练习

9.19 证明：一个拓扑空间 X 是单连通的，当且仅当任一连续函数 $f: S^1\to X$ 延拓为一个连续函数 $F: D\to X$，其中 D 是平面上的圆盘．

9.20 **证明定理 9.17**：如果 X 与 Y 同胚，那么，当且仅当 Y 是单连通时，X 是单连通的．

9.21 (1) **证明定理 9.18**：如果 X 是单连通的，A 是 X 的一个收缩，那么 A 是单连通的．

(2) 举一个例子说明，如果 A 是 X 的一个收缩，且 A 是单连通的，那么 X 未必是单连通的．

9.22 证明：S^1 不是单连通的．（提示：请利用在证明定理 9.19 时所使用过的类似的方法．）

9.23 证明：当且仅当 X 与 Y 都是单连通的，$X\times Y$ 是单连通的．

9.6 再论度

在本节，我们证明定理 9.5，它是建立度的定义，以及在圆函数之间同伦下的度的不变量的重要结果. 在 9.2 节和 9.3 节中，我们考察 S^1 时我们用实值 θ 表示圆周上的点，并了解 θ 与从 x 轴以正向顺时针方向起度量角度的点有关. 在本节，为表示实轴上的点，我们仍然要求取实值. 为了避免这两种解释引起混淆，我们用它们的复指数形式来表示圆周上的点. 因此，$e^{i\theta}$表示在此圆周上位于与 x 轴正向夹角为 θ 的复数 $\cos(\theta)+\sin(\theta)i$.（见图 9.25.）

我们来证明，对于任一圆函数 f：$S^1\to S^1$，存在唯一的 $n\in\mathbf{Z}$，使得 f 与由 $c_n(e^{i\theta})=e^{in\theta}$定义的 c_n：$S^1\to S^1$ 同伦. 此 c_n 是随定义在复平面上，且限定在圆周上的函数 $f(z)=z^n$ 而得到的函数. 这个函数刚好也对应于我们以前表示为 $c_n(\theta)=n\theta$ 的函数 c_n：$S^1\to S^1$.

为了证明所要的结论，我们从任一圆函数 f：$S^1\to S^1$ 联想起本质上打开 f 的函数 f^*：$[0,2\pi]\to\mathbf{R}$. 然后我们来证明 f^*，以及由 $c_n^*(\theta)=n\theta$ 所定义的线性函数 c_n^*：$[0,2\pi]\to\mathbf{R}$ 是一个直线同伦. 于是，我们从此同伦就得到所要的圆函数之间的同伦.

任一圆函数 f：$S^1\to S^1$ 可以看作为满足 $f(0)=f(2\pi)$ 的一个连续函数 f：$[0,2\pi]\to S^1$. 反之，已知一个满足 $f(0)=f(2\pi)$ 的连续函数 f：$[0,2\pi]\to S^1$，存在当然与它有关的一个圆函数 f：$S^1\to S^1$. 因此，在本节我们对满足 $f(0)=f(2\pi)$ 的连续函数 f：$[0,2\pi]\to S^1$ 进行运算. 与连续函数 f：$S^1\to S^1$ 一样，我们把这些函数也称为**圆函数**.

圆函数之间的同伦，这时在我们所提出的一些结论中起重要的作用. 对于任一 $t\in[0,1]$，这一同伦 H：$[0,2\pi]\times[0,1]\to S^1$ 必定定义了一个圆函数. 于是，我们有以下的定义：

定义 9.22 圆函数 f，g：$[0,2\pi]\to S^1$ 称为是**圆同伦的**，如果存在一个 f 与 g 之间的一个同伦 H：$[0,2\pi]\times[0,1]\to S^1$，使得对于任一 $t\in[0,1]$，都有 $H(0,2t)=H(2\pi,t)$. 这一函数称为一个**圆同伦**.

一个圆同伦 H：$[0,2\pi]\times[0,1]\to S^1$ 当然定义了一个以 S^1 为定义域的圆函数之间的一个同伦 H：$S^1\times[0,1]\to S^1$. 此外一个同伦 H：$S^1\times[0,1]\to S^1$ 自然产生一个圆同伦.

再考虑由 $p(\theta)=e^{i\theta}$所定义的函数 p：$\mathbf{R}\to S^1$. 函数 p 把任一区间 $[r,r+2\pi]$ 一一映成圆周的周围，因而把实轴无限次卷绕成圆周的周围.（见图 9.26.）它是称为覆叠映射的一类连续函数的例子.

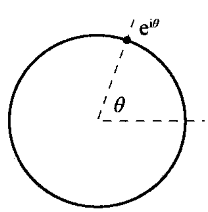


图 9.25 用复指数形式来表示圆周上的点

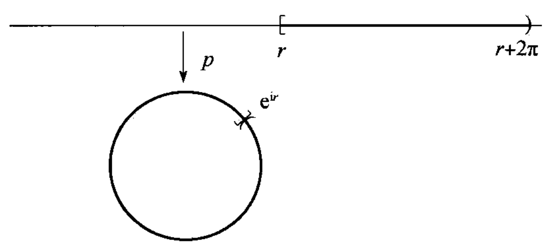


图 9.26 函数 p 把 $[r,r+2\pi]$ 卷绕成 S^1 的周围

当我们限定 p 为一个开区间 (a,b)，其中 $b-a\leqslant 2\pi$ 时，所得到的函数 $p|_{(a,b)}$是映到它在 S^1 中原象上的一个同胚. 对于任一 $r\in R$，设 q_r 是同胚 $p|_{(r,r+2\pi)}$的逆. 如图 9.27 所示，函

数 q_r 把圆周挖去点 e^{ir} 所得到的 $S^1-\{e^{ir}\}$ 同胚地映成区间 $(r, r+2\pi)$.

在打开一个圆函数 f：$[0, 2\pi]\to S^1$ 背后的思路是，由它联想起一个函数 f^*：$[0, 2\pi]\to \mathbf{R}$，正如以下的：

定义 9.23 设 f：$X\to S^1$ 是连续的. 如果 $p\circ f^*=f$，那么，连续函数 f^*：$X\to\mathbf{R}$ 称为 f 的一个**提升**.（见图 9.28.）

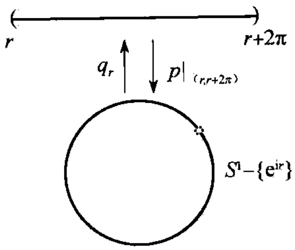


图 9.27 函数 q_r 与 $p|_{(r,r+2\pi)}$ 是逆同胚

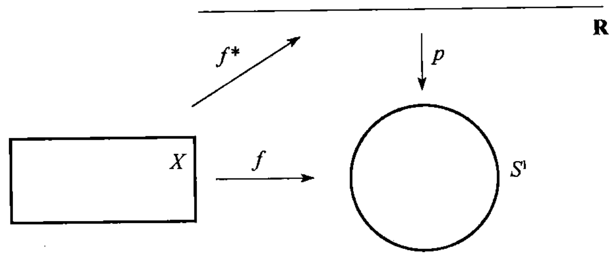


图 9.28 f 的一个提升 f^* 满足 $p\circ f^*=f$

例 9.10 按逆时针方向从 $1=e^{i0}$ 绕圆周卷 $\frac{3}{4}$ 圈的一条道路，有一个提升，它是在 $\mathbf{R}$ 中一条从 0 通向到 $\frac{3\pi}{2}$ 的一条道路. 按顺时针方向从 $-1=e^{i\pi}$ 绕圆周刚好卷一圈的一条道路，有一个提升，它是在 $\mathbf{R}$ 中一条从 π 通向到 $-\pi$ 的一条道路.（见图 9.29.）

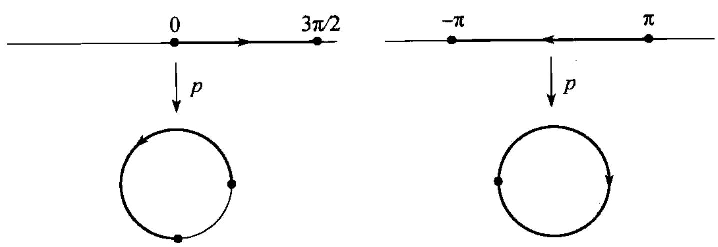


图 9.29 在圆周上一些道路的提升

以下的定理断言，对于函数 f：$X\to S^1$，只要 f 不是满射，就存在提升.

定理 9.24 设 f：$X\to S^1$ 是连续的，并假定 $f(X)$ 是 S^1 的一个真子集. 此外还设 $x_0\in X$ 且 $r_0\in p^{-1}(f(x_0))$，那么，存在 f 的一个提升 f^*：$X\to\mathbf{R}$，使得 $f^*(x_0)=r_0$.

证明 存在 $s\in S^1$ 使得 $s\notin f(X)$. 我们可以选取 $r\in p^{-1}(s)$，使得 $r_0\in(r, r+2\pi)$. 设 q_r 是以前描述过的同胚，并用 $f^*(x)=q_r(f^*(x))$ 来定义 f^*：$X\to\mathbf{R}$. 于是得出：f^* 是 f 的一个提升，且 $f^*(x_0)=r_0$.（见图 9.30.） ■

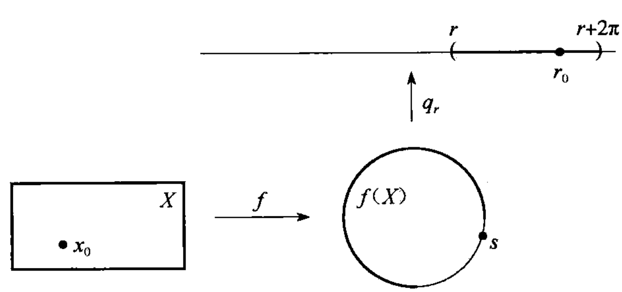


图 9.30 非满射的函数 f：$X\to S^1$ 的提升

提升不是唯一被确定的. 由于对于任一 $\theta\in\mathbf{R}$ 及 $n\in\mathbf{Z}$，都有 $p(\theta)=p(\theta+2\pi n)$，

于是就得出：如果 f^* 是 f：$X\to S^1$ 的一个提升，那么，对于任一 $n\in\mathbf{Z}$，由 $f_n^*(x)=f^*(x)+2\pi n$ 所定义的 f_n^*：$X\to\mathbf{R}$ 也是 f 的一个提升. 在 X 是连通的情况下，正如以下的定理所指出的，所有可能的提升都被列举出来了：

定理 9.25 设 f：$X\to S^1$ 是连续的，而 X 是连通的. 如果 g，h：$X\to\mathbf{R}$ 是 f 的一个提升，那么，存在 $n\in\mathbf{Z}$，使得对于任一 $x\in X$，都有 $g(x)-h(x)=2\pi n$.

证明 设 $x\in X$ 是任意的. 那么 $p(g(x))=f(x)=p(h(x))$，因而存在 $n_x\in\mathbf{Z}$，使得 $g(x)-h(x)=2\pi n_x$. 由 $k(x)=g(x)-h(x)$ 定义 k：$X\to\mathbf{R}$. k 的原象是集合 $\{2\pi n_x|x\in X\}$，而此集必定是连通的，由于 k 是连续的，且 X 是连通的. 于是集合 $\{2\pi n_x|x\in X\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个连通子空间，蕴涵对于任一 x，$y\in X$，成立 $n_x=n_y$. 因此，存在 $n\in\mathbf{Z}$，使得对于任一 $x\in X$，都有 $g(x)-h(x)=2\pi n$. ■

下一个定理是前一定理的直接结果，它指出，如果 X 是连通的，而两个提升在 X 中的一点是相同的，那么它们在 X 中的任一点也都是相同的.

定理 9.26 设 f：$X\to S^1$ 是连续的，而 X 是连通的，而 g，h：$X\to\mathbf{R}$ 是 f 的一个提升. 如果存在 $x_0\in X$，使得 $g(x_0)=h(x_0)$，那么，对于任一 $x\in X$，就有 $g(x)=h(x)$.

证明 见练习 9.25. ■

这样我们就已作好了打开圆映射的准备. 思路是，证明对于任一圆映射 f：$[0, 2\pi]\to S^1$，存在一个提升 f^*：$[0, 2\pi]\to\mathbf{R}$. 我们建立对于所有连续函数 f：$[0, 2\pi]\to S^1$ 成立的，与提升有关的更一般的结论，而不是仅仅对于圆函数成立的结论.

定理 9.27 设 f：$[0, 2\pi]\to S^1$ 是连续的. 那么，存在一个作为 f 的提升的函数 f^*：$[0, 2\pi]\to\mathbf{R}$.

证明 回想起分别等于 1 与 -1 的复数 e^{i0} 与 $e^{i\pi}$. 设 $U=S^1-\{1\}$ 与 $V=S^1-\{-1\}$. 开集 U 与 V 一起覆盖 S^1，因而，$\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ 是 $[0, 2\pi]$ 的一个开覆盖. 推论 7.28 蕴涵，存在 $[0, 2\pi]$ 的一个剖分 $0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=2\pi$，使得对于任一 $j=1, \cdots, n$，区间 $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ 包含于 $f^{-1}(U)$ 与 $f^{-1}(V)$ 其中之一. 对于任一区间 $[\theta_{j-1}, \theta_j]$，约束条件 $f|_{[\theta_{j-1},\theta_j]}$ 不是满射，因而定理 9.24 蕴涵存在 $f|_{[\theta_{j-1},\theta_j]}$ 的一个提升. 目标是逐步重建这些提升，使得它们恰当地合并在一起，以构建所想要的提升 f^*. ■

首先，假定 g_1：$[\theta_0, \theta_1]\to\mathbf{R}$ 是 $f|_{[\theta_0,\theta_1]}$ 的一个提升. 设 f_1 是此提升的第一部分. 注意到 $p(g_1(\theta_1))=f(\theta_1)$，因而 $g_1(\theta_1)\in p^{-1}(f(\theta_1))$. 于是，由定理 9.24，存在 $f|_{[\theta_1,\theta_2]}$ 的满足 $g_2(\theta_1)=g_1(\theta_2)$ 一个提升 g_2：$[\theta_1, \theta_2]\to\mathbf{R}$. 由粘合引理，我们可以把 g_1 与 g_2 粘合在一起，以得到一个连续函数 f_2^*：$[\theta_0, \theta_2]\to\mathbf{R}$. 函数 f_2^* 是 $f|_{[\theta_0,\theta_2]}$ 的一个提升. 我们可以继续上述做法，而在第 n 步所得到的函数 f_n^*，就是所想要得到的函数 f^*。

如果 f：$[0, 2\pi]\to S^1$ 是一个圆映射，那么，由定义 $f(0)=f(2\pi)$. 然而，对于 f 的提升 f^*：$[0, 2\pi]\to\mathbf{R}$ 来说，未必有 $f^*(0)=f^*(2\pi)$. 事实上，$f^*(2\pi)$ 与 $f^*(0)$ 之差与 f 的度有关. 特别地，正如我们在定理 9.31 中将证明的，$f^*(2\pi)-f^*(0)=2\pi deg(f)$.

接下来我们准备证明定理 9.5 有关存在性的论断. 设 c_n：$[0, 2\pi]\to S^1$ 是由 $c_n(\theta)=e^{in\theta}$ 定义的圆函数.

定理 9.28 *假定 f：$[0,2\pi]\to S^1$ 是一个圆函数．则存在 $n\in\mathbf{Z}$，使得 f 是 c_n 的圆同伦．*

证明 设 f^*：$[0,2\pi]\to\mathbf{R}$ 是 f 的一个提升．由于 $f(0)=f(2\pi)$，于是得出 $p(f^*(0))=p(f^*(2\pi))$，因而存在 $n\in\mathbf{Z}$，使得 $f^*(2\pi)-f^*(0)=2\pi n$．

考虑由 $H(\theta,t)=(1-t)f^*(\theta)+tn\theta$ 定义的直线同伦 H：$[0,2\pi]\times[0,1]\to\mathbf{R}$．函数 H 是 f^* 与由 $c_n^*(\theta)=n\theta$ 所定义的 c_n^*：$[0,2\pi]\to\mathbf{R}$ 之间的一个同伦．由 $G(x,t)=p(H(x,t))$ 定义 G：$[0,2\pi]\times[0,1]\to S^1$．我们断言，$G$ 是 f 与 c_n 之间的一个圆同伦．

首先，我们需要证明，对于任一 $t\in[0,1]$，$G(0,t)=G(2\pi,t)$．为此设 $t\in[0,1]$ 是固定的．注意到 $H(0,t)=(1-t)f^*(0)$ 且 $H(2\pi,t)=(1-t)f^*(2\pi)+tn2\pi=(1-t)(2\pi n+f^*(0))+t2\pi n=(1-t)f^*(0)+2\pi n=H(0,t)+2\pi n$．

于是 $H(0,t)$ 与 $H(2\pi,t)$ 相差 $2\pi n$，因而得出，$p(H(0,t))=p(H(2\pi,t))$．因此 $G(0,t)=G(2\pi,t)$，蕴涵 G 是一个圆同伦．

最后，$G(\theta,0)=p(f^*(\theta))=f(\theta)$ 且 $G(\theta,1)=p(n\theta)=e^{in\theta}$．因此 G 是 f 与 c_n 之间的一个圆同伦． ■

建立定理 9.5 的最后一步，是证明结论的唯一性．即我们需要证明，如果 f 是 c_n 与 c_m 之间的圆同伦，那么 $n=m$．这只要证明如果 c_n 与 c_m 圆同伦，那么就有 $n=m$ 就足够了．为了实现这一目标，我们需要另一个关于同伦性的提升结论．

定理 9.29 *设 H：$[0,2\pi]\times[0,1]\to S^1$ 是连续的．那么，存在一个函数 H^*：$[0,2\pi]\times[0,1]\to\mathbf{R}$，它是 H 的一个提升．*

证明 在这里使用的方法与证明定理 9.27 时所使用的相同．同样设 $U=S^1-\{1\}$ 与 $V=S^1-\{-1\}$．那么 $\{H^{-1}(U),H^{-1}(V)\}$ 是 $[0,2\pi]\times[0,1]$ 的一个开覆盖．按照有关勒贝格数引理的一个结论，我们可以用

$$0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=2\pi$$
$$0=t_0<t_1<\cdots<t_m=1$$

来剖分 $[0,2\pi]\times[0,1]$．使得每个矩形 $[\theta_{j-1},\theta_j]\times[t_{j-1},t_j]$ 包含于 $H^{-1}(U)$ 与 $H^{-1}(V)$ 二者之一．由定理 9.24，我们可以得到被限制于每个这样的矩形的 H 的一些提升．任务是适当选取这些提升，并把它们粘接在一起，以得到所想要的提升 H^*．

为了简化记号，用 $R_{i,j}$ 来记矩形 $[\theta_{j-1},\theta_j]\times[t_{j-1},t_j]$．首先定义 $G_{1,1}$：$R_{1,1}\to\mathbf{R}$ 为 $H|_{R_{1,1}}$ 的一个提升．我们还把 $G_{1,1}$ 记为 $H_{1,1}^*$．注意到 $G_{1,1}(\theta_1,t_0)\in p^{-1}(H(\theta_1,t_0))$．再设 $G_{2,1}$：$R_{2,1}\to\mathbf{R}$ 为满足 $G_{2,1}(\theta_1,t_0)=G_{1,1}(\theta_1,t_0)$ 的 $H|_{R_{2,1}}$ 的一个提升．在这时，我们就有图 9.31 所示的，H 到任一矩形 $R_{1,1}$ 与 $R_{2,1}$ 的提升．这些提升与点 (θ_1,t_0) 相同，但是，我们希望它们与整个交集 $R_{1,1}\cap R_{2,1}$ 完全相同，为了使得能把它们粘接在一起，以得到定义在整个 $R_{1,1}\cup R_{2,1}$ 上的提升．

我们断言，在事实上，在整个 $R_{1,1}\cap R_{2,1}$ 上，它们确实相同．此交集是集合 $S=\{\theta_1\}\times[t_0,t_1]$．约束条件 $G_{1,1}|_S$ 与 $G_{2,1}|_S$ 都是 $H|_S$ 的提升，而它们在点 (θ_1,t_0) 处相同．定理 9.26 蕴涵 $G_{1,1}|_S=G_{2,1}|_S$，因而在整个 $R_{1,1}\cap R_{2,1}$ 上相同．因此，我们把 $G_{1,1}|_S$ 与 $G_{2,1}|_S$ 粘接在一起，而得到 $H|R_{1,1}\cup R_{2,1}$ 的一个提升 $H_{2,1}^*$．

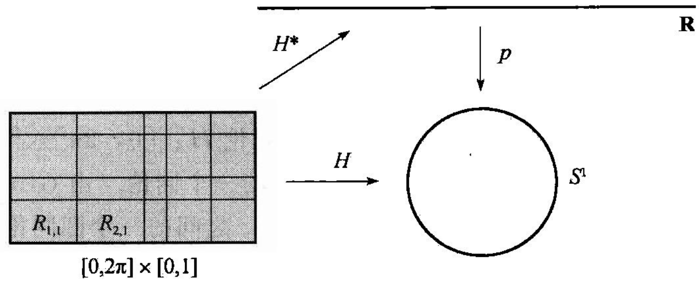


图 9.31 同伦 H 把一个矩形提升一次

我们继续上述的构建法，构造 H^* 越过在 $[0, 2\pi]\times[0, 1]$ 剖分中矩形的最下面的一行，然后越过最下面的第二行等等. 函数 $H^*_{n,m}$ 就是所想求出的 H 的提升. ■

下面我们有为已明确定义的度所建立的唯一性结论.

定理 9.30 *如果 c_n 与 c_m 圆同伦，那么就有 $n=m$.*

证明 设 G: $[0, 2\pi]\times[0, 1]\to S^1$ 是一个满足 $G(\theta, 0)=c_n$ 且 $G(\theta, 1)=c_m(\theta)$ 的一个圆同伦. 由定理 9.29，存在一个作为 G 的一个提升的函数 G^*：$[0, 2\pi]\times[0, 1]\to\mathbf{R}$.

由于 $G(\theta, 0)=c_n(\theta)$，于是得出 $G^*|_{[0,2\pi]\times\{0\}}$ 是 c_n 的一个提升. 由 $c_n^*(\theta)=n\theta$ 定义的函数 c_n^*：$[0, 2\pi]\to\mathbf{R}$ 也是 c_n 的一个提升. 定理 9.25 蕴涵，存在 $d\in\mathbf{Z}$，使得对于任一 $\theta\in[0, 2\pi]$ 都有 $G^*(\theta, 0)=n\theta+2\pi d$. 因此

$$G^*(2\pi,0)-G^*(0,0)=2\pi n+2\pi d-2\pi d=2\pi n. \tag{9.4}$$

同样，

$$G^*(2\pi,1)-G^*(0,1)=2\pi m. \tag{9.5}$$

最后，G 是一个圆同伦. 它蕴涵，$G^*|_{\{0\}\times[0,1]}$ 和 $G^*|_{\{2\pi\}\times[0,1]}$ 作为把 $[0, 1]$ 映成 S^1 的函数是相同的. 因此 $G^*|_{\{0\}\times[0,1]}$ 和 $G^*|_{\{2\pi\}\times[0,1]}$ 是同一函数的提升. 定理 9.25 蕴涵，存在 $b\in\mathbf{Z}$，使得对于任一 $t\in[0, 1]$，都有 $G^*(2\pi, t)=G^*(0, t)+2\pi b$. 于是得出 $G^*(2\pi, 1)-G^*(0, 1)=G^*(2\pi, 0)-G^*(0, 0)$. 据此再由 (9.4) 和 (9.5) 式，它蕴涵 $2\pi m=2\pi n$，因而 $m=n$. ■

借助定理 9.28 和 9.30，我们就证明了定理 9.5，后者确认了度是圆函数的一种有明确定义的性质. 通过与证明定理 9.30 类似的方法，我们可以建立以下的定理，它揭示了度与圆函数提升的端点有关：

定理 9.31 *设 f: $[0, 2\pi]\to S^1$ 是一个圆函数，并设 f^*：$[0, 2\pi]\to\mathbf{R}$ 是 f 的一个提升. 那么 $f^*(2\pi)-f^*(0)=2\pi deg(f)$.*

证明 见练习 9.26. ■

9.6 节练习

9.24 证明：在定理 9.25 中，如果我们放弃 X 是连通的假设，那么结论未必成立. 即找一个具有非连通定义域的连续函数 f: $X\to S^1$，使得 f 存在与常数没有差别的提升 g，h: $X\to\mathbf{R}$.

9.25 **证明定理 9.26**：设 f: $X\to S^1$ 是连续的，而 X 是连通的，且 g，h: $X\to\mathbf{R}$ 是 f 的一个提升. 如果存在 $x_0\in X$，使得 $g(x_0)=h(x_0)$，那么，对于任一 $x\in X$，有 $g(x)=h(x)$.

9.26 **证明定理 9.31**：设 f：$[0, 2\pi]\to S^1$ 是一个圆函数，并设 f^*：$[0, 2\pi]\to\mathbf{R}$ 是 f 的一个提升．那么 $f^*(2\pi)-f^*(0)=2\pi deg(f)$．（提示：设 G 是 f 与 c_n 之间的一个圆同伦，其中 $n=deg(f)$，$G(\theta, 0)=f(\theta)$ 且 $G(\theta, 1)=c_n(\theta)$．设 G^* 是 G 的一个提升．像证明定理 9.30 一样进行论证并证明 $G^*(2\pi, 0)-G^*(0, 0)=2\pi n$．然后用定理 9.25 就可得到所要的结论．）

9.27 证明：如果：f：$S^1\to S^1$ 是一个同胚，那么 $deg(f)=\pm 1$.

补充练习：博苏克－乌拉姆定理与火腿三明治定理

在 6.3 节中，我们介绍了博苏克－乌拉姆定理，在那里证明了，设 f：$S^2\to\mathbf{R}$ 是连续的，那么存在 $x\in S^2$，使得 $f(x)=f(-x)$（把 $x\in S^2$ 看成 $\mathbf{R}^3$ 中以原点为起点的单位向量）．那时我们就已指出，我们能够做得更好，特别是同样的结论对于区域 $\mathbf{R}^2$ 而不是对于 $\mathbf{R}$ 成立．正如在 6.3 节中所提到的，这个结论蕴涵，在地球表面上必定有一个点，与它的对心点恰好有相同的温度和气压．现在我们用一些篇幅来证明这个更强的结论．我们通过以下的练习来进行．

一个圆函数 f：$S^1\to S^1$ 称为是保持对心点的函数，如果 f 把对心点映成对心点，即如果我们把 f 看作为复值函数，那么，对于 S^1 中的任一复数 z，我们有 $f(-z)=f(z)$．（见图 9.32.）我们还可以把这个关系表示为 $f(e^{i(\theta+\pi)})=e^{i\pi}f(e^{i\theta})$．当此圆函数表示为一个使得 $f(0)=f(2\pi)$ 的映射 f：$[0, 2\pi]\to S^1$ 时，那么保持对心点的 f，对于任一 $\theta\in[0, \pi]$，必定满足 $f(\theta+\pi)=-f(\theta)=e^{i\pi}f(\theta)$.

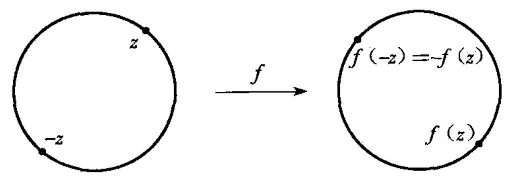


图 9.32 保持对心点的函数把对心点映成对心点

这个要求导致 $f(2\pi)=-f(\pi)=-(-f(0))=f(0)$．当然 $f(2\pi)=f(0)$是圆函数的定义所要求的，因而上述对于一个圆函数，以及为了使得对心点得以保持这两项要求彼此是相容的．

假设 f：$[0, 2\pi]\to S^1$ 是一个保持对心点的圆函数，并设 f^*：$[0, 2\pi]\to\mathbf{R}$ 是 f 的一个提升．

SE9.28 证明：对于任一 $\theta\in[0, \pi]$，存在 $n\in\mathbf{Z}$，使得对于任一 $\theta\in[0, \pi]$ 有 $f^*(\theta+\pi)=f^*(\theta)+(2n+1)\pi$.

SE9.29 证明：$f^*(2\pi)-f^*(0)\neq 0$，并得出结论：保持对心点的圆函数有非零的度．

我们再把保持对心点的概念推广到函数 f：$S^n\to S^m$．为了尽可能方便地得以实现，我们用以 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的原点为起点的单位向量，来表示 S^n 中的点．此时为使函数 f：$S^n\to S^m$ 保持对心点，应满足的要求是对于任一 $x\in S^n$，有 $f(-x)=-f(x)$.

定理 9.32 *保持对心点的连续函数 f：$S^2\to S^1$ 不存在．*

SE9.30 证明定理 9.32．（提示：假定存在一个保持对心点的函数 f：$S^2\to S^1$，并设 f_0 是由把 f 限制在赤道上而得到的圆函数．请说明，可以把补充练习 9.29 的结论应用于 f_0．然后再把 f 限制在 S^2 的包括赤道的上半部，并论证还可以把定理 9.9 应用于 f_0．通过对 f_0 这两方面的考虑，你就可以得出一个矛盾的结果了．）

定理 9.33（博苏克－乌拉姆定理） *设 f：$S^2\to\mathbf{R}^2$ 是连续的．那么存在 $x\in S^2$，使得 $f(x)=f(-x)$.*

SE9.31 证明定理 9.33．（提示：假定没有这样的 x 存在，并考虑由 $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$定义的函数．）

除了前面已经提到过的，在生态学方面的简单应用外，博苏克－乌拉姆定理另一个有趣的结论，是火腿三明治定理．定理说，如果在 $\mathbf{R}^3$ 中有 3 个立体，那么在 $\mathbf{R}^3$ 中存在一个平面，能同时把每个立体都切成一半．（见图 9.33.）于是，如果用一片面包、一薄片火腿和另一片面包做三明治，那么无论你如何放置面包与火腿，都可以用一把平直的刀割开此三明治，并把每片面包及火腿都刚好分为一半．把数学应用于社会科学

中的公平分配问题时，三明治定理起作用. 例如这些问题提出了，在多方为资源竞争时如何进行公平分配.（例如，见 [Hil].）

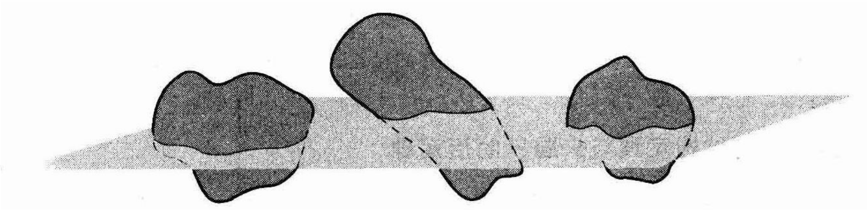


图 9.33 存在一个平面把这三个立体每个都切成一半

以下我们探讨证明火腿三明治定理的一种方法. 设 σ_1，σ_2 与 σ_3 是在 $\mathbf{R}^2$ 中的 3 个立体. 说起“立体”，就意味着，它是体积已被明确定义的一个有界集，而体积是一个来自测度论的概念，它的细节在此我们不予深究. 我们定义一个函数 $d: S^2 \to \mathbf{R}^2$，用来证明存在一个平面，把这些立体中的每一个都平分. S^2 中的每个点，作为 $\mathbf{R}^3$ 中的，描述其中方向的一个单位向量. 固定 $x \in S^2$. 考虑所有以 x 为单位向量的平面.

SE9.32 讨论为何必定存在一个含单位向量 x 的平面 $P_1(x)$，把 σ_1 分为一半.（提示：对于每个含单位向量 x 的平面 P，试考虑量 V_P，它表示 σ_1 位于平面 P 的在此单位向量 x 的那一侧的比例.）

同样，必定存在含单位向量 x 的平面 $P_2(x)$ 与 $P_3(x)$，分别把 σ_2 与 σ_3 分为一半. 我们来证明，必定存在一个 $x^* \in S^2$，使得 $P_1(x^*) = P_2(x^*) = P_3(x^*)$，因而这个公共的平面同时把每个立体都切成一半.

当平面 $P_1(x)$ 位于平面 $P_3(x)$ 的在单位向量 x 正向的那一侧时，记 $d_1(x)$ 为平面 $P_3(x)$ 与平面 $P_1(x)$ 之间的距离；当平面 $P_1(x)$ 位于平面 $P_3(x)$ 的，在单位向量 x 负向的那一侧时，就记 $d_1(x)$ 为平面 $P_3(x)$ 与平面 $P_1(x)$ 之间的距离取负. 同样，记 $d_2(x)$ 为平面 $P_3(x)$ 与平面 $P_2(x)$ 之间的距离. 我们假定由 $d(x) = (d_1(x), d_2(x))$ 所定义的函数 $d: S^2 \to \mathbf{R}^2$ 是连续的.

SE9.33 证明：对于任一 $x \in S^2$，$d(-x) = -d(x)$.

SE9.34 用博苏克-乌拉姆定理，并与补充练习 9.33 相结合来证明，存在 $x^* \in S^2$，使得 $d(x^*) = (0, 0)$. 说明这样就能得出火腿三明治定理.

第 10 章

不动点定理及其应用

设 $f: X \to X$ 是把一个拓扑空间 X 映射到自身的一个函数. 如果对于 X 中的某个 x，有 $f(x)=x$，那么 x 在 f 下映射到自身，并称为是 f 的一个不动点. 不动点以及与它们有关的定理，在基础数学和应用数学的许多领域起重要的作用. 就是在拓扑学本身之中，也有大量有关不动点的研究成果. 其中最著名的一个就是布劳威尔不动点定理. 定理说，任意一个把 n 维球 B^n 映射到自身的连续函数，必定存在一个不动点. 我们在 6.3 节曾证明过 1 维布劳威尔不动点定理，把它作为介值定理的一个推论. 在本章的 10.1 节，我们证明 2 维布劳威尔不动点定理，把它作为 2 维非保核收缩定理的一个推论. 在 10.2 节，我们证明在纯交换经济学中均衡价格分布的存在性，作为布劳威尔不动点定理的一个应用. 在 10.3 节，我们给出布劳威尔不动点定理的一个推广，即应用于集值函数的所谓的卡库塔尼不动点定理. 最后，在 10.4 节，我们用卡库塔尼定理来证明在博弈论中纳什均衡的存在性. 这是在博弈论中最重要的结论之一，正如它所论证的，对于一个博弈的所有局中人来说，存在能达到预期最佳收益的策略的一种选择.

10.1 布劳威尔不动点定理

设想有两张同样大小的纸，并把一张放到另一张的上面. 在上面一张纸上的任意一点，与另一张纸上此点正下方的某个点相对应. 再取上面一张纸，并把它不加撕扯地捏皱成一团，再把捏成的团放回下面一张纸的上面. 在捏成的纸团上的某处，存在位于下面一张纸某点正上方的一个点，在捏皱之前这个点就位于此处.（见图 10.1.）这是 2 维布劳威尔不动点定理的一个应用，我们在本节加以证明.

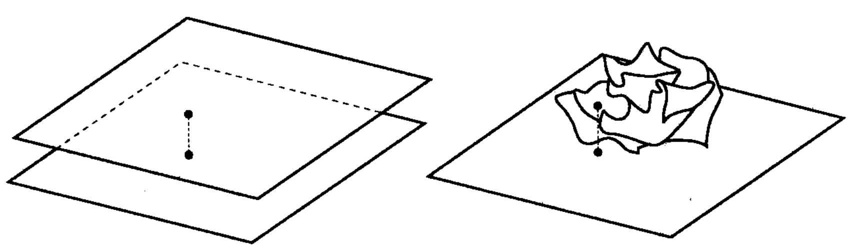


图 10.1 在纸捏皱之后，某点仍然位于捏皱之前位于其上的同一点之上

定义 10.1 设 $f: X \to X$. 如果 $f(x)=x$，就称点 $x \in X$ 为 f 的一个**不动点**. 如果任一连续函数 $f: X \to X$ 都有一个不动点，就称这个拓扑空间 X 具有**不动点性质**.

例 10.1 由 1 维布劳威尔不动点定理，空间 $[-1, 1]$ 具有不动点性质.

例 10.2 实轴 $\mathbf{R}$ 不具有不动点性质，这是由于存在不具有不动点的从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续函数. 由 $f(x)=x+1$ 定义的函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 就是这样一个例子.

例 10.3 圆周 S^1 不具有不动点性质，这是由于通过把圆周上的任一点旋转一个角度 π 所给出的连续函数 f：$S^1\to S^1$ 没有任何不动点.

不动点性质是一种拓扑性质，也就是说，如果空间 X 与 Y 是同胚的，那么，当且仅当 Y 具有不动点性质，则 X 也具有不动点性质.（见练习 10.3.）因此所有具有标准拓扑的有界闭区间 $[a, b]$ 具有不动点性质，这是由于 $[0, 1]$ 具有不动点性质. 此外具有标准拓扑的所有开区间 $(-\infty, b)$，(a, b) 与 (a, ∞)，都不具有不动点性质，由于 $\mathbf{R}$ 不具有.

在拓扑学中最有用的定理之一是布劳威尔不动点定理. 定理说对于任一 n，n 维球 B^n 具有不动点性质. 荷兰数学家布劳威尔（1881—1966）于 1912 年证明了此定理一般的 n 维版本. 此后定理就以他的名字命名. 以下我们证明，2 维布劳威尔不动点定理等价于 2 维非保核收缩定理（通过对于任一 n 证明确实转化为建立这一等价性的方法来实现）. 由于我们在 9.2 节已证明了 2 维非保核收缩定理，于是就可推出 2 维布劳威尔不动点定理.

在本节的一组补充练习中，我们给出了 2 维布劳威尔不动点定理的第二种证明，它涉及圆函数的度，但并不依赖于非保核收缩定理.

定理 10.2（2 维布劳威尔不动点定理） 把圆盘 D 映射到自身的任一连续函数 f：$D\to D$ 有一个不动点.

正如我们前面已经指出过的，我们证明这个定理的方法，是证明它与 2 维非收缩定理等价. 这由以下的定理得以实现：

定理 10.3 当且仅当不存在从圆盘 D 到它的边界 S^1 上的收缩，D 作为 $\mathbf{R}^2$ 的一个子空间，具有不动点性质.

证明 首先，假定存在一个收缩 r：$D\to S^1$. 考虑由 $q(x)=-x$ 定义的映射 q：$S^1\to D$，其中我们视 x 为此平面上的一个向量. 函数 $q\circ r$：$D\to D$ 是连续的，且没有不动点. 因此如果存在一个收缩 r：$D\to S^1$，那么 D 不具有不动点性质.

另一方面，假定连续函数 f：$D\to D$ 没有不动点. 我们来证明存在一个收缩 r：$D\to S^1$. 定义 r：$D\to S^1$ 如下. 首先，在 $\mathbf{R}^2$ 中选取从 $f(x)$ 出发穿过 x 的射线. 这样的射线是被明确定义的，由于 f 没有不动点. 设 $r(x)$ 是如图 10.2 所示的，此射线与 S^1 相交的点. 显然 r 把 D 映成 S^1，且对于任一 $x\in S^1$，$r(x)=x$. 这就得出，一旦 r 的连续性被证实，r 就是一个收缩.

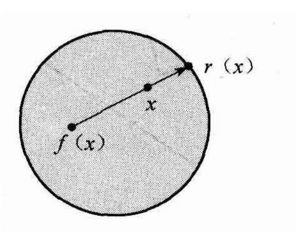


图 10.2 定义 r 为从圆盘到边界圆周的函数

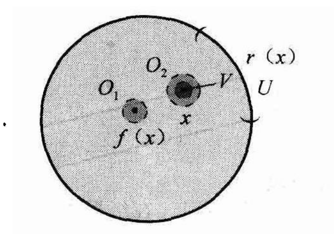


图 10.3 存在包含 x 的开集 V，使得 $f(V)\subset U$

为了证明 r 是连续的，设 U 在 S^1 中是开集，且 x 是 $r^{-1}(U)$ 中的一个点. 我们来证明存

在一个包含 x 的开集 V，使得 $r(V)\subset U$，因而 $r^{-1}(U)$ 是开集. 首先，我们选取中心分别在 $f(x)$ 与 x 的小开球 O_1 与 O_2，使得以 O_1 为起点并穿过 O_2 的任一射线，与集合 U 中的 S^1 相交.（见图 10.3.）由于 f 是连续的，因此我们可以找到一个包含 x 且包含于 O_2 中的开集 V，使得 $f(V)\subset O_1$. 因此，对于任一 $v\in V$，以 $f(v)$ 为起点并穿过 v 的射线，与集合 U 中的 S^1 相交. 所以，$r(v)\in U$. 于是得出，r 是连续的. 因此我们证得，如果 D 不具有不动点性质，那么存在一个收缩 r：$D\to S^1$，于是定理的证明完成. ■

2 维非保核收缩定理与定理 10.3，直接蕴涵定理 10.2，因而我们就实现了 2 维布劳威尔不动点定理的证明.

如果我们用 n 维球 B^n 与（$n-1$）维球面 S^{n-1} 分别取代圆盘 D 与圆周 S^1，对定理 10.3 的证明就得以完成，而用这种方法就可以证明，n 维布劳威尔不动点定理等价于 n 维非保核收缩定理.

例 10.4 假设我们拿一张新英格兰州的地图，并如图 10.4 所示，把它放在新英格兰州内任何地方的地面上. 我们假定新英格兰州拓扑等价于一个圆盘，并把它称为 N. 设 f 是为新英格兰州内的任意一个地点，指定在地图上与它对应的那个点的函数. 我们就可以把 f 看作为把 N 映射成自身的连续函数. 因此 f 必定有一个不动点，由此可得出，在地图上必定有一个点，刚好与它正下方地面上的那个点相对应. 正如一本旅行指南所说，如果我们让这张地图保持在它所在的地方，那么，在这张地图上，我们可以用一个箭头标注上“您正在此地!”来指出这个不动点的位置.

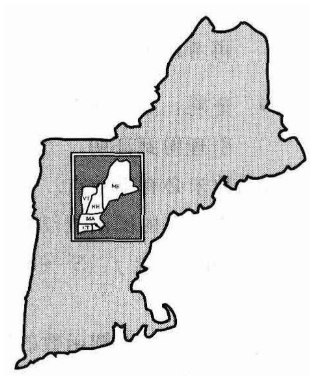


图 10.4 把新英格兰州映射成此地图的函数必定有一个不动点

10.1 节练习

10.1 证明以下每个空间不具有不动点性质：

(1) 区间 (0, 1].

(2) 环面.

(3) 通过取两个圆周并把它们在各自的点处粘合在一起而得到的 8 字形空间.

(4) 球面.

10.2 证明：如果一个拓扑空间 X 具有不动点性质，那么 X 是连通的.

10.3 证明：如果一个拓扑空间 X 具有不动点性质，且 Y 与 X 是同胚的，那么 Y 也具有不动点性质.

10.4 证明：如果一个拓扑空间 X 具有不动点性质，且 A 是 X 的一个收缩，那么 A 也具有不动点性质.

10.5 证明：如果 X 不具有不动点性质，那么对于所有 Y，积空间 $X\times Y$ 也不具有不动点性质.

10.6 证明：1 维布劳威尔不动点定理源于 2 维布劳威尔不动点定理.

10.7 考虑如图 10.5 所示的字母 $A\sim E$ 的拓扑图. 试确定这些空间中哪个具有不动点性质.（提示：对于字母 E，可能要用到练习 10.4.）

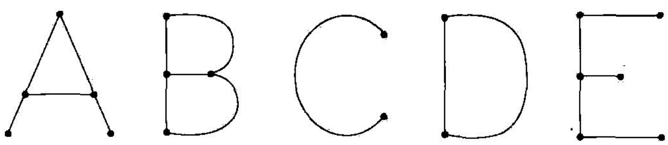


图 10.5 这些字母中哪个具有不动点性质

补充练习：得出 2 维布劳威尔不动点定理的另一种方法

本练习我们要完成 2 维布劳威尔不动点定理的另一种证明. 此时定理的证明，直接根据圆函数的度而不依赖于非保核收缩定理. 为此我们假定在 S^1 与 D 等之中的点 x，都是在此平面上的以原点为起点的向量. 我们从以下的引理开始证明.

引理 10.4 *设 g: $S^1 \to \mathbf{R}^2 - \{O\}$ 是连续的，并假定由 $h(x)=\dfrac{g(x)}{|g(x)|}$ 定义的函数 h: $S^1 \to S^1$ 的度不为 1. 那么存在 $x \in S^1$，使得对于某个 $a>0$，$g(x)=ax$ 成立.*

引理指出，在 g 下某个 $x \in S^1$（仍然考虑为以原点为起点的一个向量）映成 gF 它自身的一个正标量积.

证明 由 $G(x, t)=(1-t)g(x)-tx$ 定义 G: $S^1 \times [0, 1] \to \mathbf{R}^2$. 函数 G 是从 g（考虑以 $\mathbf{R}^2$ 为值域）到函数 $a(x)=-x$ 的一个直线同伦，它把任一 $x \in S^1$ 映成它的对心点 $-x \in S^1$.

SE10.8 证明：存在 $(x, t) \in S^1 \times (0, 1)$，使得 $G(x, t)=0$.（提示：假定没有这样的点 (x, t) 存在，再考虑由 $H(x, t)=\dfrac{G(x, t)}{|G(x, t)|}$ 定义的圆函数 $H(x, t)$: $S^1 \times [0, 1] \to S^1$ 的同伦.）

SE10.9 证明：如果存在 $(x, t) \in S^1 \times (0, 1)$，使得 $G(x, t)=0$，那么对于某个 $a>0$，有 $g(x)=ax$，因而引理得到证明. ■

圆函数未必有不动点. 一个圆周只是旋转 π，允许没有不动点. 这个旋转函数的度为 1. 有趣的是，这是可能没有不动点的圆函数仅有的度. 对于一些圆函数来说，它们的度不等于 1，我们有以下的定理：

定理 10.5 *设 f: $S^1 \to S^1$ 是一个圆函数，它的度 $deg(f) \neq 1$. 那么存在 x', $x'' \in S^1$，使得 $f(x')=x'$ 且 $f(x'')=-x''$.*

于是，如果一个圆函数的度不等于 1，那么此函数有一个不动点，并把一个点映成它的对心点.

SE10.10 证明定理 10.5.（提示：把 f: $S^1 \to S^1$ 看成是映入 $\mathbf{R}^2 - \{O\}$ 的一个函数，然后再用引理 10.4 来证明这个不动点的存在性. 再考虑由 $h(x)=f(-x)$ 定义的函数 h: $S^1 \to S^1$，并把此定理的第一个论断用于 h.）

然后，我们继续论述 2 维布劳威尔不动点定理. 设 D 是在此平面上的圆盘.

定理 10.6 *设 f: $D \to D$ 是连续的. 那么，存在 $x \in D$ 使得 $f(x)=x$.*

证明 假定情况并非如此. 设 k: $D \to \mathbf{R}^2 - \{O\}$ 是由 $k(x)=f(x)-x$ 所定义的函数. 函数 k 映到 $\mathbf{R}^2 - \{O\}$，这是由于我们已假定 f 没有不动点.

SE10.11 指出为什么引理 10.4 适用于函数 $k|_{S^1}$: $S^1 \to \mathbf{R}^2 - \{O\}$.（提示：证明所涉及的圆函数的度为 0.）因此存在 $x^* \in S^1$ 使得对于某个 $a>0$，有 $k(x^*)=ax^*$.

SE10.12 证明：$k(x^*)=ax^*$ 蕴涵 $f(x^*) \notin D$，因此得到一个矛盾之处，从而完成定理的证明. ■

10.2 在经济学中的一个应用

本节我们要说明，不动点理论是如何用于论证经济均衡存在性的. 假设我们有一个经济机构，它由有限个客户所组成，它们有某些销售项目. 我们假定，在这些项目中既没有消耗又没有新的产出. 因此，希望有更多特定项目的各个客户，必须卖出他们现有的其他项目的某些股票，以买进他们所希望项目的股票. 这称为纯交换经济学.

项目的价格由供给和需求来确定，在 1776 年被哲学家和经济学家亚当·斯密（1723—1790）称之为“无形之手”. 如果对于一个产品来说，需求多于供给，产品的价格就会上涨.

如果供给过多而需求过少，产品的价格就会下降．我们希望知道，是否存在对价格的一种选择，使供给和需求取得均衡；以及是否存在使价格稳定的一个均衡点，在那种场合，所有的消费者都为他们的一堆货物而扬扬得意．

1932 年冯·诺伊曼（1903－1957）在（美国）普林斯顿主办了一个名为“关于经济学的一个方程组及布劳威尔不动点定理的一个推广”的讨论班．在讨论班上，他概述了如何利用不动点理论来证明经济学模型中均衡点的存在性．这一概念的推广和应用，导致了 K 阿罗于 1972 年和G. 德布鲁（1921—2004）于 1983 年获得了诺贝尔经济学奖．应用于博弈论，正如我们将在 10.4 节中讨论的，也使数学家纳什在 1994 年获得诺贝尔经济学奖．

首先让我们考察一个特别简单的例子．假定我们有一个仅有 3 个有效项目的经济机构．这 3 个项目是开司米织物、黄油和火药．每种项目的总量称为供给，以磅计．3 种供给分别记为 S_C，S_B，S_G．我们将每个项目的供给以向量表示，称为供给向量 $\boldsymbol{S}=(S_C, S_B, S_G)$．

在这个经济机构中有 n 次个别的交易，我们用整数 1，2，…，n 来表示它们．每次个别的交易从每个项目的某个数开始，分别称为他（或她）的一堆货物．个别的一次交易 i 有一堆货物 $\boldsymbol{b}^i=(b_C^i, b_B^i, b_G^i)$，即在对应分量中给出每个项目数量的一个 3 维向量．在任何给定的时刻，在此经济机构中的每个客户的所有货物向量之和，给出供给向量

$$\boldsymbol{S}=\sum_i \boldsymbol{b}^i.$$

我们假定，在整个期间没有耗尽或毁灭的项目，所以 $\boldsymbol{S}$ 是不变的．每个客户只要根据价格的走向贮存他们的货物，并盼望添加些个别货物．如果某一客户有更多的黄油和较少的火药，那么她可以把她的开司米织物以时价卖给其他客户，并买进所需添加的黄油．然而如果每个客户都企图抛出火药，那么火药的价格就会下降了．

我们分别用 P_C，P_B 和 P_G 来记开司米织物、黄油和火药每磅的时价．于是用单个价格的向量 $\boldsymbol{p}=(P_C, P_B, P_G)$ 来表示这个价格总体．

事实上，问题在于，这仅仅是这些项目的相对价格．任何项目的特定价格是互不相关的，由于它是有待确定的价格的比，例如，当一磅开司米织物卖出时能买进多少黄油．

因此我们让每个个别的价格除以这些价格的和，使此情况实现“标准化”．我们把所得到的价格记为：

$$P'_C=\frac{P_C}{P_C+P_B+P_G},\quad P'_B=\frac{P_B}{P_C+P_B+P_G}\quad 和\ P'_G=\frac{P_G}{P_C+P_B+P_G}.$$

这些标准化的价格的优点是，它们的和为 1．为了使记号简化起见，我们略去价格向量上的撇，但我们要把价格已标准化的约定牢记心中．于是在我们的价格总体向量 $\boldsymbol{p}=(P_C, P_B, P_G)$ 中的这些向量，仍然满足条件 $P_C+P_B+P_G=1$．此外我们假定，这些项目中没有一个是被消费者轻视的项目，以至他可能向你付款以后拿了就走．换句话说，价格绝不会是负的，所以

$$P_C\geqslant 0,\quad P_B\geqslant 0\ 且\ P_G\geqslant 0.$$

一旦一个项目的价格为 0，那么对此项目就没有需求. 每个消费者宁愿有另两个项目，而不管它们有多贵.

在 3 维空间中，我们可以画出此价格向量的图形. 等式 $P_C+P_B+P_G=1$ 确定一个平面. 由于有约束 $P_C\geqslant 0$，$P_B\geqslant 0$ 且 $P_G\geqslant 0$，就使得此平面的这个部分，位于 3 维空间的第一卦限，形成一个如图 10.6 所示的三角形 T. 在此三角形中的每个点对应于一个价格三角形，我们三种货物中的每一种，对应一个三角形. 对于我们重要的是，应用布劳威尔不动点定理，T 拓扑等价于一个圆盘.

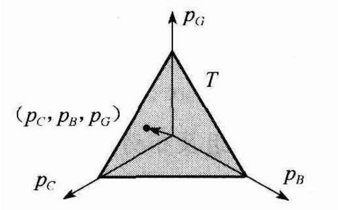


图 10.6 我们 3 种货物可能价格向量的三角形 T

已知一个特定的价格向量 $\boldsymbol{p}$，在此经济机构中的每个客户，都有某些表示他（或她）的一堆货物价值的"财产"的量. 对于第 i 个消费者来说，这笔财产由

$$w^i(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b}^i$$

给出. 按照现时的价格向量，一个客户的财产可能改变，所以，我们把它表示为 $\boldsymbol{p}$ 的一个函数.

对于一个特定的价格向量 $\boldsymbol{p}$，第 i 个客户当时的一堆货物未必是他的最优选择. 她可能用某些货物更换另一些货物. 我们用一个需求向量 $\boldsymbol{d}^i(\boldsymbol{p})$，它给出她愿意以这些价格所拥有的项目的组合，仍然保持她以 $\boldsymbol{p}$ 的价格对最优的一堆货物的偏爱. 我们假定她用她全部的财产更换她的那堆货物 $\boldsymbol{b}^i$，以获得她想要的那堆货物 $\boldsymbol{d}^i(\boldsymbol{p})$，用下式来表示：

$$w^i(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b}^i=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d}^i(\boldsymbol{p}).\tag{10.1}$$

例 10.5 假定威尔玛有 1 磅开司米织物、1 磅黄油和 3 磅火药. 所以她有一堆可提供的货物 $\boldsymbol{b}^W=(1,1,3)$. 按价格向量 $\boldsymbol{p}=\left(\frac{1}{6},\frac{3}{6},\frac{2}{6}\right)$，她有净价值 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b}^W=\frac{5}{3}$. 随后，假定以这个价格向量，她认为一种货物的销售按照需求向量 $\boldsymbol{d}^W(\boldsymbol{p})=(2,2,1)$ 的要求为好. 正如 (10.1) 式所要求的，这个需求向量受到约束，使得按这些价格计算时，她的货物的总价值 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d}^W(\boldsymbol{p})$ 等于她的净价值 $\frac{5}{3}$.

另一方面，假设德克斯特有一堆货物 $\boldsymbol{b}^D=(1,2,4)$，给出他的货物的净价值为 $\frac{5}{2}$. 按同一价格向量 $\boldsymbol{p}$，他有需求向量 $\boldsymbol{d}^D(\boldsymbol{p})=\left(6,2,\frac{3}{2}\right)$. 请注意，看来，德克斯特比威尔玛更喜欢开司米织物，由于他希望把他的财产按比威尔玛更高的比例转换为开司米织物.

如果价格改变，那么需求向量也会改变. 例如，如果价格向量是 $\boldsymbol{p}'=\left(\frac{4}{10},\frac{1}{10},\frac{5}{10}\right)$，那么威尔玛货物的净价值就会增加到 $\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{b}^W=2$. 看到黄油这样一个低价位，她就希望囤积它，并选择需求向量 $\boldsymbol{d}^W(\boldsymbol{p}')=(1,11,1)$，此时，她货物的净价值虽然也不改变（仍然为 2），但是她却把自己的财产转换为大量低价位黄油的库存.

任一消费者 i 有一个向量值的需求函数 $\boldsymbol{d}^i$，它把 T 中的价格向量，映射到与此消费者相应的需求向量. 把所有消费者各自的需求向量归并在一起，就产生按已知的价格向量 $\boldsymbol{p}$，整个

经济机构的需求向量 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})$，于是

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}) = \sum_i \boldsymbol{d}^i(\boldsymbol{p}).$$

我们假定，这个向量值函数 $\boldsymbol{D}$ 在以下的意义下是连续的，即价格向量小的改变引起整个需求的小的改变.

由于 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{d}^i(\boldsymbol{p})$ 是由价格向量 $\boldsymbol{p}$ 所给出的客户 i 的净价值，内积 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})$ 等于由那些价格给出的，此机构货物的总价值. 注意到

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}) = \sum_i \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{d}^i(\boldsymbol{p}) = \sum_i \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{b}^i = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{S}.$$

这导致

沃尔拉斯定律： $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{S}$.

上述关系以 L. 沃尔拉斯（1829—1910）命名，他是促使把此领域建立在数学根基之上的第一位经济学家.

如果 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})$对应于开司米织物的坐标，大于供给向量 $\boldsymbol{S}$ 对应于开司米织物的坐标，那么在这一价位对开司米织物的需求就大于供给.

然而如果以当时的价格，每人就可以获得对货物的最佳选择，并且不必更换他们每个项目当时的存货量，于是此经济结构是均衡的.

设 v_j 表示向量$\boldsymbol{v}$ 的第 j 个分量.

定义 10.7 *如果对于任一 j，$D_j(\boldsymbol{p}) \leqslant S_j$，那么价格向量 $\boldsymbol{p}$ 称为***均衡价格向量**.

对于这样一个价格向量，每个项目的供给超过了需求. 每个人都能获得对货物的最佳选择. 没有一个人还想再作交易. 虽然对一个项目的需求可能严格小于此项目的总供给，这未必引起此项目的价格下跌. 由于这些价格是相关的，而且每个人可能拥有足够的其他产品，供给过量的这一项目的价格未必下降.

均衡价格向量是否存在呢？这种经济结构处于均衡状态吗？用布劳威尔不动点定理我们将发现，回答是肯定的.

为此，我们定义一个把可能价格向量的集合映成自身的函数 $\boldsymbol{f}$：$T \to T$，此函数还告诉我们，对项目的需求如何引起价格的改变.

为了看出价格改变，我们考虑以下的向量：

定义 10.8 **过量需求向量***由* $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{S}$ *来定义.*

我们从向量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ 的坐标得知，对于此项目来说，按向量 $\boldsymbol{p}$ 的价格是否存在过量的需求和供给. 如果向量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ 的坐标是正的，我们预期对应项目的价格就会上涨，由于需求超过供给. 按此价格人们想要的这种产品，比可提供的要多. 然而如果向量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ 的坐标是负的，这些条件可能导致此项目的价格下跌，由于按此价格供给超过了需求.

用过量需求向量就可以把沃尔拉斯定律重新记为

$$\textbf{沃尔拉斯定律的第二种形式:} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = 0. \tag{10.2}$$

给定一个价格向量 $\boldsymbol{p}$，向量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ 指向我们预期的价格从 $\boldsymbol{p}$ 出发移往的方向. 据此，我们可以构造一个函数 $\boldsymbol{f}$，它把 T 中的任一价格向量 $\boldsymbol{p}$，朝着向量 $\boldsymbol{p}$ 预期的移动的方向映成 T 中

的另一价格向量 $f(\boldsymbol{p})$. 因此我们就创建一个把 T 映回自身的连续映射. 2 维布劳威尔不动点定理告诉我们，这个函数必定有一个不动点. 换句话说，当价格为 $\boldsymbol{p}$ 时存在一个价格向量 $\boldsymbol{p}$，使得不存在更换货物的动机. 在此价格，整个经济系统处于均衡状态.

本节余下部分，专注于通过恰当地定义 $f:T\to T$ 使这一理念在数学上精确化，并证明 f 的不动点对应于均衡价格向量.

首先我们由 $f^*(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ 来定义 $f^*:T\to\mathbf{R}^3$. 这个函数为我们提供一个理念，即由于过量的供给或需求，价格如何变动.

然而 f^* 的这个定义，存在一个根本的问题，它未必把 T 中的价格向量映回 T 中的价格向量. 所得到的一些向量可能有负的分量，而且它们坐标之和未必为 1. 我们需要解决这些问题，使得我们可以应用布劳威尔不动点定理.

为了让所有的分量非负，我们定义向量 $\boldsymbol{v}^+$，是对向量 v 通过把所有负分量改变为 0 而得到的向量. 然后我们再定义新的经改进的函数为 $f^{**}(\boldsymbol{p})=(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}))^+$. 函数 f^{**} 把 T 映射为 $\mathbf{R}^3$ 的第一卦限，但 $f^{**}(\boldsymbol{p})$ 未必位于 T 中，由于它的分量之和未必为 1. 然而通过对 $f^{**}(\boldsymbol{p})$ "标准化"，即所得到的向量除以它的分量之和，我们就得到 T 中的一个向量. 重要的是，注意到 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ 至少有一个坐标是正的，因而在对 $f^{**}(\boldsymbol{p})$ 标准化时不会被 0 除. （见练习 10.15.）

用 $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}))_j^+$ 表示 $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}))^+$ 的第 j 个分量，我们设 $\beta(\boldsymbol{p})=\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}))_j^+$，再来定义我们所想要的，把 T 映成自身的函数如下：

定义 10.9 价格变动函数 f：$T\to T$ 定义为

$$f(\boldsymbol{p})=\frac{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}))^+}{\beta(\boldsymbol{p})}.$$

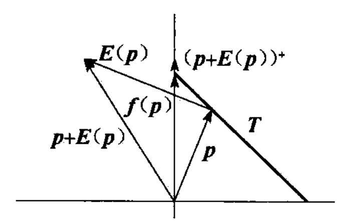


图 10.7 向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$，$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$，$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}))^+$ 与 $f(\boldsymbol{p})$

图 10.7 描述了向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$，$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$，$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}))^+$ 与 $f(\boldsymbol{p})$ 在 2 维情况的一个例子，作为我们曾经考虑过的 3 维情况的对照. 沃尔拉斯定律的第二种形式蕴涵 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ 必定是垂直的.

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})$ 为连续的事实，蕴涵价格变动函数 $f(\boldsymbol{p})$ 也是连续的.

接下来我们就准备应用 2 维布劳威尔不动点定理了. 由于 f：$T\to T$ 是一个连续函数，而 T 是一个圆盘，那么必定存在一个价格向量 $\boldsymbol{p}^*$，使得 $f(\boldsymbol{p}^*)=\boldsymbol{p}^*$. 这就是说存在某个价格向量是 f 的不动点. 事实上，我们证明这样的一个向量，就是我们所寻求的均衡价格向量.

定理 10.10 *价格变动函数 f 的不动点是均衡价格向量.*

为了证明这个定理，我们需要以下的引理：

引理 10.11 *如果 $\boldsymbol{p}^*$ 是 f 的一个不动点，那么 $\beta(\boldsymbol{p}^*)=1$.*

证明 由于 $\boldsymbol{p}^*$ 是 f 的一个不动点，我们有

$$f(\boldsymbol{p}^*)=\frac{(\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))^+}{\beta(\boldsymbol{p}^*)}=\boldsymbol{p}^* \tag{10.3}$$

这就蕴涵，对于任一 $j=1, 2, 3$，

$$(\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_j^+=\beta(\boldsymbol{p}^*)p_j^* \tag{10.4}$$

设 α 是使得 $p_\alpha^* > 0$ 的一个指标值（等于 1，2 或 3），这一 α 的存在，是由于 p^* 的分量之和为 1．由于 $\beta(\boldsymbol{p}^*) > 0$（根据练习 10.15.），从 10.4 式可得

$$(\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_\alpha^+ > 0.$$

所以

$$(\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_\alpha^+ = (\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_\alpha.$$

再代回 10.4 式，我们有

$$(\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_\alpha = \beta(\boldsymbol{p}^*) p_\alpha^*.$$

由此可得

$$E_\alpha(\boldsymbol{p}^*) = (\beta(\boldsymbol{p}^*) - 1) p_\alpha^*.$$

两边乘以 p_α^* 就得到

$$p_\alpha^* E_\alpha(\boldsymbol{p}^*) = (\beta(\boldsymbol{p}^*) - 1) p_\alpha^* p_\alpha^*. \tag{10.5}$$

虽然我们在假定 $p_\alpha^* > 0$ 的情况下推导出了（10.5）式，但当 $p_\alpha^* = 0$ 时此式也成立，由于那时它化为 0＝0．因此，由于 p_α^* 非负，（10.5）式对于任一 p_j^* 成立．再关于所有的 j 对（10.5）式求和，我们就得到

$$\boldsymbol{p}^* \cdot E(\boldsymbol{p}^*) = \sum_{j=1}^{3} p_j^* E_j(\boldsymbol{p}^*) = \sum_{j=1}^{3} (\beta(\boldsymbol{p}^*) - 1) p_j^* p_j^*$$

$$= (\beta(\boldsymbol{p}^*) - 1) \sum_{j=1}^{3} p_j^* p_j^* = (\beta(\boldsymbol{p}^*) - 1) \boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{p}^*.$$

由沃尔拉斯定律的第二种形式，$\boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*) = 0$．因此，$0 = (\beta(\boldsymbol{p}^*) - 1) \boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{p}^*$．由于 $\boldsymbol{p}^* \in T$，于是得出 $\boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{p}^* \neq 0$．所以必有 $(\beta(\boldsymbol{p}^*) - 1) = 0$，蕴涵 $\beta(\boldsymbol{p}^*) = 1$，这正是所想得到的． ■

借助引理 10.11，我们就可以证明定理 10.10 了．

定理 10.10 的证明 设 $\boldsymbol{p}^*$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的一个不动点．所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}^*$．由于 $\beta(\boldsymbol{p}^*) = 1$，（10.3）式成为

$$(\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))^+ = \boldsymbol{p}^*,$$

它实际上是形如

$$(\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_j^+ = p_j^*. \tag{10.6}$$

的 3 个等式．

我们考虑 p_j^* 的两种可能性：不是 $p_j^* = 0$，就是 $p_j^* > 0$．我们要记住，所有的价格必定是非负的．

如果 $p_j^* = 0$，那么 $(\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_j^+ = 0$．所以 $E_j(\boldsymbol{p}^*)^+ = 0$，可得 $E_j(\boldsymbol{p}^*) \leqslant 0$．这意味着在这种情况，对于项目 j 来说，没有过量的需求．

再考虑 $p_j^* > 0$ 的情况．然后用（10.6）式可得 $(\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_j^+ > 0$．因此，

$$(\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_j^+ = (\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_j.$$

把它代回（10.6）式就得到 $(\boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^*))_j = p_j^*$，因而 $E_j(\boldsymbol{p}^*) = 0$．

总之，这些情况蕴涵：对于任一 j，$E_j(\boldsymbol{p}^*) \leqslant 0$．因此，对于任一 j，$D_j(\boldsymbol{p}_j^*) \leqslant S_j$，而

$\boldsymbol{p}^*$ 是一个均衡价格向量. ■

当我们有了一个均衡价格向量 $\boldsymbol{p}^*$，其中对于任一 j，$D_j(\boldsymbol{p}^*)\leqslant S_j$，我们就称此市场是明朗的. 每个人都可以求出他们的需求向量. 布劳威尔不动点定理告诉我们，由于存在这一个价格，因此我们全都可以高枕无忧了.

我们不必说这些结论都依赖于我们只有 3 个有效项目的事实. 同样的结论，对于拥有成百上千以至几百万客户的经济机构也成立. 当然，为一般的环境建立相应的结论就需要 n 维布劳威尔不动点定理了.

10.2 节练习

10.13 如果经济机构仅有两个客户组成，请描述价格向量的拓扑空间. 在这种情况，是否可以实现本节所作的分析？

10.14 在一个有 4 种货物的经济机构中，所得到的标准化的价格向量的集合，将产生与我们在 3 维空间中所构建的相类似的在 4 维空间中的三角形 T. 它将是什么图形？它有多少个面？它们的方程是什么？它有多少边和顶点？它们的方程是什么？

10.15 证明：向量 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ 至少有一个分量是正的.

10.16 假设我们整个经济机构仅由卡门与德克斯特两个客户组成，初始的一堆货物为 $\boldsymbol{b}^C=(1,1,2)$，$\boldsymbol{b}^D=(3,4,2)$，而初始价格向量为 $\boldsymbol{p}_0=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{4}{6}\right)$. 设 f 是价格改变函数.

(1) 假定当价格向量为 $\boldsymbol{p}=\left(\frac{1}{6},\frac{3}{6},\frac{2}{6}\right)$时，卡门有需求向量 $\boldsymbol{d}^C=(3,1,1)$，德克斯特有需求向量 $\boldsymbol{d}^D=(8,1,4)$. 对于这个 $\boldsymbol{p}$，请确定 $f(\boldsymbol{p})$.

(2) 假定当价格向量为 $\boldsymbol{p}'=\left(\frac{4}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$时，卡门有需求向量 $\boldsymbol{d}^C=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$，德克斯特有需求向量 $\boldsymbol{d}^D=(2,3,7)$ 对于这个 $\boldsymbol{p}'$，请确定 $f(\boldsymbol{p}')$.

10.17 设 k 是一个正实常数. 定义

$$f_k(\boldsymbol{p})=\frac{(\boldsymbol{p}+k\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}))^+}{\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{p}+k\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}))_j^+}.$$

证明：这个一般的价格改变函数的一个不动点 $\boldsymbol{p}^*$ 也产生一个均衡价格向量.

10.3 卡库塔尼不动点定理

1941 年在布劳威尔不动点定理得到有效应用之前，S. 卡库塔尼（1911—2004）就证明了此定理的推广. 取代适用于把 n 维球 B^n 映射到自身的函数.

卡库塔尼不动点定理适用于所谓的集值函数. 通常，函数伴随着在定义域 X 中的一个点 x 和在值域 Y 中的一个点 y. 在此，我们将把函数视为在定义域 X 中取一个点 x，并把它映成值域 Y 中的一个非空子集 A. 我们用 $f: X\rightarrow_s Y$ 来表示这样的集值函数.（在本节我们把其值为点的函数称为点值函数，以便与集值函数相区别.）

例 10.6 *考虑曾经生存过的所有人的集合. 设 f 把每个人归属于人们曾经看到过的所有人的集合. 这就是集值函数的一个例子. 对于每个点（人），函数 f 与一个点集（人们曾经看到过的人的集合）有关.*

例 10.7 以下的函数都是集值函数：

(1) 设 f 把每个实数 x 归属于所有大于或等于 x 的实数集. 我们记为 $f(x)=\{y\in\mathbf{R}\mid y\geqslant x\}$.

(2) 设 g 把每个实数 x 归属于由 x 和 $-x$ 所组成的集合. 所以 $g(x)=\{x, -x\}$.

(3) 设 h 把每个负实数 x 归属于集合 $[-1, 4]$，而把每个非负实数 x 归属于集合 $[-4, 1]$. 所以

$$h(x)=\begin{cases}[-1,4] & 若\ x<0,\\ [-4,1] & 若\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于点值函数 f：$X\to Y$，它的图形由 $X\times Y$ 中的集合 $\{(x, y)\mid y=f(x)\}$ 给出. 对于集值函数我们需要类似的记号.

定义 10.12 集值函数 f：$X\to SY$ 的**图形**，是由 $G_f=\{(x, y)\mid y\in f(x)\}$ 给出的 $X\times Y$ 的子集.

例 10.8 例 10.7 中的集值函数 f，g 与 h 的图形在图 10.8 表示出来.

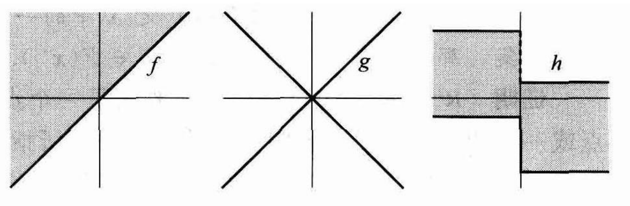


图 10.8 集值函数 f，g 与 h 的图形

在布劳威尔不动点定理的假设中，函数的连续性是至关重要的. 对于集值函数我们不直接定义连续性，而代之以考虑一种与它密切有关的性质. 由综合练习 4.10 和 7.13 的结论就可得出，如果 Y 是紧致的且是豪斯多夫的，那么，当且仅当 f 的图形是 $X\times Y$ 中的闭子集时，点值函数 f：$X\to Y$ 是连续的. 因此我们专注于其图为闭集的集值函数. 在例 10.8 中集值函数 f 与 g 具有成为闭集的图形，但 h 不具有.

具有一个闭图形是优点，由于它蕴涵与收敛序列相称的性态，正如以下的引理所指出：

引理 10.13 设 f：$X\to sY$ 是集值函数，它的图形 G_f 是 $X\times Y$ 中的闭集. 如果 (x_n) 是 X 中的一个收敛于 $x_0\in X$ 的序列，而 (y_n) 是 Y 中对于任一 n 满足 $y_n\in f(x_n)$ 的一个收敛于 $y_0\in Y$ 的序列，那么 $y_0\in f(x_0)$.

证明 在 $X\times Y$ 中构造一个由 $(x, y)_n=(x_n, y_n)$ 定义的序列 $((x, y)_n)$. 由于 $y_n\in f(x_n)$，整个这个序列位于 f 的图形之中. 由于 (x_n) 收敛于 x_0，(y_n) 收敛于 y_0，因此 $((x, y)_n)$ 收敛于 (x_0, y_0). 在这时，要么存在 N，使得 $(x_0, y_0)=(x_N, y_N)$，要么 (x_0, y_0) 与任一 (x_n, y_n) 相异. 在第一种情况下直接可以得出 $(x_0, y_0)\in G_f$. 在第二种情况，(x_0, y_0) 必定是集合 $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 的一个极限点，因而必定也是 G_f 的一个极限点. 由于 G_f 是闭的，于是在这种情况，同样有 $(x_0, y_0)\in G_f$. 无论哪种情况，(x_0, y_0) 都在 f 的图形之中，因而 $y_0\in f(x_0)$，这正是我们所要证明的. ■

这时对于一个集值函数来说，这是否意味着有一个不动点呢？

定义 10.14 已知一个集值函数 F：$X\to sX$，F 的一个**不动点**，是 X 中的一个满足 $x^*\in F(x^*)$的点 x^*.

一个集值函数的不动点，是被映成包含此点的一个集合的那个点，与点值函数的不动点

不同的是，它仅仅是映成自身的那个点.

在卡库塔尼不动点定理中所考虑的函数，假设以 $\mathbf{R}^n$ 中的一个多面体为定义域，其中多面体是可表示为有限多个形如 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant b$ 的线性不等式的一个解组的有界集.（见定义 0.12.）

n 维卡库塔尼不动点定理说，对于 $\mathbf{R}^n$ 中的一个多面体 X，集值函数 F：$X\to sX$ 有一个不动点，如果对于 X 中任一 x，$F(x)$ 是 X 中的一个凸子集，且 F 的图形是 $X\times X$ 中的闭集.

在 n 维卡库塔尼不动点定理的证明中，要求 n 维布劳威尔不动点定理成立. 以下我们仅给出 1 维或 2 维卡库塔尼不动点定理，但这个证明逐字逐句地推广呈现于 n 维布劳威尔不动点定理的证明之中.

在 1 维的情况，对于可剖分空间 $X\subset\mathbf{R}$ 来说可能会受到限制. 事实上，这些集合必定是有界闭区间 $[a, b]$.（见练习 10.20.）在练习 10.21 中我们要求证明 1 维卡库塔尼不动点定理.

以下我们给出 2 维卡库塔尼不动点定理：

定理 10.15（2 维卡库塔尼不动点定理） *设 X 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个可剖分空间，且 F：$X\to sX$ 是对于 X 中的任一 $\boldsymbol{x}$ 使得 $F(\boldsymbol{x})$ 是 X 中的一个凸子集的集值函数. 如果 F 的图形是 $X\times X$ 中的闭集，那么存在 $\boldsymbol{x}^*\in X$，使得 $\boldsymbol{x}^*\in F(\boldsymbol{x}^*)$.*

证明 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个可剖分空间要么是一个点、一条线段，要么是一个凸多边形. 在一个点或一条线段的情况，就归结为练习 10.21 所指出的定理的 1 维版本. 以下我们着手于 $\boldsymbol{R}^2$ 中一个凸多边形的情况. 为了简单起见，我们对 X 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中一个三角形 T 的情况，来证明定理. 然后，我们再讨论如何把对一个三角形的证明方法，转化为适用于一般的凸多边形.

设 T 是在此平面上带向量 $\boldsymbol{v}_0^1$，$\boldsymbol{v}_0^2$，$\boldsymbol{v}_0^3$ 的一个三角形（用这样复杂记号的理由是，这将使我们在推导时一目了然）. 由于 T 是一个三角形，在 T 中的任一点，可以表示为 $\boldsymbol{v}_0^1$，$\boldsymbol{v}_0^2$ 与 $\boldsymbol{v}_0^3$ 的一个线性组合. 特别地，对于 $\boldsymbol{x}\in T$，我们有 $\boldsymbol{x}=\lambda_0^1\boldsymbol{v}_0^1+\lambda_0^2\boldsymbol{v}_0^2+\lambda_0^3\boldsymbol{v}_0^3$，其中任一 $\lambda_0^i\geqslant 0$ 且 $\lambda_0^1+\lambda_0^2+\lambda_0^3=1$.（见图 10.9.）

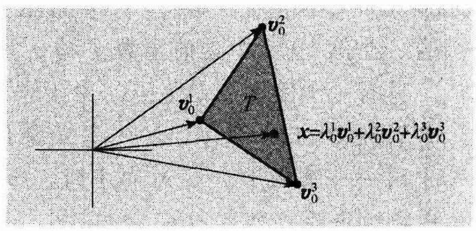


图 10.9 T 中的每个点是向量的线性组合

注意到 T 与圆盘同胚，因而 2 维布劳威尔不动点定理适用于任何一个从 T 到 T 的连续函数.

为了找出 F 的一个不动点，我们作一个趋近于 F 的点值连续函数序列 $\boldsymbol{f}_0$，$\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$，$\cdots$. 由 2 维布劳威尔不动点定理可得出，任一 $\boldsymbol{f}_n$ 都有一个不动点 $\boldsymbol{x}_n\in T$. 我们来证明，不动点的序列 $(\boldsymbol{x}_n)$，有一个收敛于 F 的不动点的序列.

对于这 3 个向量 $\boldsymbol{v}_0^i$，$i=1, 2, 3$ 中的每一个向量，我们选取一个特定的点 $\boldsymbol{y}_0^i\in f(\boldsymbol{v}_0^i)$. 然后定义一个函数 $\boldsymbol{f}_0$：$T\to T$，使得在顶点成立 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{v}_0^i)=\boldsymbol{y}_0^i$. 我们把上述关系线性延拓到此三角形，对于任一 $\boldsymbol{x}=\lambda_0^1\boldsymbol{v}_0^1+\lambda_0^2\boldsymbol{v}_0^2+\lambda_0^3\boldsymbol{v}_0^3$，设 $\boldsymbol{f}_0(x)=\lambda_0^1\boldsymbol{y}_0^1+\lambda_0^2\boldsymbol{y}_0^2+\lambda_0^3\boldsymbol{y}_0^3$.

注意到 $\boldsymbol{f}_0$ 不是一个集值函数. 它是把 T 映射到自身的一个点值函数. 然而由于 $\boldsymbol{f}_0$ 是定义为它在顶点处的值的线性组合，它是连续的. 所以 2 维布劳威尔不动点定理适用，于是我们就有一个点 $\boldsymbol{x}_0\in T$，使得 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$.

$\boldsymbol{x}_0$ 未必是集值函数 F 的一个不动点（但也可能是，例如，当它是 T 的顶点之一的时候）.

随后，为了确定在我们的趋近于 F 的函数序列中的下一个函数 $\boldsymbol{f}_1$，我们首先如图 10.10 所示，把 T 分为 4 个小三角形.

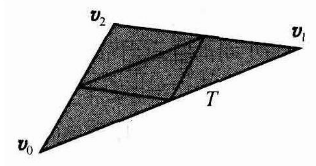


图 10.10　把 T 分为较小的三角形

这 4 个三角形的顶点由 T 的顶点和 T 的边上的中点组成，由

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0^1+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0^2,\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0^1+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0^3\text{和}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0^3$$

给出.

我们定义 $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$ 的方式类似于定义 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x})$. 对于这 4 个三角形的任一顶点 v，我们在 $F(\boldsymbol{v})$ 中选取一个点 y，并定义 $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{y}$. 然后，同 $\boldsymbol{f}_0$ 一样，我们把 $\boldsymbol{f}_1$ 线性延拓到每个三角形. 请注意，如果 $\boldsymbol{x}$ 位于两个不同的三角形的交集，那么，对于每个三角形来说，$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$ 的定义是相同的，由于它仅依赖于 $\boldsymbol{f}_1$ 在两个顶点上的定义，这两个顶点是包含 $\boldsymbol{x}$ 的边的端点.

函数 $\boldsymbol{f}_1$ 把 T 映射到自身且是连续的，由于它是在这些顶点处值的一个线性延拓. 因此，由布劳威尔不动点定理，$\boldsymbol{f}_1$ 存在一个不动点 $\boldsymbol{x}_1$. 在这里，$\boldsymbol{x}_1$ 也未必是集值函数 F 的不动点. 但如果它是由 T 剖分出的 4 个三角形的顶点之一时，也可能是 F 的不动点. 设 T_1 是一个包含此新不动点 $\boldsymbol{x}_1$ 的剖分三角形，并设 T_1 的顶点为 $\boldsymbol{v}_1^1$，$\boldsymbol{v}_1^2$ 和 $\boldsymbol{v}_1^3$.

我们继续上述这一过程. 特别地，假定我们有一个在具有顶点 $\boldsymbol{v}_{n-1}^1$，$\boldsymbol{v}_{n-1}^2$ 与 $\boldsymbol{v}_{n-1}^3$ 的三角形 $T_{n-1}\subset T$ 中，有不动点 $\boldsymbol{x}_{n-1}$ 的连续函数 $\boldsymbol{f}_{n-1}$：$T\to T$.

为了定义 $\boldsymbol{f}_n$，我们按照用来定义 $\boldsymbol{f}_{n-1}$ 的方法，把每个三角形分为以前所描述过的 4 个子三角形. 于是，对于每个三角形中的任一向量 v，我们定义 $\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{v})$ 为 $F(\boldsymbol{v})$ 中的一个点. 最后，在此剖分中的每个三角形上线性延拓 $\boldsymbol{f}_n$，以得到连续函数 $\boldsymbol{f}_n$：$T\to T$. 由于 $\boldsymbol{f}_n$ 是连续的，它有一个不动点 $\boldsymbol{x}_n\in T$. 设 $T_n\subset T$ 是在包含 $\boldsymbol{x}_n$ 的剖分中的一个三角形，并假定 T_n 有顶点 $\boldsymbol{v}_n^1$，$\boldsymbol{v}_n^2$ 与 $\boldsymbol{v}_n^3$.

现在我们就有函数 $\boldsymbol{f}_0$，$\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$，…的不动点序列 $\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…. 请注意，对于 $[0,1]$ 中的某些值 λ_n^1，λ_n^2 与 λ_n^3，有 $\boldsymbol{x}_n=\lambda_n^1\boldsymbol{v}_n^1+\lambda_n^2\boldsymbol{v}_n^2+\lambda_n^3\boldsymbol{v}_n^3$. 此外，如果对于任一 n 和 j，我们都有 $\boldsymbol{y}_n^j=\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{v}_n^j)$，那么，同样有 $\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{x}_n)=\lambda_n^1\boldsymbol{y}_n^1+\lambda_n^2\boldsymbol{y}_n^2+\lambda_n^3\boldsymbol{y}_n^3$，于是得到

$$\boldsymbol{x}_n=\lambda_n^1\boldsymbol{v}_n^1+\lambda_n^2\boldsymbol{v}_n^2+\lambda_n^3\boldsymbol{v}_n^3=\lambda_n^1\boldsymbol{y}_n^1+\lambda_n^2\boldsymbol{y}_n^2+\lambda_n^3\boldsymbol{y}_n^3. \tag{10.7}$$

由于 T 是平面的一个紧子集，定理 7.16 蕴涵，T 中的任一序列都有一个收敛的子序列. 设 $\boldsymbol{x}^*$ 是序列 $(\boldsymbol{x}_n)$ 之子序列 $(\boldsymbol{x}_{j_n})$ 的极限. 我们来证明 $\boldsymbol{x}^*$ 是集值函数 F 的一个不动点.

因为当 n 趋近于无限时，三角形 T_n 的边长收缩为零，任一由来自每个三角形 T_{j_n} 中的一个点所组成的序列，也必定收敛于 $\boldsymbol{x}^*$. 因此，不动点序列 $(\boldsymbol{x}_{j_n})$ 与相应的顶点序列 $(\boldsymbol{v}_{j_n}^1)$，$(\boldsymbol{v}_{j_n}^2)$ 和 $(\boldsymbol{v}_{j_n}^3)$ 都收敛于 x^*.

由于区间 $[0,1]$ 在 $\mathbf{R}$ 中是紧致的，定理 7.16 蕴涵，$[0,1]$ 中的任一序列都有一个收敛的子序列. 因此，3 个系数序列 $(\lambda_{j_n}^1)$，$(\lambda_{j_n}^2)$ 与 $(\lambda_{j_n}^3)$ 都有收敛的子序列. 同样，3 个序列 $(\boldsymbol{y}_{j_n}^1)$，$(\boldsymbol{y}_{j_n}^2)$ 与 $(\boldsymbol{y}_{j_n}^3)$ 都是紧致集 T 中的序列，因此，也有收敛的子序列. 通过取子序列，每次一个，对于所有这些附加的序列，我们可以选取一个单标序列 (m_n)，使得所有对应

的 10 个子序列收敛：(x_{m_n}) 收敛于 x^*，($v^1_{m_n}$) 收敛于 x^*，($v^2_{m_n}$) 收敛于 x^*，($v^3_{m_n}$) 收敛于 x^*，($\lambda^1_{m_n}$) 收敛于值 λ^1，($\lambda^2_{m_n}$) 收敛于值 λ^2，($\lambda^3_{m_n}$) 收敛于值 λ^3，($y^1_{m_n}$) 收敛于点 y^1，($y^2_{m_n}$) 收敛于点 y^2，($y^3_{m_n}$) 收敛于点 y^3.

当 m_n 趋近于无限时，我们由 (10.7) 式可以看到，$x^*=\lambda^1 y^1+\lambda^2 y^2+\lambda^3 y^3$. 此外，由于$\lambda^1+\lambda^2+\lambda^3=1$，且 λ^1，λ^2，$\lambda^3\in[0, 1]$，因此，x^* 是以 y^1，y^2 与 y^3 为顶点的“三角形”.（这里用引号是由于如果 y^i 中有两个相等或三个都相等，那么此三角形可能是一条线段或一个点.）

由于 F 在 $T\times T$ 中有一个闭图，引理 10.13 适用. 因此，序列 ($v^1_{m_n}$) 和 ($y^1_{m_n}$) 分别收敛于 x^* 和 y^1，而由于对于任一 m_n，$y^1_{m_n}\in F(v^1_{m_n})$，我们就有 $y^1\in F(x^*)$. 同样，$y^2\in F(x^*)$ 及 $y^3\in F(x^*)$. 但是，$x^*=\lambda^1 y^1+\lambda^2 y^2+\lambda^3 y^3$ 在以 y^1，y^2 与 y^3 为顶点的三角形中，这些顶点都位于 $F(x^*)$ 之中. 由于 $F(x^*)$ 是凸的，因此 x^* 必定包含于 $F(x^*)$ 之中. 换句话说，$x^*\in F(x^*)$，这正是我们所要证明的.

我们现在已经在假定定义域为平面上一个三角形的情况下，证明了 2 维卡库塔尼不动点定理. 为了证明对平面上一个凸多边形适用的结论，我们用同样的方法，但是首先要把凸多边形剖分为三角形. 初始近似函数 f_0 首先在这些三角形的顶点定义，再按我们前面的过程中所做的那样，线性延拓到每个三角形. 然后，正如我们前面所进行的一样，逐次逼近的函数 f_n，通过对前一步所考虑的三角形剖分来定义，再把此定义线性延拓到每个三角形. 经同样的论证，就产生一个不动点 x^*，使得 $x^*\in F(x^*)$. ■

证明 2 维卡库塔尼不动点定理的上述方法，可转化为一般的 n 维版本，由于 n 维布劳威尔不动点定理要求按照这种方式来证明.

卡库塔尼不动点定理把布劳威尔不动点定理作为它的特殊情况，但是我们需要把布劳威尔不动点定理的定义域，看作是一个可剖分空间，为此，设

$$P^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\,|\,-1\leqslant x_j\leqslant 1\ ,\ j=1,\cdots,n\}.$$

P^n 是一个 n 维立方体. 由定义可知 P^n 是一个可剖分空间，而它与 n 维球 B^n 同胚. 让我们在 P^n 上考虑布劳威尔不动点定理. 如果 f：$P^n\to P^n$ 是一个连续的点值函数，那么，f 可考虑为一个把 $x\in P^n$ 映成单点集 $\{f(x)\}$ 的集值函数. f 的定义域是一个紧致的可剖分空间，而 $\{f(x)\}$ 是 P^n 中的一个单点集，因而是此定义域的一个非空凸子集. 此外点值函数 f 是连续的，于是由练习 4.10 可知，f 的图形在 $P^n\times P^n$ 中是闭的. 于是卡库塔尼不动点定理适用，蕴涵存在 $x\in P^n$，使得 $x\in\{f(x)\}$，因而 $x=f(x)$.

然而，重要的是要充分意识到，虽然把布劳威尔不动点定理作为卡库塔尼不动点定理的特殊情况，但后者不能取代前者，这是由于在证明卡库塔尼不动点定理时，需要布劳威尔不动点定理.

10.3 节练习

10.18 对于下列集值函数，画出它们的图形，并对于它的定义域中的任一 x 的值，确定 $F(x)$ 是否为凸：

(1) 设 F：$\mathbf{R}\to s\mathbf{R}$ 由 $F(x)=\{y\in\mathbf{R}\,|\,y\leqslant x\}$ 给出.

(2) 设 G：$\mathbf{R}\to s\mathbf{R}$ 由 $G(x)=\{nx\in\mathbf{R}\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$ 给出.

(3) 设 H: $\mathbf{R}\to_s\mathbf{R}^2$ 由 $H(x)=\{(y_1, y_2)\in\mathbf{R}^2 \mid y_1y_2=x\}$ 给出.

10.19 如果存在一个整数 c，使得 a，$b\in[c, c+1)$，定义 $\mathbf{R}$ 上的一个关系 $a\sim b$.

(1) 证明～是一个等价关系.

(2) 设 f: $\mathbf{R}\to_s\mathbf{R}$ 是由 $f(x)=[x]$ 定义的集值函数，其中 $[x]$ 是在等价关系～下 x 的等价类. 画出 f 的草图.

(3) 对于 (2) 中定义的 f，对于任一 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 是凸的吗?

(通常，在一个集合 X 上的一个等价关系，导致一个当然的集值函数，把 X 中的每一个点映到 X 中包含它的点的等价类.)

10.20 证明：在 $\mathbf{R}$ 中一个可剖分空间必定是有界闭区间 $[a, b]$.

10.21 在 X 是区间 $[0, 1]$ 的情况，对卡库塔尼不动点定理的证明加以说明. 在你的说明中包括画出 F，f_0 与 f_1 的 n 个图以及不动点 x_0 与 x_1.

10.22 请确定卡库塔尼不动点定理是否适用于以下各个集值函数. 注意你需要检验 X 是一个可剖分空间；对于任一 $x\in X$，$F(x)$ 是凸的，且 F 的图是闭的. 如果卡库塔尼不动点定理适用，请为 F 找出尽可能多的不动点.

(1) $X=[0, 1]$ 且 $F(x)=\{y\in[0, 1] \mid y\geqslant 1-x\}$.

(2) $X=[0, 1]$ 且 $F(x)=\{y\in[0, 1] \mid \frac{y}{x}\text{是无理数}\}$.

(3) $X=[0, 1]$ 且 $F(x)=\{y\in[0, 1] \mid y\leqslant x^2\}$.

(4) $X=[0, \infty)$ 且 $F(x)=\{y\in[0, \infty) \mid y\geqslant 2x\}$.

(5) $X=[0, 1]\cup[2, 3]$ 且

$$F(x)=\begin{cases}[2,3] & \text{若 } x\in[0,1],\\ [0,1] & \text{若 } x\in[2,3].\end{cases}$$

(6) $X=[0, 1]\times[0, 1]$ 且

$$F(x, y)=\{(x, y)\in[0, 1]\times[0, 1] \mid x\geqslant y \text{ 且 } | y=1-x\}.$$

10.23 对于在卡库塔尼不动点定理中的以下的每个假设，举例说明如果放弃此假设，定理就不成立. 即找一个满足其余两个假设的集值函数 F: $X\to_s X$，但没有不动点.

(1) X 是一个可剖分空间.

(2) 对于任一 $x\in X$，$F(x)$ 是凸的.

(3) G_F 是闭的.

10.4 博弈论与纳什均衡

本节我们介绍博弈论，并提出卡库塔尼不动点定理的一个应用，用它来证明纳什曾推崇过的，有关在 n 人博弈中均衡存在性的定理. 虽然全部结论适用于 n 人博弈，但我们仅限于至多 3 个人的博弈，目的是使记号一目了然.

假设伊莱恩、乔治和纽曼同意进行一场博弈. 在已知的一次竞争中，3 人中每一人都可做有限次的选择. 对于伊莱恩，这些选择标号为 1 到 n_E. 对于乔治，这些标号为 1 到 n_G. 对于纽曼，这些标号为 1 到 n_N. 这些选择称为纯策略.

我们为博弈建立规则，使得每个局中人都在不知晓其余局中人所作选择的情况下，作出自己的选择. 于是他们每个人都得到某些收益. 此时，伊莱恩选择 i，乔治选择 j，纽曼选择

k. 结果是伊莱恩收到收益 E_{ijk}，乔治收到收益 G_{ijk}，而纽曼收到收益 N_{ijk}. 每个局中人有相应的 $n_E \times n_G \times n_N$ 个 3 维收益数组，而每个局中人都熟悉这 3 个收益数组.

当然，如果伊莱恩总是做同样的选择，就不像乔治和纽曼那样目光远大地确定如何使他们各自的（相对于他的）收益，尽可能实现最大化. 因此，伊莱恩不再一成不变地选择 i，可能会选择采取一种不同的策略. 她可能选择采用各种具有一定概率的选择.

这可能是个好主意. 例如，在一局扑克游戏中，一个局中人不想每次佯装他手头有某些牌以欺骗对方，由于其他的局中人可能会突然想到她一成不变地这么做的事实. 的确，她应该以她预定的概率佯装手头有某些牌以欺骗对方. 这将是她的策略. 那时并没有与她的佯装相应的特定的扑克牌花样.

我们把伊莱恩采用选择 i 的概率记为 p_i，乔治采用选择 j 的概率记为 q_j，而纽曼采用选择 k 的概率记为 r_k. 我们采用基本的概率假设.

$$\text{对于任一 } i,j,k, p_i \geqslant 0, q_j \geqslant 0 \text{ 及 } r_k \geqslant 0, \tag{10.8}$$

且

$$\sum_i p_i = 1, \sum_j q_j = 1 \text{ 及 } \sum_k r_k = 1 \tag{10.9}$$

定义 10.16 对应的概率向量

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_{n_E}), \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_{n_G}) \text{ 及 } \boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots r_{nN})$$

称为**混合策略**.

随后，每个局中人的收益变成一个期望值. 对于伊莱恩来说，它由

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \sum_{i,j,k} E_{ijk} p_i q_j r_k$$

给出.

此期望值是可能的收益与这一收益出现的概率的乘积之和. 类似地，我们可以分别定义乔治与纽曼的期望值 $G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ 与 $N(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$. 如果伊莱恩、乔治和纽曼玩牌的次数足够多，我们预期他们的平均收益分别接近于 $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$，$G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ 与 $N(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$.

例 10.9 假定伊莱恩、乔治和纽曼正决定到何处去进正餐. 他们既可能选择去"幸运之星"中餐馆，也可能去纽约西餐馆. 或三人同时一齐大声喊"中餐馆"或"西餐馆". 如果其中两人意见一致，另一人意见相反，那么他们全都去意见一致的两人所选的餐馆，而且第三者必须为另两人中的每一位支付餐费 10 美元. 如果三人意见一致，他们就去一致同意的那个餐馆用餐，每人支付各自的餐费.

于是伊莱恩的收益数组，有形如

$$E_{ijk} = \begin{cases} -20 & \text{若 } i \neq j = k. \\ 0 & \text{若 } i = j = k. \\ 10 & \text{其他情况} \end{cases}$$

的记载. 乔治和纽曼的收益数组，可类似地确定.

假设伊莱恩、乔治和纽曼在任何约定的傍晚选择去中餐馆或西餐馆的可能性都相同. 那么，他们的混合策略全都一样，例如 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{r} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，由此我们可计算出伊莱恩收益的

期望值. 我们可求出

$$E=-20\left(\frac{1}{4}\right)+0\left(\frac{1}{4}\right)+10\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

同样，乔治和纽曼收益的期望值也都为 0.

再假定在一个特定的博弈中，伊莱恩知道乔治和纽曼分别采用混合策略 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{r}$. 伊莱恩的目标是获得尽可能高的收益. 也就是说，对于给定的 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{r}$，她要最大化她的期望值. 因此她要找到一个策略 $\boldsymbol{p}$，使得对于所有可能的概率向量 $\boldsymbol{p}'$，使 $E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})\geqslant E(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 都成立. 对于伊莱恩来说，这样的策略可能不止一个，因此我们有以下的定义：

定义 10.17 设 $P(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 是对于所有可能的混合策略 $\boldsymbol{p}'$，使 $E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})\geqslant E(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 都成立的，所有概率向量 $\boldsymbol{p}$ 的集合. 这个集合称为与**混合策略 q 和 r 相应的最优混合策略集**.

同样，$Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$ 是当 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 给定时使乔治取得最大收益的最优混合策略集. 而 $R(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ 是当 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 给定时相应的纽曼的最优混合策略集.

接下来就要问，伊莱恩应该如何选取向量，使得期望值向量 $E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 实现最大化呢? 对于固定的 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{r}$，此期望值是 $\boldsymbol{p}$ 的系数的形如

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=\sum_{i,j,k}E_{ijk}p_iq_jr_k=\sum_i\Big(\sum_{j,k}E_{ijk}q_jr_k\Big)p_i \tag{10.10}$$

的线性表达式. 设 $a_i=\sum\limits_{j,k}E_{ijk}q_jr_k$，我们可以把（10.10）式重新记为

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_{n_E}p_{n_E}.$$

此期望值一旦被我们用这种方式重新表示出来，正如以下的例子所述，如何使它最大化，就变得显而易见的了：

例 10.10 在由伊莱恩、乔治和纽曼进行的一场特定的博弈中，假设伊莱恩有 5 种可能的选择. 再假设对于乔治和纽曼分别采用的固定的混合策略 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 来说，伊莱恩的收益的期望值是

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=3p_1+5p_2+4p_3+5p_4+p_5.$$

她应求出 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)$，使 $E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 实现最大化. 显然，伊莱恩的最佳选择，是让具有较小系数的 $\boldsymbol{p}$ 的分量尽可能小，而让具有较大系数的分量尽可能大. 在这种情况下，最大的系数是 5，所以 p_1，p_3，p_5 应该取为 0. 由于 p_2，p_4 的系数都是 5，她可以取 $p_2=1$ 和 $p_4=0$，或者取 $p_2=0$ 和 $p_4=1$. 事实上，她可以选取 p_2 与 p_4 的，其和为 1 的任意组合. 她仍然有使收益实现最大化的概率向量. 因此，她选取她的最优混合策略集为

$$P(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=\{(0,p_2,0,p_4,0)\mid p_2+p_4=1,p_2\geqslant 0,p_4\geqslant 0\}.$$

一般地，我们发现最优混合策略集 $P(q,r)$ 由

$$P(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=\{\boldsymbol{p}\mid\sum_i p_i=1\text{ 且 }p_i\geqslant 0,\qquad\text{若 }a_i<\max_j\{a_j\}\}. \tag{10.11}$$

给出. 于是得出 $P(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 是 $\mathbf{R}^{n_E}$ 的凸的有界闭子集.（见练习 10.26.）

如果伊莱恩选择一个最优混合策略 $\boldsymbol{p}$，以应对乔治和纽曼的混合策略 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{r}$，那么，在已知伊莱恩和纽曼选定混合策略 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的情况下，乔治可能要把他的混合策略改变为最优策略. 当然纽曼同样也要改变他的混合策略.

我们可能想知道，对于所有局中人来说，是否存在混合策略的一种选择，使得对每个局中

人来说，可同时使用一种最优混合策略．在这种情况，也许使局中人不产生改变策略的动机．

定义 10.18 如果 $p\in P(q, r)$，$q\in Q(p, r)$，$r\in \mathbf{R}(p, q)$，混合策略向量 p，q，r 称为**解博弈**．于是我们称 p，q，r 是一个**纳什均衡**．

在一个纳什均衡中，局中人改变他或她策略的动机不存在，假定没有一个人改变他们的策略．在已知其余局中人现有策略的情况下，他（或她）会采取尽可能多的策略．

1950 年，纳什在普林斯顿大学的博士学位论文中，证明了每一个博弈至少有一个均衡点（它后来称为纳什均衡）．他的这个结果导致了博弈论领域的革命性的变化，并随后在经济学和社会科学方面引起巨大的冲击．1994 年，J. 纳什、R. 塞尔坦和 C. 豪尔绍尼荣获诺贝尔经济学奖，后两位学者由于在存在多种均衡的情况，及在一场博弈中，任何一个局中人在缺乏其他局中人完整信息的情况下，深刻地阐述了纳什均衡的理论而获此殊荣．

过一会儿我们再提出并证明纳什定理，首先看一个例子．

例 10.11 让我们为例 10.9 中的餐馆博弈来确定纳什均衡．我们从伊莱恩的观点来考虑这个情况．设 $\boldsymbol{p}=(a, 1-a)$ 是她的混合策略．所以，a 是她挑选中餐馆的概率，而 $1-a$ 是她挑选西餐馆的概率．同样，设乔治和纽曼的混合策略 $\boldsymbol{q}=(b, 1-b)$，而纽曼的混合策略 $\boldsymbol{r}=(c, 1-c)$．

于是，伊莱恩收益的期望值是

$$\begin{aligned}E &=10[ab(1-c)+a(1-b)c+(1-a)(1-b)c+(1-a)b(1-c)]\\ &\quad -20[a(1-b)(1-c)+(1-a)(bc)],\end{aligned}$$

它蕴涵

$$E=10[2a(b+c-1)+c+b-4cb].$$

暂时假定 b 与 c 是固定的．让我们观察伊莱恩如何通过选取一个适当的 a，来使 E 实现最大化．对于和 $b+c$ 来说，我们考虑以下 3 种可能的情况．首先，如果 $b+c>1$，那么，伊莱恩通过选取 $a=1$ 就得到最大值 E．注意到由于 $a=1$，那么，$a+b$ 与 $a+c$ 都大于 1，由于当 $b+c>1$ 成立时，b 与 c 必为非零．然后，由于 $a+c>1$，通过与伊莱恩同样的论证可推出，乔治通过选取 $b=1$，就能使他的期望值实现最大化．同样，通过选取 $c=1$，纽曼能使他的期望值实现最大化．因此，$a=b=c=1$ 是一个纳什均衡．此均衡对应于每个人总是选择去中餐馆．

其次，按照类似的方式可以证明，如果 $b+c<1$，那么，所有三个局中人通过选取 $a=b=c=0$，都能使他们的期望值实现最大化．（见练习 10.27.）因此，每个人都选择去吃西餐是第二种纳什均衡．

然后，考虑最后一种可能性，即 $b+c=1$．在这种情况，就伊莱恩的期望值而言，伊莱恩挑选的概率是多少无关紧要．但是，从乔治和纽曼看来却至关重要．如果 $a+b$ 与 $a+c$ 都不等于 1，那么，正如我们早先所看到的，对应的局中人将把他的概率变为 0 或 1，迫使其他局中人改变且使每个人确立前面已提到的两种均衡之一．仅有的未出现的情况，是在 $a+b=1$，$a+c=1$ 且 $b+c=1$ 时．在这种情况，我们有 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$ 和 $c=\frac{1}{2}$．因此，这是第三种纳什均衡，它对应于每个局中人选择每个餐馆的次数相等．

在开始讲解纳什定理之前，我们回顾逐步引向它的一些要件：

(1) 在一个 n 人博弈中，每个局中人有一种可能的选择，而每种选择是在不知道其他人选择的条件下作出的.

(2) 与每个局中人相应的是，由局中人从所有可能的结果获得的收益所给出的收益数组，它与每个局中人做一种可能的选择有关.

(3) 每个局中人可以选择一种混合策略，而对于每个局中人，混合策略的组合选择，确定了平均收益，即期望值.

(4) 每个局中人对于由其他局中人所作混合策略的每种选择，有一组最优混合策略. 每种最优混合策略，将导致对于已知其他人混合策略的局中人来说，最可能的期望值.

(5) 一个纳什均衡是混合策略的一种选择，对于每个局中人，将产生与其他局中人混合策略相应的最可能的期望值.

定理 10.19 *对于任一 n 人博弈，存在一个纳什均衡.*

证明 为使记号简单起见，我们给出对于 3 人博弈的证明，但同样的证明适用于 n 人博弈. 已知 3 个收益数组 E_{ijk}，G_{ijk} 与 N_{ijk}，我们需要证明，存在一组作为此博弈的解的混合策略 $\boldsymbol{p}^*$，$\boldsymbol{q}^*$ 与 $\boldsymbol{r}^*$.

设 $m=n_E+n_G+n_N$ 对于混合策略向量 $\boldsymbol{p}=(p_1, \cdots, p_{n_E})$，$\boldsymbol{q}=(q_1, \cdots, q_{n_G})$ 与 $\boldsymbol{r}=(r_1, \cdots, r_{n_N})$ 的一个选择，我们通过把这些向量的分量按如下的方式串起来，以定义一个 m 维向量：

$$\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=(p_1,\cdots,p_{n_E},q_1,\cdots,q_{n_G},r_1,\cdots,r_{n_N}).$$

每个这样的向量 w，表示由每个局中人各自的混合策略所形成的组合选择. 它的分量必定满足不等式 (10.8) 和等式 (10.9). 于是可得出，可能向量的集合 $\boldsymbol{w}$，是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个可剖分空间 X.

我们用

$$F(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=\{(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}',\boldsymbol{r}')\mid \boldsymbol{p}'\in P(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}),\boldsymbol{q}'\in Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}'\in R(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\}$$

来定义 X 上的一个集值函数. 换句话说，向量 $\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ 被映成具有以下性质的向量族，它们的前 n_E 个分量，是在已知乔治和纽曼坚持策略 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 时，伊莱恩所采取的一个最优策略；随后的 n_G 个分量，是在已知伊莱恩和纽曼坚持策略 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 时，乔治所采取的一个最优策略；最后 n_N 个分量，是在已知伊莱恩和乔治坚持策略 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 时，纽曼所采取的一个最优策略.

如果我们能证明存在一个 $\boldsymbol{w}^*$，使得 $\boldsymbol{w}^*\in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}^*)$，那么我们就给出了此定理的证明，由于这一向量 $\boldsymbol{w}^*=(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{r}^*)$ 是由满足 $\boldsymbol{p}^*\in P(\boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{r}^*)$，$\boldsymbol{q}^*\in Q(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{r}^*)$ 与 $\boldsymbol{r}^*\in R(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$的 3 个向量 $\boldsymbol{p}^*$，$\boldsymbol{q}^*$ 与 $\boldsymbol{r}^*$ 所组成的. 于是我们就需要证明，对于集值函数 F：$X\to sX$，存在一个不动点.

我们来说明 F 适用卡库塔尼不动点定理. 前面已看出 X 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个可剖分空间. 由于 $P(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$，$Q(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ 与 $R(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ 之中，每个集合都是凸集，$F(\boldsymbol{w})$ 必定也是凸集.（见练习 10.25.）因此，我们只需要证明图 G_F 是 $X\times X\subset\mathbf{R}^{2m}$的一个闭子集. 设 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 是 G_F 的一个极限点. 对于任一正整数 i，在 G_F 与半径为$\frac{1}{i}$、中心在 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 的球的交集中，选取一个点 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$. 我们就得到一个在 G_F 中收敛于 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 的点 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ 的序列. 设 $\boldsymbol{x}_i=(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{r}_i)$，$\boldsymbol{y}_i=(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{u}_i)$，$\boldsymbol{x}_0=(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{r}_0)$，$\boldsymbol{y}_0=(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{u}_0)$. 于是，我们就有以下

的收敛序列：(p_i) 收敛于 p_0，(q_i) 收敛于 q_0，(r_i) 收敛于 r_0，(s_i) 收敛于 s_0，(t_i) 收敛于 t_0，(u_i) 收敛于 u_0.

注意到对于任一 i，$y_i \in F(x_i)$. 因此 $s_i \in P(q_i, r_i)$，$t_i \in Q(p_i, r_i)$，$u_i \in R(p_i, q_i)$. 因此，对于任一 p'，q'与 r'，我们有

$$E(s_i, q_i, r_i) \geqslant E(p', q_i, r_i),$$
$$G(p_i, t_i, r_i) \geqslant G(p_i, q', r_i),$$
$$N(p_i, q_i, u_i) \geqslant N(p_i, q_i, r').$$

由于 E，G，N 是连续函数，当我们令 i 趋于无限并取极限时，这些不等式成立.（见练习 10.24.）这就蕴涵

$$E(s_0, q_0, r_0) \geqslant E(p', q_0, r_0),$$
$$G(p_0, t_0, r_0) \geqslant G(p_0, q', r_0),$$
$$N(p_0, q_0, u_0) \geqslant N(p_0, q_0, r').$$

因此，$s_0 \in P(q_0, r_0)$，$t_0 \in Q(p_0, r_0)$ 且 $u_0 \in R(p_0, q_0)$. 于是，$y_0 \in F(x_0)$，蕴涵 (x_0, y_0) 在 F 的图形中. 于是得出，F 的图形是闭的. 现在卡库塔尼不动点定理适用，因而存在一个 w^*，使得 $w^* \in F(w^*)$，这正是我们所要证明的. ■

于是，对于 3 人博弈来说，我们假定纳什均衡存在，因而对于每个局中人来说，选择一个导致相对于其他人混合策略选择的最大期望值的混合策略，是有可能的.

虽然以前的证明仅涉及一个 3 人博弈，但我们需要卡库塔尼不动点定理的一般版本，以建立纳什均衡的存在性. 这是由于，它是局中人可能参与的总局数，而不是局中人的总数，前者确定了我们在其中考虑的空间的维数.

正如我们以前所指出过的，对于任意正整数 n，这些结论转化为 n 人博弈. 一般情况的证明，本质上与这里所提出的，用卡库塔尼不动点定理来建立纳什均衡存在性的证明相同.

例 10.12　这里我们考察一个经典的囚徒困境二人博弈的例子. 乔治和纽曼因为一桩罪行而被捕，其中每人因这项罪行而分别接受询问. 由于警方缺少足够的证据来定罪，乔治和纽曼每人只要举报对方，就被允诺处以最短的刑罚. 这样，乔治和纽曼彼此就可以保持沉默或举报对方.

如果乔治和纽曼都选择保持沉默，那么每人就为此项较轻的罪行接受 6 个月的刑罚. 如果他们同时都举报对方，那么由于他们协助了检察当局，每人就能减少 24 个月的刑罚. 如果一人举报而另一人却保持沉默，那么，举报者就接受 3 个月的刑罚，而保持沉默者就接受不折不扣的 72 个月的刑罚.

对于每个局中人来说，4 种可能的状况及所产生的结果，以收益矩阵的形式表示在图 10.11 中. 在此矩阵中，收益 $G_{i,j}$ 与 $N_{i,j}$ 分别表示乔治和纽曼在每一种状况所接受的刑罚（以月计）. 当然，此时每个人都希望自己的刑期最短.

不难证明，在此博弈中，仅有的纳什均衡对应于两个局中人总是举报对方.（见练习 10.28.）然而请注意，纳什均衡不产生此博弈的最佳的合作结局. 如果乔治和纽曼预

G	乔治 沉默	乔治 举报
纽曼 沉默	6	3
纽曼 举报	72	24

N	乔治 沉默	乔治 举报
纽曼 沉默	6	72
纽曼 举报	3	24

图 10.11　囚徒困境的收益矩阵

先约定保持沉默，他们就会取得比纳什均衡要好的结局. 然而，由于此博弈未能以合作的方式进行，对于每个局中人来说，当他们保持沉默，而存在其他局中人举报他们的威胁的话，就导致局中人从保持沉默转为均衡状态.

10.4 节练习

10.24 假定 $f: X \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数，(x_i) 收敛于 x_0，且 (y_i) 收敛于 y_0 证明：如果对于任一 i，$f(x_i) \geqslant f(y_i)$，那么 $f(x_0) \geqslant f(y_0)$.

10.25 证明：如果 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个凸集，而 B 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个凸集，那么，$A \times B$ 是 $\mathbf{R}^{n+m}$ 中的一个凸集.

10.26 已知最优混合策略集 $P(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ 满足（10.11）式，证明：$P(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ 是 $\mathbf{R}^{nE}$ 中的一个有界闭凸子集.

10.27 证明：在例 10. 11 中，如果当 $b+c<1$ 时有一个纳什均衡，那么 $a=b=c=0$.

10.28 证明：在例 10. 12 囚徒困境中仅有的纳什均衡，对应于两个局中人都举报对方.

10.29 伊莱恩、乔治和纽曼参与如例 10.9 中同样的餐馆博弈，但假设他们有如下的收益：

(1) 如果乔治同纽曼意见一致而不顾伊莱恩大声嚷嚷，那么他们就去乔治和纽曼所选择的餐馆，伊莱恩就要为他们支付 3 美元的咖啡费.

(2) 如果伊莱恩仅同乔治和纽曼二者之一的意见一致，那么他们就去意见一致的两人所选择的餐馆，第三者要为另两人分别支付 10 美元的餐费.

(3) 如果三人的意见都一致，那么他们就去大家一致同意的餐馆，而乔治和纽曼每人为伊莱恩支付 5 美元资助她的餐费.

请为上述各种博弈求出相应的纳什均衡.

10.30 在如例 10.9 中同样的餐馆博弈中，伊莱恩、乔治和纽曼可以在“幸运之星”中餐馆、“博博”汉堡店、“帕特”比萨店之间作选择. 假设当他们中的两人或三人意见一致的话，收益与例 10.9 中的博弈一样，而当他们三人全都拒绝在家就餐的话，就不需要支付.

(1) 如果三人全都采用混合策略向量$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，以大声喊叫来确定去哪一所餐馆，请问所得到的期望值是多少？

(2) 为上述博弈求出所有的纳什均衡.

第 11 章 嵌入

除了对拓扑空间进行研究之外，拓扑学的一个重要组成部分，是考虑如何能把这些拓扑空间放入对方的内部．这就使我们回忆起，在 4.2 节中，曾把一个拓扑空间 X 在另一个拓扑空间 Y 的嵌入，定义为从 X 到 Y 的一个子空间的同胚．以这样的方式，我们就把 X 的拷贝位于 Y 中的这一理念实现精确化．

在本章，我们探索拓扑学中一类重要的嵌入定理，在 11.1 节中，首先浏览许多有趣的嵌入问题和结论．在 11.2 节中，我们证明拓扑学中一个经典的定理——若尔当曲线定理．定理说，在平面一个被嵌入的圆周，把此平面分成两部分，每个部分以嵌入的圆周为它的边界．在 11.3 节中，我们介绍若尔当曲线定理的数字版本，我们还讨论它在数字图像处理中的一个应用．

11.1 嵌入的一些结论

本节我们考虑以下两个基本的嵌入问题：

(1) 已知拓扑空间 X 与 Y，X 在 Y 中的嵌入存在吗？

(2) 如果 X 在 Y 中的嵌入存在，我们对 X 位于 Y 中的嵌入的象能说些什么呢？

定义 11.1 *如果 $f: X \to Y$ 是空间 X 到空间 Y 中的一个嵌入，我们就称 X 在 Y 中是***可嵌入的***，或称在 Y 中***可嵌入 X***．此外，我们可以称 Y 为***嵌入空间***．并称象 $f(X)$ 为 X 的***嵌入象***．*

本书早先已介绍过与上述第一个问题有关的一个结论，但没有用嵌入的术语来表达．在 3.4 节中介绍克莱因瓶时，我们曾指出它在 3 维空间中不存在．也就是说，在 $\mathbf{R}^3$ 中没有克莱因瓶的嵌入．此结论对于射影平面同样是正确的．在本书中我们不推导用来证明这些非嵌入结论的工具，但是在本节，我们论述克莱因瓶在 $\mathbf{R}^4$ 中是可嵌入的，并且在练习 11.9 中，要你寻求在 $\mathbf{R}^4$ 中射影平面的一个嵌入．

首先，我们考虑圆周到拓扑空间的嵌入．请回忆，这一嵌入的象，称为一条简单闭曲线．由于 S^1 是紧致的，这就可得出，简单闭曲线是此嵌入空间的紧致子集．

在 $\mathbf{R}$ 中不存在简单闭曲线，在圆周 S^1 中仅有的简单闭曲线，是此圆周自身．（见练习 11.1.）

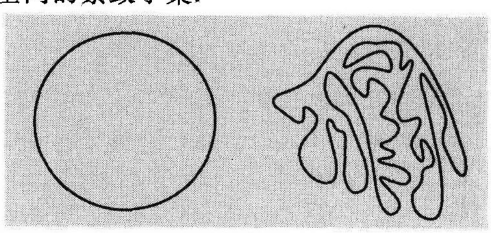


图 11.1 平面上简单闭曲线

对于简单闭曲线的嵌入空间，所需要的另一维是有意义的，所以让我们在平面上考虑简单闭曲线．它们可能是简洁明了的，如图 11.1 左边所示，也可能非常复杂，如图 11.1 右边所示，缠绕平面上的整个区

域. 但无论如何，平面上简单闭曲线有许多方面是共同的，正如若尔当曲线定理所论述的.

定理 11.2（若尔当曲线定理）　设 S 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一条简单闭曲线. 那么 $\mathbf{R}^2-S$ 由两个分支组成，而 S 是 $\mathbf{R}^2$ 中上述每一分支的边界.

1887 年 C. 若尔当（1838—1922）在他的著作《综合工科学校分析教程》首先提出了这一结论. 然而他所给出的证明是不正确的. 直到 18 年之后 O. 维布伦（1880—1960）在［Veb］中才给出了正确的证明. 下一节我们来证明若尔当曲线定理.

在平面上的简单闭曲线是紧致的，因而是有界且闭的. 由于它是有界的，它在平面中的补集有一个无界的部分.（见练习 6.19.）于是，由若尔当曲线定理可得出，平面上的一条简单闭曲线，有一个无界的部分和一个有界的部分.

定义 11.3　已知平面上的一条简单闭曲线 S，我们称 $\mathbf{R}^2-S$ 的有界分支为 S 的**内部**，而无界分支称为 S 的**外部**.

若尔当曲线定理的一个有趣的结论是，如果在平面上一条简单闭曲线 S 的补集中有两点，并从一点到另一点作一条直线 L，那么，如果 L 越过 S 偶数次，这些点就位于 S 的补集的同一分支；而如果 L 越过 S 奇数次，这些点就位于 S 的补集的不同分支.（见图 11.2.）

例 11.1　考虑在图 11.3 中的若尔当曲线动物园. 动物园管理员离狮子安全吗？从狮子到管理员画一条直线 L，我们可看到 L 越过笼子 5 次，因而狮子与管理员在此笼子相异的两侧. 如果我们考虑直线 L'，它从管理员通向此笼子外边已知的一点，我们看到 L' 与此笼子相交 3 次，因而我们可以得出结论，动物园管理员确实在此笼子的外边.

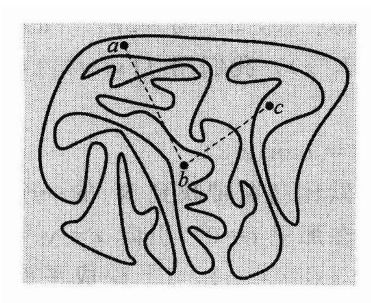


图 11.2　点 a 与 b 在 S 补集的同一分支；而 b 与 c 在 S 补集的不同分支

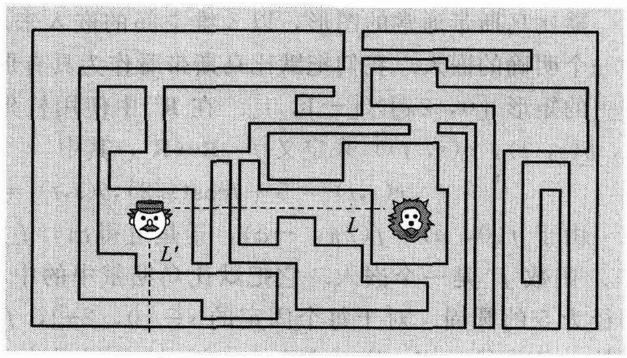


图 11.3　动物园管理员离狮子安全吗

对于平面上的简单闭曲线，我们可以得出比若尔当曲线定理更好的结论. 以下的定理指出，一条简单闭曲线不仅与 S^1 同胚，而且位于此平面的一条简单闭曲线的整个拓扑结构，与位于此平面的圆周 S^1 是拓扑等价的.

定理 11.4（舍恩弗利斯定理）　设 $f\colon S^1\to\mathbf{R}^2$ 是一个嵌入. 那么，存在一个同胚 $F\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，使得 $F|_{S^1}=f$.

这个定理以 1906 年首先提出它的数学家 A. 舍恩弗利斯（1853—1928）命名. 我们对此定理不作证明，它的证明可以在［Moi］中找到. 舍恩弗利斯定理说，圆周到平面的任一嵌入，延拓到全平面到自身的一个同胚.（见图 11.4.）这一同胚必定把平面中 S^1 的内部，映射

成简单闭曲线 $f(S^1)$ 的内部，而把 S^1 的外部映射成 $f(S^1)$ 的外部.（见练习 11.6.）因此，已知平面上的一条简单闭曲线 S，S 的内部与作为此平面的一个子空间的开球 $B=\{(x, y) \mid x^2+y^2<1\}$ 同胚，而 S 的外部与子空间 $C=\{(x, y) \mid x^2+y^2>1\}$ 同胚. 于是，舍恩弗利斯定理强化了若尔当曲线定理，（在拓扑上）确切地指出了，这两个分支，是用此简单闭曲线对这个平面进行分割的结果.

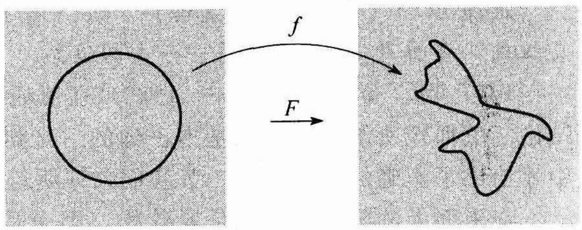


图 11.4　嵌入 f：$S^1\to\mathbf{R}^2$ 延拓到同胚 F：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$

如果我们让嵌入空间的维数增加 1，并观察 $\mathbf{R}^3$ 中的简单闭曲线，就会发现十分不同的情况. 正如 4.2 节所指出的，$\mathbf{R}^3$ 中的简单闭曲线称为纽结. 纽结的拓扑学上的可能性是无穷无尽的，而且是拓扑学中一个非常活跃的研究领域的对象. 在第 12 章，我们将对纽结作进一步的探索.

我们可以看到，通过考虑把 S^1 嵌入 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$，数学常常会显现令人欢呼的情景. 一方面，我们有一个意味深长的定理（舍恩弗利斯定理），它指出从 S^1 到 $\mathbf{R}^2$ 的所有嵌入，在本质上是相同的. 而在另一方面，从 S^1 到 $\mathbf{R}^3$ 的嵌入却是不同的，因此，确定这些嵌入所有可能性的任务演变成数学研究的一个重要领域.

接下来让我们考虑某些熟悉的曲面：环面、球面、克莱因瓶、射影平面及默比乌斯带. 球面和环面最初已被定义为 3 维空间的子空间，所以它们嵌入 3 维空间.

默比乌斯带通常的图形，以 3 维空间的嵌入来展示. 事实上，我们可以定义默比乌斯带的一个明确的嵌入. 我们把默比乌斯带看作为具有形如把一对点 $(0, a)$ 与 $(2\pi, -a)$ 视为同一的矩形 $[0, 2\pi]\times[-1, 1]$. 在 $\mathbf{R}^3$ 中使用柱坐标 (r, θ, z)，我们用 $f(s, t)=(r(s, t), \theta(s, t), z(s, t))$ 来定义 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$，其中

$$r(s,t) = 5 + t\cos(s/2), \theta(s,t) = s, z(s,t) = t\sin(s/2).$$

由于 $f(0, a)=f(2\pi, -a)$，于是可得出，f 定义了把默比乌斯带映到 $\mathbf{R}^3$ 的一个函数 f^*. 函数 f^* 是一个嵌入. 它把默比乌斯带中的中心圆周（在那里 $t=0$）引向 $x-y$ 平面上半径为 5 的圆周. 对于每个固定的 $s\in[0, 2\pi]$，f^* 把线段 $\{s\}\times[-1, 1]$ 映成平面 $\theta=s$ 上的一条线段. 当 s 从 0 变为 2π 时，这条线段大约旋转半圈，扫描出默比乌斯带的象来.（见练习 11.8.）

考虑克莱因瓶和射影平面. 正如我们以前所指出过的，它们都不能嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中. 然而，正是由于我们所支配的附加的一维（即我们考虑 $\mathbf{R}^4$），就可以定义嵌入了. 我们来说明对克莱因瓶如何定义嵌入，一种类似的方法可用于射影平面.（见练习 11.9.）

在 $\mathbf{R}^3$ 中克莱因瓶 K 的通常表示，可看为函数 f：$K\to\mathbf{R}^3$ 的象.（见图 11.5.）函数 f 不是一个嵌入，由于它不是一对一的自相交的结果. 我们称此为 K 的 $\mathbf{R}^3$ 的标准表示.

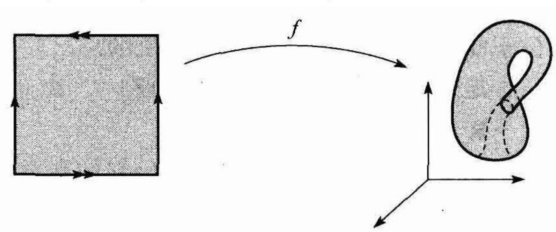


图 11.5　把克莱因瓶映入 $\mathbf{R}^3$ 中

在图 11.6 中，我们把克莱因瓶描述为它的对边视为同一的一个正方形．在这个描述中，我们已经说明过，由克莱因瓶的点组成的集合 D，其中自相交出现于 $\mathbf{R}^3$ 的标准表示之中（即在 K 中的点在那里未能一对一）．我们通过在此正方形的水平边选择 h 为常数，来定义一个连续函数 h：$K\to\mathbf{R}$，并让 h 从 0 增加到 1，然后当我们从此正方形的底部垂直移动到顶部时，再让 h 减为 0．思路是，当 x_1 与 x_2 在 D 中与 K 的 $\mathbf{R}^3$ 的标准表示中同一点相对应时，使得 $h(x_1)\neq h(x_2)$．函数 h 用作 K 嵌入 $\mathbf{R}^4$ 时的一个坐标．

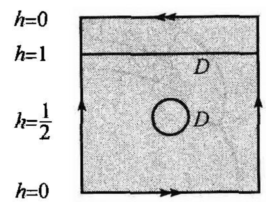


图 11.6　定义 h：$K\to\mathbf{R}$，用作 K 嵌入 $\mathbf{R}^4$ 时的一个坐标

通过让在 $\mathbf{R}^4$ 中 $F(x)$ 的前 3 个坐标等于 $f(x)$，而最后一个坐标等于 $h(x)$，来定义一个函数 F：$K\to\mathbf{R}^4$．在这种情况，F 是一对一的，这是由于如果 x 与 y 使得 $x\neq y$ 且 $f(x)=f(y)$，那么所定义的函数 h 就满足 $h(x)\neq h(y)$．因此对于任一 x，$y\in K$，如果 $x\neq y$，那么就有 $F(x)\neq F(y)$，于是得出函数 F 是 K 在 $\mathbf{R}^4$ 中的一个嵌入．

我们自然要问，是否存在若尔当曲线定理与舍恩弗利斯定理的高维模拟，例如，在 $\mathbf{R}^3$ 中任一嵌入的球面，是否能把 $\mathbf{R}^3$ 分成两个分支，以此球面为每一分支的边界（与若尔当曲线定理的情况一样）呢？而如果是，这两个分支是否拓扑等价于由此标准嵌入所得到的两个分支（与舍恩弗利斯定理的情况一样）呢？对于这两个问题中第一个问题的回答是肯定的，而第二个问题的回答是否定的．

首先，让我们给出肯定的答案．不仅把若尔当曲线定理推广到此球面在 $\mathbf{R}^3$ 中的嵌入，而且还推广到任意维的情况：

定理 11.5（若尔当-布劳威尔分离定理）　*设 S 是 S^n 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中一个嵌入的象．那么，$\mathbf{R}^{n+1}-S$ 由两个分支组成，而 S 是每一分支在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的边界．*

在 1912 年，布劳威尔证明了这个结论．由代数拓扑提供的适当的工具，可直接证明此定理．（例如，见 [Vic]．）一种不需要代数拓扑工具的证明可以在 [Drg] 中找到．

舍恩弗利斯定理是否能推广到高维的问题，直到 1924 年才得以解决．那时，J. W. 亚历山大（1888—1971）发现了一个反例，现在称为亚历山大角状球面．此例组成了嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中一个球面，使得此球面的外部与 $\mathbf{R}^3$ 中 S^2 的外部不同胚．

亚历山大角状球面是图 11.7 所示的嵌入球面 A．在这个图所示的两个主要的角之间存在一个错综复杂的细节，我们过一会儿再作进一步的描述和说明．在图 11.7 中的环 L，位于 A 的外部，但不能变形为 A 外部的一个点（我们过一会儿再讨论为什么如此．）．因此，A 的外部不是单连通的．在另一方面，S^2 的外部同胚于 $\mathbf{R}^3-\{O\}$，而由定理 9.20，后者却是单连通的．于是，S^2 到亚历山大角状球面的嵌入，不能延拓为 $\mathbf{R}^3$ 到自身的一个嵌入．于是，当维数为 3 时，舍恩弗利斯定理不再成立．

为了构建亚历山大角状球面，首先我们用一个球面，并拉伸出如图 11.8 的左边所示的两个角．然后，在构建的第二步，在前两个已拉伸出的角的端口之间的空隙，如图 11.8 的右边所示，拉伸出一对有孔的角．结果仍然是一个嵌入的球面，由于每个角的端口之间存在一个空隙，而它们仍未合上．

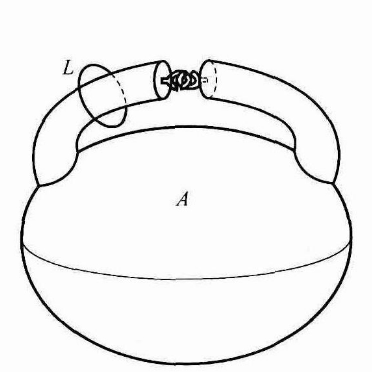


图 11.7 亚历山大角状球面

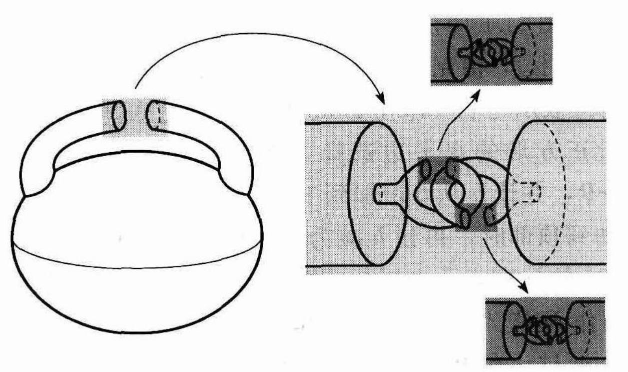


图 11.8 拉伸出亚历山大角状球面的角

我们继续上述构建过程，正如图 11.8 的右边所示，在每一步，在前一步所形成的每对角的端口之间的空隙，我们再拉伸出两个更小的有孔的角．在第 n 步完成时，我们就有 2^{n-1} 个空隙，因而在下一步，我们拉伸出 2^n 个有孔的角．对任意 $n\in\mathbf{Z}^+$ 完成这一过程，结果就是亚历山大角状球面．

那么，为什么图 11.7 中的环 L 不能变形为 A 外部的一个点呢？粗略地说思路如下：如果我们能把 L 变形为一个点，那么就有一个把圆盘 D 映成 A 的外部的连续函数 F，当把它限制在它的边界 S^1 时，就是圆周到 L 上的一个嵌入．这一函数需要让此圆盘的象，在 A 中有孔的角之间通过．由于 D 是紧致的，$F(D)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个紧致子集．而 $F(D)$ 与 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致集 A 是相分离的．由定理 7.25，在 $\mathbf{R}^3$ 中的这两个分离紧致集之间，必定有一个正距离，譬如说是 ε．在构建 A 时，这些孔最终成为点，在那里，它们之间的空隙小于 ε，因而 F 的象，不能达到这些空隙，而通过这些有孔的角．

11.1 节练习

11.1 (1) 证明：不存在嵌入 $f: S^1\to\mathbf{R}$.

(2) 证明：一个嵌入 $f: S^1\to S^1$ 必定是满射，因而必定是一个同胚．

11.2 证明：可嵌入一个特定的空间是一个拓扑不变量．特别地，证明：如果 Y 是一个拓扑空间，而 X 与 X' 是同胚的，那么当且仅当 X' 嵌入 Y 时，X 嵌入 Y.

11.3 (1) 用舍恩弗利斯定理证明：在球面中任一简单闭曲线，把球面分为两个分支，其中每个分支都与一个开圆盘同胚．

(2) 在每个环面、克莱因瓶和射影平面上画出两条简单闭曲线，一条分割此空间，另一条不分割．

11.4 对嵌入 $f: S^0\to\mathbf{R}$ 证明舍恩弗利斯定理．即证明：如果 $f: S^0\to\mathbf{R}$ 是一个嵌入，那么 f 延拓为一个同胚 $F: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

11.5 嵌入 $f: S^1\to\mathbf{R}^2$ 称为**星形嵌入**，如果在 $f(S^1)$ 的内部存在一个点 p 和一个连续函数 $r: S^1\to(0,\infty)$，使得采用以 p 为中心的极坐标，f 就可表示为 $f(\theta)=(r(\theta),\theta)$.（见图 11.9.）请对星形嵌入证明舍恩弗利斯定理．

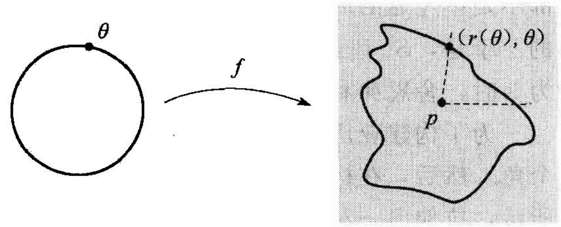


图 11.9 星形嵌入

11.6 证明：如果 $f: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是一个同胚，那么 f 把

S^1 的内部映到简单闭曲线 $f(S^1)$ 的内部，而把 S^1 的外部映到 $f(S^1)$ 的外部.

11.7 证明：舍恩弗利斯定理蕴涵：如果 $f: D\to\mathbf{R}^2$ 是一个同胚，那么 $\mathbf{R}^2-f(D)$ 是连通的.（因此平面不存在与分隔它的一个圆盘同胚的子空间.）

11.8 请图示由本节描述的函数 f^* 所给出的 $\mathbf{R}^3$ 中默比乌斯带的嵌入. 特别地，请说明当 θ 从 0 变为 2π 时，在具有固定角 θ 的柱坐标平面上，f^* 的象如何出现.

11.9 请描述射影平面如何能嵌入 $\mathbf{R}^4$ 中.

11.2 若尔当曲线定理

本节我们来证明若尔当曲线定理. 这个在直观上显而易见的结论，却不可思议地难以证明. 自从这个定理在 1905 年被维布伦证明以来，在整个上一世纪，涌现出采用各种不同途径的许多证明. 若尔当曲线定理可以说是拓扑学中最难证明的定理了. 我们所提出的证明方法，是使用 2 维非收缩定理和布劳威尔不动点定理（正如在 10.1 节中所证明的，它们是等价的定理.）此外还使用了定理 9.14，它断言了从圆盘到子空间保核收缩的存在性. 我们的证明来自 [Mae] 中的证明.

在证明若尔当曲线定理的同时，我们还给出了指明在平面上不存在分隔它的弧的非分离定理（定理 11.10）. 在建立若尔当曲线定理的过程中，这个结论基本上已被证明.

在证明若尔当曲线定理之前，我们给出在证明中所需要的几个结论.

首先给出一个定理，这个定理说，如果我们有一个矩形，和一条从左边到右边的道路以及一条从底部到顶部的道路，那么，这些道路必定有一个公共点. 为证明上述这个结论，要使用 2 维布劳威尔不动点定理.

我们预先把拓扑空间 X 中的一条道路，定义为一个连续函数 $f: [0, 1]\to X$. 在此为了方便起见，我们认为，这些道路存在定义域 $[-1, 1]$ 而不是 $[0, 1]$. 这不会引起麻烦，由于空间 $[0, 1]$ 与 $[-1, 1]$ 是同胚的. 同以前一样，我们也使用道路这个术语，它的含义是，函数的象是道路.

考虑矩形 $R=[-1, 1]\times[-1, 1]$. 设 B 是作为平面的一个子集的 R 的边界，于是，$B=\{(s, t)\in R \mid |s|=1 \text{ 或 } |t|=1\}$.

定理 11.6 *设 u, v: $[-1, 1]\to R$ 是 R 中使得 $u(-1)=(-1, 0)$, $u(1)=(1, 0)$, $v(0)=(0, -1)$ 及 $v(1)=(0, 1)$ 成立的道路. 那么，存在 $s, t\in[-1, 1]$，使得 $u(s)=v(t)$.（见图 11.10.）*

证明 假定这样的 s, t 不存在，因而对于任一 $s, t\in[-1, 1]$，就有 $u(s)\neq v(t)$. $u(s)$ 与 $v(t)$ 用它们的坐标来表示，我们就有 $u(s)=(u_1(s), u_2(s))$ 与 $v(t)=(v_1(t), v_2(t))$. 对于任一 $s, t\in[-1, 1]$，我们定义

$$M(s,t) = \max\{|u_1(s)-v_1(t)|, |u_2(s)-v_2(t)|\}.$$

注意对于任一 s, t, $M(s, t)>0$.

然后，用 $F(s, t)=\left(\dfrac{v_1(t)-u_1(s)}{M(s, t)}, \dfrac{u_2(s)-v_2(t)}{M(s, t)}\right)$ 来定义 $F: R\to R$.

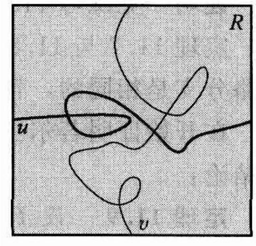


图 11.10　在 R 中的道路 u 与 v 必相交

函数 F 是连续的，而 R 与圆盘是同胚的；因此，由布劳威尔不

动点定理可得，F 必定有一个不动点 $(s^*, t^*)\in R$. 注意到对于任一 s, $t\in[-1,1]$,

$$\left|\frac{v_1(t)-u_1(s)}{M(s,t)}\right| = 1 \text{ 或 } \left|\frac{u_2(s)-v_2(t)}{M(s,t)}\right| = 1.$$

因此，F 的象是矩形 R 边界 B 的一个子集. 于是，不动点 (s^*, t^*) 必定位于 B 中. 我们需要考虑以下四种可能的情况：$s^*=-1$, $s^*=1$, $t^*=-1$ 及 $t^*=1$. 我们断言，这四种情况每一种都导致矛盾，因而必存在 s, $t\in[-1,1]$ 使得 $u(s)=v(t)$. 以下我们在 $s^*=-1$ 的情况导出矛盾，其余的情况在练习 11.12 中给出.

于是，设 $s^*=-1$. 那么 $\frac{v_1(t^*)-u_1(s^*)}{M(s^*, t^*)}=-1$. 但是

$$(u_1(s^*), u_2(s^*)) = u(s^*) = u(-1) = (-1, 0),$$

因而 $u_1(s^*)=-1$. 这意味着 $\frac{v_1(t^*)-u_1(s^*)}{M(s^*, t^*)}\geqslant 0$，它就是一个矛盾. ■

定理 11.7 设 U 是平面的一个开子集. 当且仅当 U 是道路连通的，那么 U 是连通的.

证明 由定理 6.28，道路连通性蕴涵连通性. 因此我们只需要证明如果 U 是连通的，那么它是道路连通的就可以了. 为此，设 U 是连通的. 如果 U 是空集，那么结论自然成立；于是设 U 非空，并取一个点 $p\in U$. 设 Y_p 是 U 中使得在其中存在从 p 到 q 的一条道路的点 q 的集合，并设 N_p 是 U 中使得在其中不存在从 p 到 q 的道路的点 q 的集合. 集合 Y_p 与 N_p 是分离的，且它们的并集是 U.

我们断言，Y_p 与 N_p 都是开集. 为了证明此断言，我们证明 Y_p 是开集，N_p 是开集的证明是类似的. 设 $q\in Y_p$，那么在 U 中存在一条从 p 到 q 的道路 f. 由于 U 是开集，就可得出，按照 $\mathbf{R}^2$ 中的标准度量，存在一个以 q 为中心且包含于 U 中的开球 B. 取一个点 $q'\in B$，在 B 中存在一条从 q 到 q' 的道路. 定义一条道路 h，让它跟随从 p 到 q 的 f，接下来再沿着从 q 到 q' 的 g. 道路 h 是 U 中一条从 p 到 q' 的道路. 因此，在 B 中任一 q' 亦在 Y_p 之中. 于是得出 Y_p 是开集.

Y_p 与 N_p 是分离开集，它的并是 U. 如果 Y_p 与 N_p 都是非空集，那么它们构成 U 的一个分隔，这是不可能的，由于 U 是连通的. 因此 Y_p 或 N_p 二者之一是空集. 由于 $p\in Y_p$，因此在二者中，必定是 N_p 为空集. 这就蕴涵 $U=Y_p$，因而在 U 中存在一条从 p 到 U 中任一其他点的道路. 因此，U 是道路连通的. ■

定理 11.8 设 U 是平面的一个开子集. 那么，U 的分支是此平面的开子集.

证明 见练习 11.10. ■

定理 11.7 与 11.8 相结合就得到结论：如果 U 是平面的一个开子集，那么，U 的分支和道路分支是相同的，且是此平面的开子集.

在开始证明若尔当曲线定理之前，我们所需要的最后一个定理，是 2 维非收缩定理的以下结论：

定理 11.9 设 D 是平面上的圆盘. 如果 f: $D\to D$ 是连续的，且对于任一 $x\in S^1$，$f(x)=x$，那么 f 是满射.

证明 见练习 11.11. ■

定理 11.9 指出，如果 f 是一个把圆盘映射成自身的连续函数，且在它的边界——圆周 S^1 上是恒等的——那么 f 必定映到此圆盘上.

到此我们已作好证明若尔当曲线定理的准备，此定理说，如果 S 是此平面的一条简单闭曲线，那么 $\mathbf{R}^2-S$ 有两个分支，且 S 是每个分支的边界.

我们分三个部分来证明这个定理：首先，我们证明 $\mathbf{R}^2-S$ 不是连通的，然后，再来证明 S 是 $\mathbf{R}^2-S$ 每个分支的边界，最后证明 $\mathbf{R}^2-S$ 有两个分支. 证明中的许多直截了当的验证在练习中给出.

证明($\mathbf{R}^2-S$ 不是连通的) 设函数 $d(x, y): S\times S\to\mathbf{R}$ 是按平面上标准度量来定义的 x 与 y 之间的距离. d 的定义域是紧致的，且 d 是连续的，因此 d 在 $S\times S$ 上取一个最大值. 于是可得出，在 S 中至少存在相隔最大距离的一对点 s_1 与 s_2. 设 J 是在此平面上连接 s_1 与 s_2 的线段，并设 P_1 与 P_2 是分别通过 s_1 与 s_2，且与 J 相垂直的直线. (见图 11.11.) 点 s_1 与 s_2 是 S 位于 $P_1\cup P_2$ 上仅有的两个点，而 S 上的其余点都位于 P_1 与 P_2 之间. (见练习 11.13.) 由于 S 是紧致的，因而是有界的，所以存在直线 J_1 与 J_2，与 J 平行且等距，使得$S-\{s_1, s_2\}$ 位于由 P_1，P_2，J_1 与 J_2 所围成的有界矩形 R'的内部.

通过旋转、移动和缩放，我们就可以得到平面自身的一个同胚 h，它把 R'映射为 $R=[-1, 1]\times[-1, 1]$，且把 s_1 与 s_2 分别映成 $(-1, 0)$ 与 $(1, 0)$. (见图 11.12.) 于是只要假定 S 位于矩形 R 中，且 S 与 R 的边界仅在点 $s_1=(-1, 0)$ 与 $s_2=(1, 0)$ 相交就可以了.

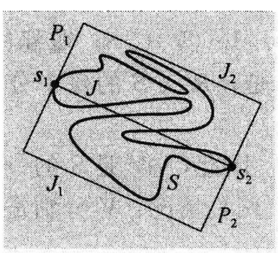


图 11.11　简单闭曲线 S 位于由 P_1，P_2，J_1 与 J_2 所围成的矩形之中

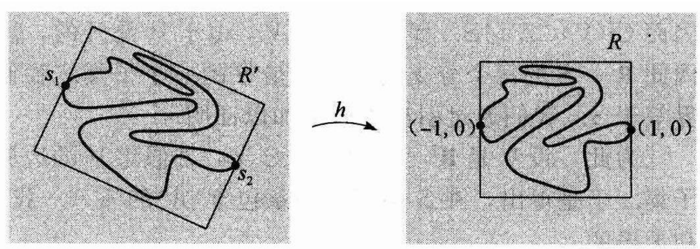


图 11.12　矩形 R'同胚地映射到 $[-1, 1]\times[-1, 1]$

这样在 R 中，S 构成两条从 $s_1=(-1, 0)$ 到 $s_2=(1, 0)$ 的弧. 我们把这两条弧分别记为 S'与 S''. 考虑在 R 中连接 $a=(0, -1)$ 到 $b=(0, 1)$ 的垂直线段 L. 由定理 11.6，我们就可得出结论，L 同 S'与 S''都相交. 不失一般性，我们可以假定沿着 L 从 a 移动到 b，L 在与 S''相交之前就已经与 S'相交. 设 a'是当我们沿 L 从 a 移动到 b 时 L 与 S'的第一个交点，而设 b'是最后一个交点. (见图 11.13.)

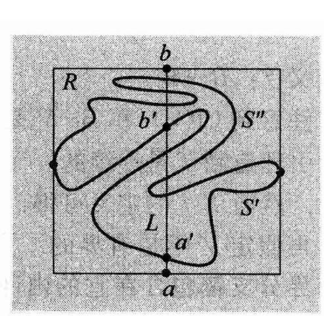


图 11.13　当沿 L 从 a 移动到 b 时，点 a'与 b'分别是同 S'的第一个与最后一个交点

我们断言 L 与 S''在 b'与 b 之间相交. 否则我们就沿着 L 取一条先从 a 移动到 a'，再沿着 S'从 a'到 b'，最后沿着 L 从 b'到 b 的道路，记为 $aLa'S'b'Lb$，这条道路在 R 中从 a 移动到 b 时可能与 S''不相交. (见练习 11.14.) 但由定理

11.6，这是不可能的. 因此 L 与 S'' 在 b' 与 b 之间相交. 然后正如我们沿着 L 从 b' 移动到 b 一样，设 a'' 是 L 与 S'' 的第一个交点，而设 b'' 是最后一个交点.

考虑点 c 位于 L 上 b' 与 a'' 之间的中点. 于是得出 c 既不位于 S' 上，也不位于 S'' 上，因此 c 在 $\mathbf{R}^2$ 中位于 S 的分支之中. 设 U 是包含 c 的 $\mathbf{R}^2-S$ 的分支，我们断言 U 是有界的.

为了证明 U 是有界的，采用归谬证法，假设它不是有界的. 由定理 11.7 和 11.8，U 是道路连通的，而由于 U 是无界的，所以在 U 中，我们可以找到一条从 c 到 R 外部的道路 P. 设 p' 是在 P 上，它与 R 的边界相交的第一个点，点 p' 既在 R 边界的下半部，又在 R 边界的上半部. 假设 p' 在 R 边界的下半部. 设 Q 是在 R 的边界上从 a 移动到 p' 的一条道路. 借助与以上同样的记法上的方便，道路 $aQp'cLb$ 从 R 的下部到上部，且与 S' 不相交（见练习 11.14），这就与定理 11.6 矛盾. 再假设 p' 在 R 边界的上半部. 设 Q' 是在 R 的边界上从 p' 移动到 b 的一条道路，那么道路 $aLa'S'b'LcPp'Q'b$ 从 R 的下部到上部，且与 S'' 不相交.（见练习 11.14.）这也与定理 11.6 产生矛盾. 于是无论在哪种情况—p' 在 R 边界的下半部，还是 p' 在 R 边界的上半部—我们都导出了矛盾，因而 U 是有界的.

由于 S 是此平面的一个有界子集，由此可得 $\mathbf{R}^2-S$ 有一个无界的分支. 因此，$\mathbf{R}^2-S$ 至少有两个分支，一个有界，一个无界，这蕴涵 $\mathbf{R}^2-S$ 不是连通的. ■

在若尔当曲线定理证明的以下这一部分，我们来证明 S 是 $\mathbf{R}^2-S$ 每个分支的边界.

证明(S 是 $\mathbf{R}^2-S$ 每个分支的边界) 首先注意到，定理 11.8 蕴涵，$\mathbf{R}^2-S$ 的每个分支是一个开集. 设 V 是这样一个分支. 由于 $\mathbf{R}^2-S$ 的其他分支都是开集，于是得出 $V\cup S$ 是闭的，因而 $\mathrm{Cl}(V)\subset V\cup S$. 而 $\mathrm{Int}(V)=V$，由于 V 是开的，因而 $\mathrm{Cl}(V)-\mathrm{Int}(V)\subset S$，蕴涵 $\partial V\subset S$. 因此 $\mathbf{R}^2-S$ 的每个分支的边界，是 S 的一个子集. 我们要证明的是，$\mathbf{R}^2-S$ 的每个分支的边界等于 S. 我们通过引出矛盾来加以证明.

为此，设 V 是 $\mathbf{R}^2-S$ 的一个分支，并假定 V 的边界不等于 S. 因此，∂V 是 S 的一个闭真子集. 于是得出，在 S 中存在一条包含 ∂V 的弧 A. 我们考虑以下两种情况：V 分别是有界的和无界的.

首先假定 V 是有界的. 设 B 是在此平面中的，一个大得足以把 $V\cup S$ 包含在它的内部的闭球. 由定理 9.14，存在一个收缩 $r: B\to A$. 由

$$f(x)=\begin{cases} r(x) & 若\ x\in \mathrm{Cl}(V), \\ x & 若\ x\in B-V \end{cases}$$

来定义 $f: B\to B$.

注意到 $\mathrm{Cl}(V)$ 和 $B-V$ 是 B 的闭子集. 此外 $\mathrm{Cl}(V)\cap(B-V)\subset A$，且对于 $x\in A$，$r(x)=x$. 粘合引理蕴涵 f 是连续的. 而当限制在 B 的边界圆周上时，f 等于 1. 因此定理 11.9 蕴涵 f 是满射. 然而从 f 的定义可得，在 f 的象中没有 V 中的点，于是就出现了一个矛盾.

再假定 V 不是有界的. 设 B 是在此平面中的，一个大得足以把简单闭曲线及 $\mathbf{R}^2-S$ 的所有有界分支都包含在它的内部的闭球. 由这个证明的第一部分可知，至少存在 $\mathbf{R}^2-S$ 的一个有界分支，把它记为 U. 而由定理 9. 14，存在一个收缩 $r: B\to A$. 由

$$g(x)=\begin{cases} x & 若\ x\in \mathrm{Cl}(V)\cap B, \\ r(x) & 若\ x\in B-V \end{cases}$$

来定义 $g: B\to B$.

函数 g 是连续的，而且当限制在 B 的边界圆上时，g 等于 1. 定理 11.9 蕴涵 g 是满射. 然而从 g 的定义可得，在 g 的象中没有 U 中的点. 因此在这种情况下同样出现一个矛盾.

因此 S 是 $\mathbf{R}^2-S$ 每个分支的边界. ■

在若尔当曲线定理证明的以下最后一部分，我们来证明 $\mathbf{R}^2-S$ 有两个分支. 以下，我们仍然使用证明的第一部分中所用的同样的步骤和记号.

证明($\mathbf{R}^2-S$ 有两个分支) 设 U 是 $\mathbf{R}^2-S$ 的有界分支，它的存在性已在证明的第一部分确认. 假定存在另一个有界分支 W，我们来推出一个矛盾，从而得出 $\mathbf{R}^2-S$ 有一个有界分支的结论. 由于 $\mathbf{R}^2-S$ 还有一个无界分支，于是就得出 $\mathbf{R}^2-S$ 有两个分支的结论.

考虑在 R 中由 $aLa'S'b'L\,a''S''b''Lb$ 给出的弧 A. 它从 R 的下部移动到上部，且与 W 是分离的. (见练习 11.15.) 点 $s_1=(-1,\ 0)$ 与 $s_2=(1,\ 0)$ 不在 A 之中. 由于 A 是闭的，在此平面中，存在中心分别在 s_1 与 s_2，且与 A 分离的开球 B_1 与 B_2. 由证明的第二部分可知，点 s_1 与 s_2 位于 W 的边界. 因此，在 $B_1\cap W$ 与 $B_2\cap W$ 中分别存在点 w_1 与 w_2. 设 M 是 B_1 中的一条从 s_1 到 w_1 的道路，设 M'是 W 中的一条从 w_1 到 w_2 的道路，设 M''是 B_2 中的一条从 w_2 到 s_2 的道路. 那么道路 $s_1Mw_1M'M''s_2$ 是 R 中的一条从 s_1 到 s_2 且与 A 不相交的道路. 这就与定理 11.6 相矛盾. 因此，在 $\mathbf{R}^2-S$ 中只有一个有界分支，因而若尔当曲线定理证明得以完成. ■

以下是一个与若尔当曲线定理紧密联系的非分隔定理. 我们要求你在练习 11.16 中加以证明.

定理 11.10 *设 A 是平面上一段弧，那么 $\mathbf{R}^2-A$ 是连通的，且 A 是 $\mathbf{R}^2-A$ 的边界.*

证明 见练习 11.16. ■

11.2 节练习

11.10 **证明定理 11.8**：设 U 是平面的一个开子集. 那么，U 的分支是此平面的开子集.

11.11 **证明定理 11.9**：设 D 是平面上的圆盘. 如果 $f: D\to D$ 是连续的，且对于任一 $x\in S^1$，$f(x)=x$，那么 f 是满射. (提示：用非收缩定理.)

11.12 在定理 11.6 的证明中，请说明对函数 F 不动点 $(s^*,\ t^*)$ 坐标的每种情况 $s^*=1$，$t^*=-1$ 及 $t^*=1$，你是如何推出矛盾的.

11.13 请为若尔当曲线定理证明 $\mathbf{R}^2-S$ 不是连通的那个部分，提供以下断言的论证：点 s_1 与 s_2 是 S 位于 $P_1\cup P_2$ 上仅有的两个点，而 S 上的其余点位于 P_1 与 P_2 之间.

11.14 请为若尔当曲线定理证明 $\mathbf{R}^2-S$ 不是连通的那部分，提供以下断言的论证：

(1) L 与 b' 和 b 之间的 S''不相交，道路 $aLa'S'b'Lb$ 与 S''不相交.

(2) 道路 $aQp'pcLb$ 与 S'不相交.

(3) 道路 $aLa'S'b'LcPp'Q'b$ 与 S''不相交.

11.15 请为若尔当曲线定理证明 $\mathbf{R}^2-S$ 有两个分支的那部分，提供以下断言的论证：弧 $aLa'S'b'La''S''b''Lb$ 与 W 是分离的.

11.16 **证明定理 11.10**：设 A 是平面上的一段弧. 那么 $\mathbf{R}^2-A$ 是连通的，且 A 是 $\mathbf{R}^2-A$ 的边界. 分以下三个部分来进行证明：

(1) 证明：如果 C 是拓扑空间 X 的一个闭子集，那么，C 的补集的边界是 C 的一个子集. 由此证明 $\partial(\mathbf{R}^2-A)\subset A$.

(2) 证明：$\mathbf{R}^2-A$ 是连通的.（提示：所用的论证，与若尔当曲线定理证明 S 是 $\mathbf{R}^2-S$ 每个分支的边界的论证相类似.）

(3) 证明：$A\subset\partial(\mathbf{R}^2-A)$.（提示：假定 A 不是 $\partial(\mathbf{R}^2-A)$ 的一个子集，并论证在 A 中为什么必定有一个点，具有与 $\mathbf{R}^2-A$ 相分离的一个开球邻域，然后解释这为什么是不可能的.）

11.3　数字拓扑和数字图像处理

数字图像已经成为交换可视信息的一种基本手段. 数字照相机的照片、本书中的图表、电子计算器屏幕的图形，及在球场记分板上的显示屏，都是以数字化方式构建或提供图像的例子. 数字图像处理这一领域，涉及数字图像的构建、存储、处理和提供. 在数字图像处理的每一个方面，存在涉及拓扑概念和工具的许多问题和课题. 例如，

(1) 在构建数字图像时，如何能确保现实世界特征之间的空间关系在它们的数字化表示中准确地加以描述?

(2) 在存储数字图像时，对图像结构的特征，是否允许有比每个个别像素更有效的方法?

(3) 在以数字化方式来变换图像时，图像的拓扑格局如何能得以保持?

在本节，我们考虑问题 (2)，并为数字图像提出一种有效存储过程给出拓扑结论. 这些结论包括数字版本的若尔当曲线定理. 我们以下所介绍的内容，根据来自 [Kha3] 的结论.

本节的拓扑平台是数字平面，即由两个数字轴取乘积而得到的一个空间. 在 1.4 节中，我们曾经介绍过数字平面，在那里借助集合的基

$$B(m,n)=\begin{cases}\{m,n\} & \text{若 } m,n \text{ 均为奇数}\\ \{(m+a,n)\mid a=-1,0,1\} & \text{若 } m \text{ 为偶数},n \text{ 为奇数}\\ \{(m,n+b)\mid b=-1,0,1\} & \text{若 } m \text{ 为奇数},n \text{ 为偶数}\\ \{(m+a,n+b)\mid a,b=-1,0,1\} & \text{若 } m,n \text{ 均为偶数}\end{cases}$$

我们以前曾指出，它是定义在 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 上的拓扑空间.

我们把数字平面记为 $\mathbf{Z}^2$. 对于 $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$，我们称 $B(m,n)$ 为包含 (m,n) 的**最小基元素**. 我们对图 11.14 中的某些基元素作些说明. 在说明时，对在数字平面中每种同类型的点，使用不同的符号. m，n 均为奇数时，形如 (m,n) 的点称为**开点**，我们把它们记为○. 每个这样的点是此数字平面中的单点开集. 当 m，n 均为偶数时，点 (m,n) 称为**闭点**，我们把闭点记为✱，用来反映点✱的最小基元素在它周围包含 8 个点这一事实. 坐标一奇一偶的点 (m,n) 称为**混合点**，我们把混合点记为⧫或◆，用⧫反映点⧫的最小基元素包含它正上方和正下方的一些点这一事实. 类似的情况，对记为◆的点也成立.

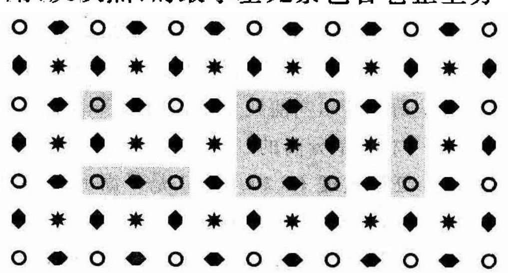


图 11.14　数字平面的基元素

数字平面也可以作为具有标准拓扑的 $\mathbf{R}^2$ 的商空间而得到.（见练习 3.32.）因此由于平面是道路连通的，而数字平面是在对应的商映射下平面的连续象，于是可得出，数字平面是道路连通的. 事实上，给定在此数字平面上的两个点，我们可以如图 11.15

所示，定义一条道路 f：[0，1] $\to \mathbf{Z}^2$，以追踪从一点到另一点沿着铅直、水平或二者兼有的方向运动的踪迹.（见练习 11.17.）

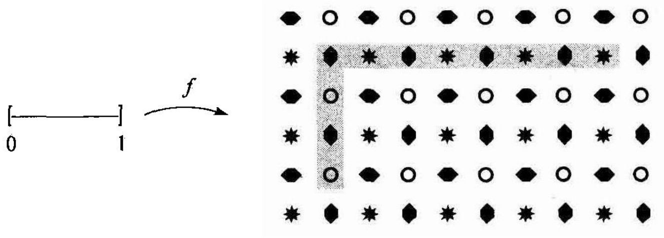


图 11.15　在数字平面给出两个点，它们之间存在一条道路

数字平面的子空间，由所有被称为**可见屏**的开点所组成，我们把它记为 **V**. 在我们的数字图像处理模型中，可见屏对应于在数字图像显示中像素的集合. 即它对应于我们在一个数字图像上确实所看到之物. 可见屏是此数字平面的稠密且为开的子集，且它作为一个子空间，传承了离散拓扑. 由于同时包含闭点和混合点，于是提供了一种可视结构，它把一些像素相连，并在建模和研究数字图像的性质时，允许使用拓扑概念和结论.

以数字平面作为我们模型的平台，让我们考虑前面已提过的存储问题. 在图 11.16 中，涂上灰色的部分，我们用来表示在可见屏中封入 1×1，3×3，5×5 像素阵列的数字平面中的点的集合.

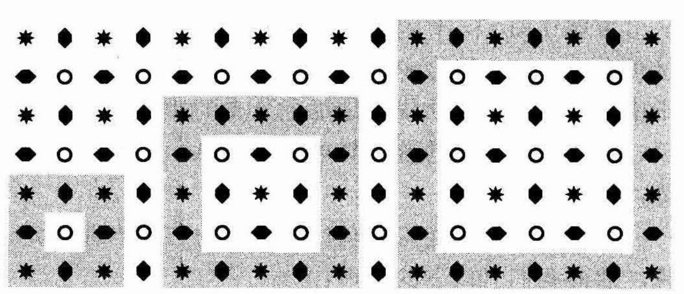


图 11.16　封入像素阵列的数字平面上点的集合

在图 11.16 中周围的集合，分别由 8，16，24 个点所组成. 通常可以证明，开点的 $n\times n$ 阵列可以被此数字平面中的周围 $8n$ 个点的集合封在其中.（见练习 11.23.）因此，如果要存储规模为 1000×1000 像素的蓝色方形区域的数字图像，那么，既可以存储 100 万个蓝色像素之中每一个的位置，也可以在此数字平面中存储 8000 个周围点的位置，以表示在可见屏中对应的被封入的点是带蓝色的. 显然，用周围点集而不是整个被封入的集合来操作，是一种节省存储量的方法.

那么，当转为考虑更一般的数字图像时，这种原理被推广为什么呢？我们把一张数字图片建模为一族区域，使得在每个区域中，每个点有同样的颜色. 我们很想知道，我们是否能用周围的点集取代这些区域，而仍能唯一确定这些区域. 按照这种方式，我们能通过仅仅存储周围的点集和颜色的信息，而缩小存储一张图片所需要的空间. 由于此图片的区域，由周围的一些集合唯一确定，我们就能从所存储的信息来重建此图片. 本节的其余部分，介绍数字拓扑的某些结论，有助于回答这个问题.

在图 11.16 中，周围集合中的每一个集合，作为此数字平面的一个子空间，都传承了一种拓扑，正如在 3.3 节中所介绍过的，容易看出，每个这样的子空间都是一个数字圆. 对于偶整数 $n\geqslant 4$，数字圆已被定义. 它们由下列方式得到：取数字轴的子空间 $\{1, \cdots, n+1\}$，再把端点 1 与 $n+1$ 粘合在一起. 在图 11.17 中，我们表示出了数字圆 C_4，C_6 与 C_8，以及它们的基.

定义 11.11　设 X 是一个拓扑空间. X 中的一条**数字简单闭曲线**，是 X 的与一个数字圆同胚的子空间.

例 11.2 图 11.18 中的 4 点集合 A，是一条数字简单闭曲线，但 4 点集合 B 却不是. B 传承自数字平面的子空间拓扑，是离散拓扑.

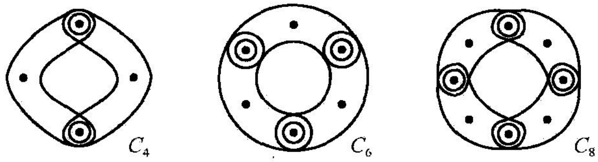


图 11.17 数字圆 C_4，C_6 与 C_8

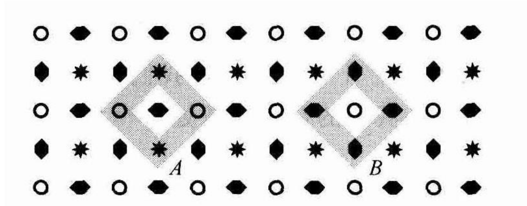


图 11.18 集合 A 是一条数字简单闭曲线，但 B 不是

若尔当曲线定理指出，每条简单闭曲线把平面 $\mathbf{R}^2$ 分为两个分支，其中每个分支以此简单闭曲线为它的边界. 因此，在平面上一条简单闭曲线 S，确定了两个被 S 所围的区域，而这两个区域都确定了 S，由于 S 可由对每个区域取边界而得到. 我们在此数字平面上所寻求的区域和周围的点集，就是这种类型的. 在数字平面上存在数字简单闭曲线相应的若尔当曲线定理吗？一会儿我们就会看到，回答是肯定的，但存在镜像上的差别.

考虑在图 11.16 中的 3 条数字简单闭曲线，以及在图 11.18 中的一条数字简单闭曲线，直接可看出，这些集合中都把此数字平面分为两个连通的子集. 此外，在图 11.16 中的 3 个例子中，数字简单闭曲线，是每个分支的边界，这种分支是分隔此数字平面而得到的集合. 相反，在图 11.18 中的数字简单闭曲线 A，不是此数字平面上它的补集的每个分支的边界.（见练习 11.18.）

于是，我们不能得到与标准版本的若尔当曲线定理完全对应的数字版本的若尔当曲线定理. 然而我们有以下的定理：

定理 11.12（数字若尔当曲线定理） 设 A 是在数字平面上的一条数字简单闭曲线，那么 A 把此数字平面分为两个分支. 此外，当且仅当 A 是此数字平面的一个闭子集，A 是每个分支的边界.

我们不给出定理 11.12 的证明，尽管用本书中迄今为止所提出过的工具和概念，这是不难办到的. 对这条数字简单闭曲线上点的个数，采用数学归纳法的证明方法，在 [Kis] 中给出. 这一归纳法证明的第一步，是提出 4 点数字简单闭曲线，随后的情况，是以下定理的结论：

定理 11.13 每条由 $(m-1, n)$，$(m+1, n)$，$(m, n-1)$ 与 $(m, n+1)$ 所组成的 4 点数字简单闭曲线，其中两个点是开点，另两个点是闭点.

证明 设 A 是 4 点数字简单闭曲线，用定理 11.13 容易得出，集族

$$\{B(p,q) \cap A \mid (p,q) \in A\}$$

是 A 上子空间拓扑的一组基. 由于 A 与数字圆 C_4 同胚，这组基必定包括两个交于一对点的 3 点集合. 这种情况可能仅在 A 包含 $(m-1, n)$ 与 $(m+1, n)$ 或包含 $(m, n-1)$ 与 $(m, n+1)$ 时出现. 于是所得到的 3 点集合，必定交于一对开点，它们分别为 $(m, n-1)$ 与 $(m, n+1)$ 或 $(m-1, n)$ 与 $(m+1, n)$. ■

由定理 11.13 可得，4 点数字简单闭曲线，必定出现于图 11.18 中的集合 A 或它旋转 90 度的情况. 再设我们有一条 4 点数字简单闭曲线

$$A=\{(m-1,n),(m+1,n),(m,n-1),(m,n+1)\}.$$

如果我们设 $C_1=\{(m,\ n)\}$ 而 $C_2=\mathbf{Z}^2-(A\cup\{(m,\ n)\})$，那么直接可证明，$C_1$ 与 C_2 是 $\mathbf{Z}^2$ 中 A 的补集的分支. 这样就对 4 点数字简单闭曲线验证了定理 11.12.

若尔当曲线定理的标准版本与数字的主要差别在于，在标准平面上的一条简单闭曲线，自然是它的补集的每个分支的边界，而在数字平面上的一条数字简单闭曲线，当且仅当数字简单闭曲线是一个闭集时，才是它的补集的每个分支的边界. 值得注意的是，在标准平面上的一条简单闭曲线必定是一个闭集.（见练习 11.21.）与数字若尔当曲线定理截然不同，对数字简单闭曲线来说，就要考虑两种可能性，一种为闭，另一种为非闭.

以下的定理给出了一个简单的条件，以确定数字简单闭曲线是否为数字平面的一个闭子集.

定理 11.14　*设 A 是在数字平面上的一条数字简单闭曲线，那么，当且仅当 A 不包含任意开点时，A 是此数字平面的一个闭子集.*

证明　见练习 11.22. ■

例如，图 11.16 中的每条数字简单闭曲线，仅由闭点和混合点组成，因此每条曲线都是此数字平面的一个闭子集. 然而在图 11.18 中的数字简单闭曲线 A 包含两个开点，因而 A 在此数字平面上不是闭的.

在数字平面上给出一条数字简单闭曲线，它的补集由两个分支组成. 下面我们来证明，与标准版本的若尔当曲线定理一样，这些分支中一个是有界的，而另一个则是无界的. 首先定义有界的含义.

定义 11.15　*数字平面的一个子集 A 是***有界的***，如果对于任一 $(m,\ n)\in A$，存在 $M\in\mathbf{Z}^+$，使得 $|m|\leqslant M$，$|n|\leqslant M$，否则称 A 为***无界的***.*

换句话说，当数字平面中的一个子集 A，被包含于以原点为中心的一个正方形内时，A 是有界的.

定理 11.16　*如果 A 是在数字平面上的一条数字简单闭曲线，那么它的补集的一个分支是有界的，而另一个分支是无界的.*

证明　设 A 是在数字平面上的一条数字简单闭曲线. 由于 A 仅由有限个点所组成，因此 A 是有界的. 因此它的补集至少有一个分支必定是无界的. 设 $M\in\mathbf{Z}^+$ 对于任一 $(m,\ n)\in A$ 满足 $|m|\leqslant M$，$|n|\leqslant M$，并设 B 与 B^* 是由

$$B=\{(m,n)\in\mathbf{Z}^2\,|m|\leqslant M\text{ 且 }|n|\leqslant M\},B^*=\mathbf{Z}^2-B$$

定义的集合.

直接可证明 B^* 是连通的，此外 $A\cap B^*=\varnothing$，于是 B^* 被包含于 A 的补集的一个分支之中. 于是得出，B 包含 A 的补集的另一个分支，因而此分支是有界的. ■

如果 A 是在数字平面上的一条数字简单闭曲线，那么我们称 A 的补集的有界分支为 A 的**内部**，并记为 $\mathrm{Ins}(A)$；称 A 的补集的无界分支为 A 的**外部**，并记为 $\mathrm{Out}(A)$. 数字若尔当曲线定理指出，当且仅当 A 是数字平面的一个闭子集，$A=\partial(\mathrm{Ins}(A))$ 且 $A=\partial(\mathrm{Out}(A))$.

再设我们有一个数字图像，即在像素的一个阵列上所显示的图像. 与此图像相应，我们在此数字平面定义可见屏 $\mathbf{V}$ 的一个分拆 $\mathcal{P}$. 在此分拆中的每一个集合，对应于图像的一个区

域，其中每个点有同样的颜色. 正如我们以前已提过的，我们很想知道，是否可能像确定此区域的一族周围集一样，来存储此图像呢？因此，我们很想知道，是否存在一族数字简单闭曲线用来确定在此分拆$\mathcal{P}$中的这些集合呢？

在 **V** 上的拓扑是离散拓扑，因而 **V** 完全是不连通的. 然而为了建立我们想得到的定理，我们需要对此可见屏的连通性引入一个替代的概念.

定义 11.17

(1) 设 $p=(m, n)$ 是可见屏上的一个点. $(m-2, n)$，$(m+2, n)$，$(m, n-2)$ 与 $(m, n+2)$，称为与 p 是 **4 邻接的**.

(2) 可见屏上的一个集合 C 称为是 **4 连通的**，如果对于任一对点 $p, q\in C$，在 C 中存在一个点列 $p=p_1, p_2, \cdots, p_n=q$，使得对于任一 $i=1, \cdots, n-1$，p_{i+1} 与 p_i 是 4 邻接的.

在这个可见屏上给出一个点，与它是 4 邻接的那些点，是在此可见屏上 4 个与它紧挨着的点，可能是水平方向的，也可能是垂直方向的. 在图 11.19 上，我们图示了在可见屏上的两个集合 A 与 B，A 是 4 连通的，而 B 不是.

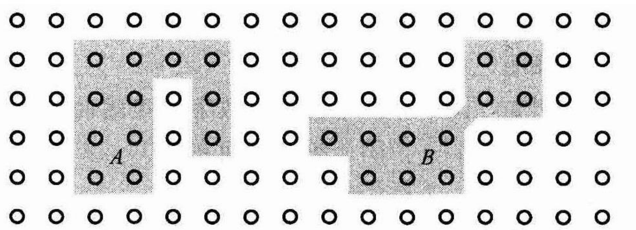


图 11.19　集合 A 是 4 连通的，而集合 B 不是

尽管我们在这里并不需要，但我们能类似地定义 8 连通的和 8 邻接的. 说起 8 邻接，环绕一个特定开点的 8 个开点，认为是与它 8 邻接的. 在建立可见屏版本的拓扑性质时，4 连通性和 8 连通性是重要的. 在由 A. 罗森菲尔德开发的数字拓扑领域，这些连通性质起关键的作用.（例如，见 [Ros].）

以下的定义描述了一个过程，通过它，在此可见屏上的一个图像，就被转换为在此数字平面上的一族周围集.

定义 11.18　设$\mathcal{P}$是可见屏到 4 连通子集的一个分拆，其中仅有一个是无界的. 由

$$S_{\mathcal{P}}=\bigcup_{D\in\mathcal{P}}\partial(\mathrm{Cl}(D))$$

定义的数字平面的子集，称为**由$\mathcal{P}$确定的卡通**.

按定义给出$\mathcal{P}$，由$\mathcal{P}$确定的卡通，是一个集族 $S_{\mathcal{P}}$，它是（在此数字平面上）通过在此分拆中取每个集合闭包的边界而得到的. 在 [Kha3] 中已证明，$S_{\mathcal{P}}$是数字平面中可见屏的补 $\mathbf{Z}^2-\mathbf{V}$中数字简单闭曲线的并. 于是我们可以把由$\mathcal{P}$所确定的卡通，看为是一族周围集. 以下的定理指出，正如所希望的，此分拆$\mathcal{P}$能由它所确定的卡通来恢复：

定理 11.19　设$\mathcal{P}$是可见屏到 4 连通子集的一个分拆，其中至多一个是无界的. 设 $S_{\mathcal{P}}$是由$\mathcal{P}$确定的卡通. 那么由

$$\mathcal{P}^*=\{C\cap\mathbf{V}\mid C\text{ 是 }\mathbf{Z}^2-S_{\mathcal{P}}\text{ 的补集}\}$$

给出的 **v** 的子集族$\mathcal{P}^*$，是可见屏的一个分拆，且$\mathcal{P}^*=\mathcal{P}$.

我们不给出定理 11.19 的证明，它可由 [Kha3] 中提供的结论得到.

在定理 11.19 中，为了使分拆$\mathcal{P}^*$与$\mathcal{P}$一致，必须假设在分拆$\mathcal{P}$中的集合是 4 连通的. 例如，如果在图 11.19 中的集合 B，是此分拆中的一个集合，那么 B 的两个 4 连通的“分支”

分隔$\mathcal{P}^*$中的集合.

总之，我们有以下存储和恢复一个数字图像的过程：

(1) 给出一个数字图像，定义可见屏的一个分拆，使得在此分拆中的每个集合，对应于在此图像中一个具有固定颜色的区域.

(2) 为了存储此图像，构建由此分拆所确定的卡通.（我们还可以通过指明在此卡通中每条数字简单闭曲线的哪一侧有哪一种颜色，来存储颜色的信息.）

(3) 通过对可见屏与在数字平面中此卡通的补集的每个分支取交，来恢复此分拆.

通常被我们认为是连通和连续的现实世界，对它实现数字化表示的挑战，需要有一种把图像"离散化"为数字形式的手段，而同时又存在一种连通性的结构，使现实世界的拓扑关系得以保持. 数字平面就为上述过程提供了一种有效的模型，它由以下两部分组成，一是用于表示图像的完全不连通的、开的且稠密的可见屏，另一是提供连通性的，构成不可见结构的闭点和混合点.

欧氏空间已成为拓扑学训练的一个主要阵地，但是由于我们过分依赖交换、提供和解释信息的数字化过程，因此在我们所研究的对象中，重要的是要把数字空间包括在内.

11.3 节练习

11.17 给定数字平面上的两个点，证明：存在连续函数 f：$[0, 1] \to \mathbf{Z}^2$，以追踪从一点到另一点沿着铅直、水平或二者兼有的方向运动的踪迹.

11.18 确定例 11.2 中的数字简单闭曲线 A 的补集的每个分支的边界.

11.19 (1) 考虑图 11.20 中所示的数字平面的 4 个 6 点子空间. 对每个 6 点子空间，说明此子空间拓扑的一组基，并证明在这些集合中，没有一个是数字简单闭曲线.

(2) 证明：在数字平面中没有 6 点数字简单闭曲线.

(3) 证明：对于任一偶整数 $n \geqslant 8$，在数字平面中存在一条 n 点数字简单闭曲线.

(4) 证明：在数字 3 维空间，即通过取 3 个数字轴的乘积而得到的空间 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 中，存在一条 6 点数字简单闭曲线.

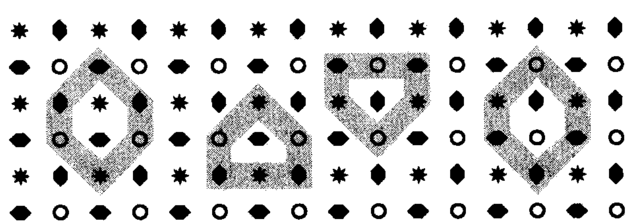


图 11.20　这些 6 点集合中没有一个是数字简单闭曲线

11.20 (1) 证明：在数字平面中，环绕一个开点的 8 点集，是一条数字简单闭曲线.

(2) 证明：在数字平面中，环绕一个闭点的 8 点集，是一条数字简单闭曲线.

(3) 证明：在数字平面中，环绕一个混合点的 8 点集，不是一条数字简单闭曲线. 这样的集合分隔此数字平面吗？

11.21 (1) 证明：如果 S 是平面 $\mathbf{R}^2$ 的一条简单闭曲线，那么，S 是此平面的一个闭子集.

(2) 为什么你在 (1) 中的证明不能用来证明以下的命题：如果 A 是数字平面中的一条数字简单闭曲线，那么 A 是此数字平面的一个闭子集.

11.22 **证明定理 11.14**：设 A 是在数字平面上的一条数字简单闭曲线，那么，当且仅当 A 不包含任意开点，A 是此数字平面的一个闭子集.

11.23 设 A 是在数字平面上的一个开点的 $n \times n$ 阵列. 证明：$\partial(\mathrm{Cl}(A))$ 是由 $8n$ 个点所组成的一条数字简单闭曲线.

第12章 组结

本章我们叙述组结的理论[⊖]. 我们回忆起，一个组结是圆周到 $\mathbf{R}^3$ 上的一个嵌入 $f: S^1 \to \mathbf{R}^3$. 如图12.1所示，一个组结能不穿过自身地变形为另一个组结的话，我们称这两个组结是等价的. 两个等价的组结，称为是同一类型的. 稍后，我们对这种等价性给出严格的定义.

组结理论诞生于19世纪中叶. 高斯（1777—1855）和他的学生J. 利斯廷（1808—1882）都曾对组结理论的早期研究做出过贡献. 利斯廷的著作"拓扑学的初步研究"（术语"拓扑学"就是在这时首先被使用的）包括了有关组结分类问题的讨论.

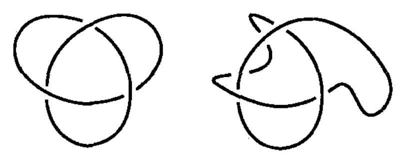


图12.1 这两个组结是等价的

19世纪的大部分科学家全都曾坚信，整个空间充满了一种称为"以太"的看不见的物质. 苏格兰物理学家W. 汤姆森（1824—1907）（亦称为开耳芬勋爵）曾假定，在以太中，原子仅是组结状的旋涡（像吸烟者吹到空气中的烟环一样）. 每个不同的组结，被认为与不同的元素相对应.

受到汤姆森猜想的推动，C. 麦克斯韦（1831—1879）和G. 泰特（1831—1901）研究了组结的性质，同时，泰特对不同组结的目录进行了探讨，最终发现，组结目录表的相关程度不如元素周期表那么好. 此外，由于迈克耳孙-莫雷试验（1887），以太不存在已成为显而易见的结论了，因而，就对原子的这种模型给予了致命的打击. 但是直到那时，人们还仅仅是从数学的观点对组结的分类产生很大的兴趣，并在这个方向继续进行研究.

在20世纪初期，随着拓扑学基础的发展，数学家就能够建立组结的理论了. 此后，许多数学工具已建立，并把它应用于拓扑学这个最活跃的领域之一——组结理论.

组结理论的最基本的问题，是如何识别两个组结是等价的. 给出两个组结的图形，我们希望确定，当这些组结被绑在一根线上时，是否能对其中一个组结重新安排，看起来像是另一个组结.

证明两个组结不是等价的一种方法，是使用与组结有关的，称为不变量的量. 不变量依赖于组结的类型，而不依赖于它的特定的形状. 当我们存在两个具有不同不变量的组结时，就知道这两个组结是有区别的.

在12.1节，我们介绍合痕，并用它给出组结等价的严格定义. 在12.2节中，我们介绍赖德迈斯特运动，它是我们在保持组结类型的一种组结射影（组结的一种图形）上实现的运

⊖ knot的流行译名除了组结，还有扭结. 前者把它当作名词，后者把它当作动词. 本章的标题是knots，当然译为组结了. 而组结理论是这样一门学科，它研究3维空间中一条简单闭曲线所构成的图形，通俗地说，就是把一根绳子打结而成的图形的数学表示. ——译者注

动．赖德迈斯特运动为我们提供了证明下述命题的直接手段，这个命题说，我们定义的不变量，确实是与纽结的类型无关的．在这一节中，我们还将引入环绕数，它是对作为组成一族纽结的构形，即环绕加以区别的一种不变量．在 12.3 节中，我们引入纽结的多项式不变量，它曾经是 20 世纪 20～30 年代的一项创新，但在 20 世纪 80 年代它神奇地得到了推广．最后一节我们介绍纽结在 DNA 和合成化学中的某些应用．

12.1 合痕和纽结

在 9.1 节，我们介绍过在两个连续函数 $f: X\to Y$ 与 $g: X\to Y$ 之间的同伦 $F: X\times I\to Y$ 的概念，它是使得 $F(x, 1)=f(x)$ 且 $F(x, 1)=g(x)$ 成立的连续函数 $F(x, t)$．当坐标从 0 变为 1 时，函数 F 从 f 变为 g．在纽结理论中，我们对一种特殊的同伦感兴趣．

定义 12.1　同伦 $F: X\times I\to Y$ 称为一个**合痕**，如果对于 I 中的任一 t，$F|_{X\times\{t\}}$ 是一个同胚．

在合痕 $F: X\times I\to Y$ 中，当 t 改变时，我们认为此合痕，是定义在 X 上的一个单参数的同胚族 $F|_{X\times\{t\}}$．

例 12.1　用 $F(x, t)=(t+1)x$ 来定义 $F: \mathbf{R}^2\times I\to\mathbf{R}^2$．当 $t=0$ 时，F 正好是 $\mathbf{R}^2$ 上的恒等映射．但当 t 从 0 增加到 1 时，在 $\mathbf{R}^2$ 中的每个以原点为起点的向量，在长度上伸长到这个合痕的端点，那时它们的长度全都为原来的两倍．（见图 12.2.）

我们可以认为，一个合痕是当空间 X 的拓扑不改变时它的一个变形．我们感兴趣的是，一个空间 Y 在另一个空间 X 的两个嵌入，是否能通过包含它们的空间 X 的一个合痕相互变形呢？在这方面，我们来确定两个嵌入等价究竟意味着什么．

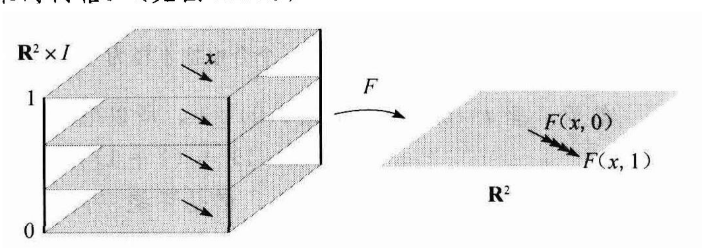


图 12.2　合痕 F 把每个向量的长度都伸长到两倍

定义 12.2　设 $f: Y\to X$ 和 $g: Y\to X$ 是空间 Y 到空间 X 上的嵌入，那么，如果存在一个合痕 $F: X\times I\to X$，使得对于任一 $x\in X$，成立 $F(x, 0)=x$，且对于任一 $y\in Y$，成立 $F(f(y), 1)=g(y)$，我们就称 f 与 g 是**环绕空间合痕的**．空间 X 称为**环绕空间**，而函数 F 则称为**环绕空间合痕**．

如果 $F: X\times I\to X$ 是一个环绕空间合痕，那么，当限制 $t=0$，F 正好是 X 上的恒等映射，它使 X 中的所有点保持不动．但当限制 $t=1$ 时，F 把在 f 下的一个点的象，映成此点在 g 下之象的同一位置．环绕空间合痕使整个空间 X 以连续方式变形，使得函数 f 最终变形为函数 g．

还应注意，虽然条件 $F(x, 0)=x$ 与 $F(f(y), 1)=g(y)$ 看来是十分不同的，但第一个条件蕴涵 $F(f(y), 0)=f(y)$．所以我们可以认为这些条件蕴涵：在时刻 $t=0$，F 把 $f(y)$ 映成 $f(y)$，而在时刻 $t=1$，F 把 $f(y)$ 映成 $g(y)$．

尽管环绕空间合痕的定义说起来有些罗嗦，但它却抓住了橡皮膜几何学的实质．当环绕空间变形时，第一个嵌入的象，缓慢地变形为第二个嵌入的象．请注意，由定义可知，第一个嵌入的象，与第二个嵌入的象同胚．Y 的一个同胚拷贝，在每个阶段于环绕空间合痕中出

现，而我们就会看到它从初始形态到最后形态的一段影片.（见图 12.3.）环绕空间合痕，定义了在空间 Y 到空间 X 的两个嵌入之间的一种等价关系.（见练习 12.3.）

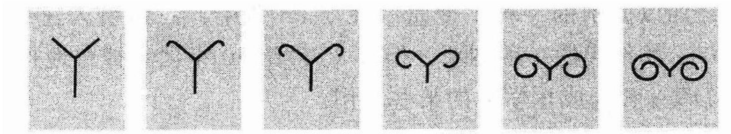


图 12.3 一个合痕类似于变形的一段影片

例 12.2 用 $f(\theta)=(\cos\theta, \sin\theta)$ 来定义 $f: S^1\to\mathbf{R}^2$. 在 $\mathbf{R}^2$ 中，这个嵌入把圆周映成它自身的一个拷贝. 再定义 $g(\theta)=(2\cos\theta, 2\sin\theta)$. 在 $\mathbf{R}^2$ 中，这个嵌入，把圆周映成中心在原点、半径为 2 的圆周. 显然，我们可以把第一个嵌入变形为第二个嵌入.（见图 12.4.）但是，一个明确的环绕空间合痕究竟是什么呢？我们可以使用上一个例子中的合痕来加以说明. 也就是取由 $F(x, t)=(t+1)x$ 所定义的 $F: \mathbf{R}^2\times I\to\mathbf{R}^2$. 这是一个合痕，由于在 I 中，对于 t 的一个固定的值，$F|_{\mathbf{R}^2\times\{t\}}$ 是平面到自身的一个同胚.

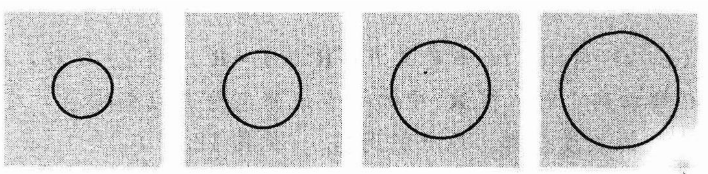


图 12.4 一个合痕把半径为 1 的圆周变形为半径为 2 的圆周

然而，当 $t=0$，就有 $F(x, 0)=x$，所以它是一个恒等映射. 最后，当 $t=1$ 时，我们有

$$F(f(\theta),1)=(1+1)f(\theta)=2f(\theta)=g(\theta).$$

因此，事实上此圆周的两个嵌入，都是环绕空间合痕.

例 12.3 已知一个环绕空间合痕 $F: \mathbf{R}^3\times I\to\mathbf{R}^3$，它把球面 S^2 变形为如图 12.5 所示的嵌入球面 S.

函数 $F|_{\mathbf{R}^3\times\{0\}}$ 是恒等映射，它是一个同胚. 函数 $F|_{\mathbf{R}^3\times\{1\}}$ 把球面映成嵌入球面 S. 我们不给出 F 的明确的表达式. 为一个特定的环绕空间合痕，给出它的表达式通常是困难的，或者是不可能的，尽管从图形上看来是明显存在的.

现在，我们希望把环绕空间合痕的概念应用于纽结. 为了避免出现某些变态的情况，我们假定此纽结可以如图 12.6 所示，通过让有限多根小棍以端对端地连接在一起的方式来实现. 我们把它称为**折线状纽结**. 我们把这些小棍称为折线状纽结的**边**，而任何相邻的一对边交于一个**顶点**.

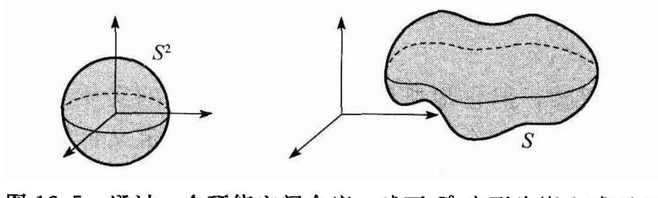


图 12.5 通过一个环绕空间合痕，球面 S^2 变形为嵌入球面 S

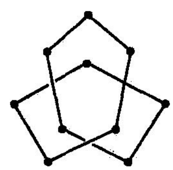


图 12.6 由一些棍构成的纽结

任何一个光滑的纽结，可以用由多根短棍所构成的折线状纽结以任意接近的方式逼近，所以，考虑折线状纽结而不考虑光滑纽结，这是无关紧要的.

由于我们使用了有限多根棍，从而使我们能避免像图 12.7 中所出现的所谓紊乱的嵌入纽结. 这些纽结存在奇怪的性态，与我们从这些纽结所获得的直觉相违背.

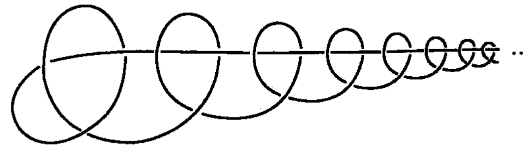


图 12.7　我们不作考虑的紊乱的嵌入纽结

在数学上，纽结理论所考虑的范围，是研究圆周 S^1 到 $\mathbf{R}^3$ 的各种嵌入. 如果我们能把一个纽结以不穿过自身的方式变形为另一个纽结，我们就希望这两个不同的纽结是等价的. 如何能使这种关系严格地加以确定呢?

定义 12.3　两个纽结 f，g：$S^1 \to \mathbf{R}^3$ 是**等价的**，如果它们是环绕空间合痕的. 一族等价的纽结，称为一种**纽结型**.

设 H：$\mathbf{R}^3 \times I \to \mathbf{R}^3$ 是由嵌入 f，g：$S^1 \to \mathbf{R}^3$ 给出的纽结之间的环绕空间合痕. 条件 $H(x, 0)=x$ 确保 H 是从恒等映射开始. 条件 $H(f(x), 1)=g(x)$ 确保到那时 H 就能把由 f 所给出的纽结，变形为由 g 所给出的纽结. 对于第二个坐标 t 的任何固定值，此合痕必定是一个同胚的事实，就能避免纽结在变形时出现穿过自身的现象.

例 12.4　在图 12.8 中所示的所有纽结是同一纽结型的，这是由于，通过 $\mathbf{R}^3$ 中的环绕空间合痕，其中任一个纽结都可以变形为其余每个纽结.

我们采用环绕空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个环绕空间合痕的理由，是为了避免在图 12.9 中所出现的，使一个纽结的一部分折叠起来的变形. 由于这种变形，$\mathbf{R}^3$ 的一部分，在最后阶段被折叠成为一个点，在 $\mathbf{R}^3$ 中的一个环绕空间合痕，不能出现这种折叠.

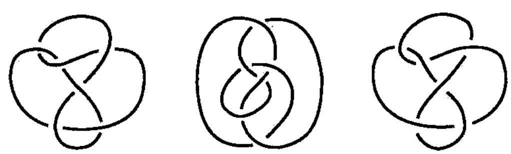


图 12.8　这些纽结是同一纽结型的

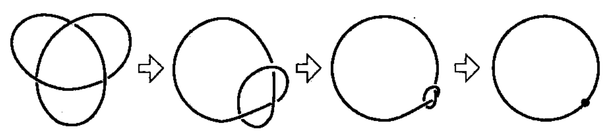


图 12.9　我们不允许折叠

特别地，我们借助对一个纽结如何穿过空隙而变形的可视化方式，并把变形的全过程牢记心中，来画出一个环绕空间合痕，整个环绕空间合痕与此纽结一起变形，因而此纽结也不能穿过自身 .（见图 12.10.）

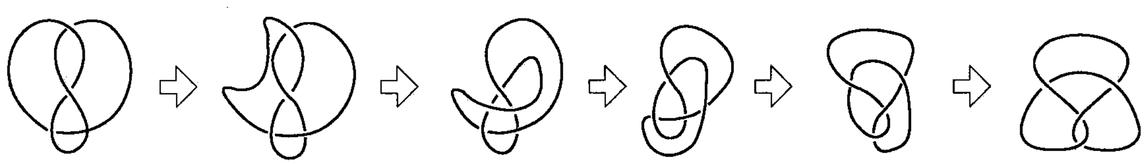


图 12.10　一系列的变形表明初始的纽结与最后的纽结是等价的

我们还假定，此合痕是所谓**逐段线性的**. 这是为了在一个纽结变形为另一个纽结时，避免可能出现穿过一个紊乱纽结的现象. 从一个折线状纽结到另一个折线状纽结的一个逐段线性环绕空间合痕，可以通过对此纽结所进行的以下一系列的两种运算来实现（见图 12.11.）：

(1) 用此纽结的另两条边替换一条边，使得所围成一个三角形的三边与第一边一起，都与此纽结相交.

(2) 用此纽结的一条边替换另两条边，使得所围成一个三角形的三边恰好与前两条边一起，与此纽结相交.

我们把这些运算称为此纽结上的**三角形移动**. 显然，每种这样的移动，都保持纽结的类型，由于它可以按图 12.12 所示的方式，让一个环绕空间合痕，通过连续穿过三角形到另一边或另一些边的方式，使此纽结变形来实现.

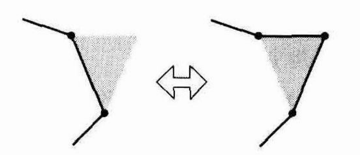


图 12.11 在一个逐段线性环绕空间合痕中，对一个纽结进行的一些运算

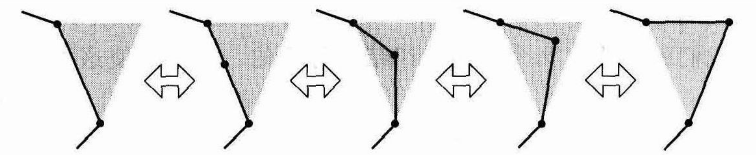


图 12.12 源于一个环绕空间合痕的三角形移动

所有的纽结都由有限条线段构成的事实，虽然值得牢记心中，但我们不强调这一点，对于你来说，我们允许它使你本人确信光滑纽结已画出，而我们所描述的环绕空间合痕，可按照逐段线性的版本来理解.

当提到纽结的整个等价类时，使用纽结这个术语是很方便的. 例如，当两个纽结不在同一等价类时，我们就称它们是相异的. 当一个纽结在同一等价类时，我们称它是**平凡的**，此时，这个纽结由以下嵌入给出，这个嵌入把 S^1 映成 $\mathbf{R}^3$ 中在 xy 平面上的，中心在原点、半径为 1 的圆周上. 仅当可能确实出现混淆时，我们才回过来指出纽结的类型.

为了跟踪与纽结和对它所进行的运算，我们使用称为纽结射影的纽结图形. 在 3 维空间中，给出一个折线状纽结，我们就可以把它投影到一个平面上的一条闭折线上. 所得到的平面曲线，称为此纽结的**射影**. 一个射影称为**正则射影**，如果

(1) 在此射影上没有一个点，与此纽结上多于两个以上的点相对应.

(2) 在此射影上仅有有限个点，与此纽结上两个点相对应. 这些点称为此射影的**二重点**.

(3) 与此纽结的一个顶点相对应的二重点不存在.

在图 12.13 中，我们画出了导致未能成为正则射影的几种射影.

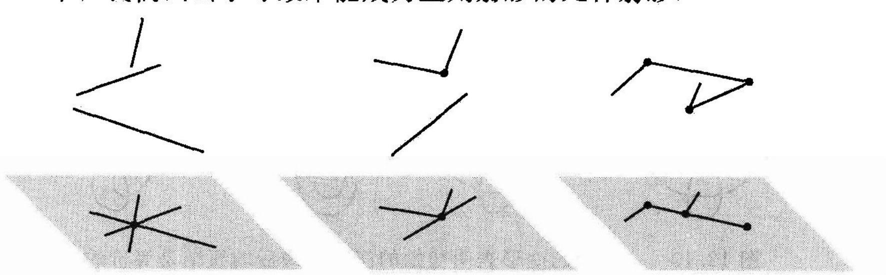


图 12.13 未能成为正则射影的几种射影

如果一个纽结的射影不是正则的，我们只要在投影前稍微移动一下这个纽结，就可以使之成为正则射影. 我们称这样放置的纽结，为相对于此射影的一般位置，而在这里，尽管我

们无法陷入技术细节，难于使你本人确信我们总是可以这样来做. 例如，如果有一个顶点投影到一个二重点，在空间中只要让此纽结稍作移动，就会让此顶点离开此二重点. 让纽结稍作这样的移动，不会改变纽结的类型. 因此，每个纽结有一个正则射影.

在平面上，一个纽结的正则射影以拓扑图的形式出现. (见图 12.14.) 此纽结的被投影的顶点，与此射影的二重点一起组成此拓扑图的顶点. 如果在此纽结一条边的射影之中没有二重点，那么它是这个拓扑图的一条边. 另一方面，此纽结的被投影的边，被此二重点所对应的顶点分为新的边.

一个纽结的射影所包含的信息不如原来的纽结那么丰富. 对于一个二重点来说，我们不知道在此纽结两条对应的链中，与此射影平面更接近的是哪一条. 然而在每个二重点，如图 12.15 所示的一个**纽结射影**，是这样一种正则射影，它包括对于这个投影平面来说，哪一条链跨越另一条链的一个迹象. 纽结的射影还可称为**示意图**. 给出一个纽结射影，在 3 维空间中，我们可以作出一个由此纽结射影表示的纽结. 此外，由已知的纽结射影所作出的任何两个纽结是等价的.

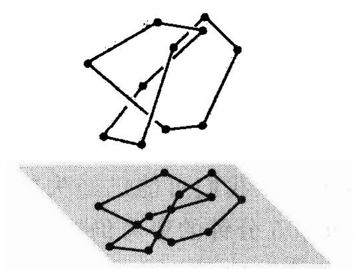


图 12.14　在平面上，一个正则射影以拓扑图的形式出现

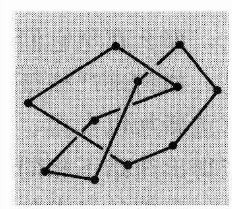


图 12.15　纽结射影

我们把在一个纽结射影中的二重点，称为此射影的**交叉**.

一个**平面合痕**是平面的一个逐段线性合痕. 它把折线状的纽结射影，变形为另一个折线状的纽结射影，而不改变平面上相应拓扑图的结构. 一个平面合痕，虽然能使交叉之间的距离伸长或缩短，但它不会改变交叉的数量，至于哪些交叉由此射影的哪些边相连接，这种对应关系也不会改变.

如果从一个纽结射影到另一个纽结射影的平面合痕存在，那么，我们就可以作出 $\mathbf{R}^3$ 的在相应两个纽结之间的一个适当的环绕空间合痕，因而这两个纽结是等价的. 另一方面，两个纽结之间的一个环绕空间合痕，未必投影到一个环绕空间合痕. 例如，在一个环绕空间合痕的一个射影中，我们可以看到在图 12.16 中所示的一个变形. 在第三步我们就不再有一个纽结射影了.

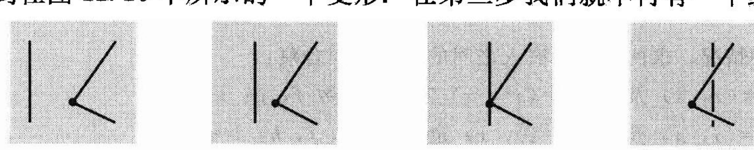


图 12.16　一个环绕空间合痕经投影不再是一个平面合痕

当我们用纽结射影来研究纽结时，有一种变形起重要的作用. 它就是所谓的赖德迈斯特运动. 下一节我们对赖德迈斯特运动作进一步的研究.

纽结理论的首要目标，是寻求区分不同纽结类型的有效手段. 在图 12.17 中，我们表示了最多达到 6 个交叉的一族纽结. 作为包含不超过 6 个交叉的正则射影的每个纽结，与这些纽结之一等价，或与这些纽结之一的镜像等价. (请注意，一个纽结与它的镜像未必等价，在 12.4

节中，我们再对此作进一步的讨论.）

在图 12.17 的上面一排，第一个纽结是平凡纽结，第二个纽结称为**三叶形纽结**，而第三个纽结称为 **8 字形纽结**.

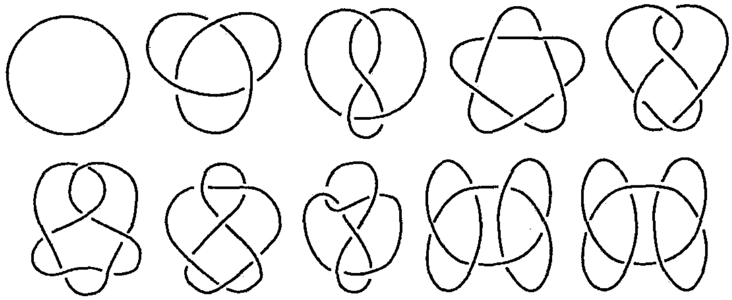


图 12.17　一些不超过 6 个交叉的不同纽结

众所周知，图 12.17 中的每个纽结是不同的. 如果我们把其中一个松开，不把它割断并重新系上，那么在把它们重新加以安排以后，看起来就不再与另一些纽结中的任意一个一样了. 但是，如何来严格证明这些纽结是不同的呢？而我们恰好又不能让一个纽结松开，然后试图把它重新加以安排，使得看起来与另一个纽结相像. 我们可能已经失望了 6 年之久，但是还不能得出纽结不相同的结论. 我们如何能知道再作 5 分钟的努力仍然不能达到目的呢？

于是，我们就寻求与给定的纽结相应的，且与纽结类型无关的一个不变量. 有各种不变量可用于纽结的研究，其中一些是数值（见 12.2 节），一些是多项式（见 12.3 节），而另一些是代数群. 在所有这些情况中，最重要的是，如果已知两个纽结对一种不变量有不同的值，就能立刻知道它们是不同的纽结.

但是，人们如何能看出一个已知的候选不变量，是否确实是一个不变量呢？要说明两个纽结之间的环绕空间合痕，并未导致此不变量的值改变，这通常是太难办了. 可能的环绕空间合痕实在是太多了，而且即使在最简单的例子中，方程也变得难于处理.

幸而，我们通过用纽结射影，并对它们应用赖德迈斯特运动后，这项任务就神奇地得以简化. 下一节我们将对上述这些想法进行讨论.

12.1 节练习

12.1　对于下列每种情况，求两个已知嵌入之间的环绕空间合痕：

(1) 由 $f(x)=(x,\ x)$ 及 $g(x)=(x^2,\ x)$ 定义的函数 f，g：$I\to\mathbf{R}^2$.

(2) 由 $f(x)=(x,\ x)$ 及 $h(x)=(0,\ x)$ 定义的函数 f，h：$I\to\mathbf{R}^2$.

12.2　证明：如果 F 是嵌入 f，g：$Y\to X$ 之间的一个环绕空间合痕，那么，f 与作为把 Y 映射到 X 的一个函数 g 是同胚的.

12.3　证明：一个环绕空间合痕，定义了在把空间 Y 嵌入到空间 X 的集合上的一个等价关系.

12.4　画出一系列的草图，请说明在图中的第一个纽结可以变形为第二个，而第二个纽结可以变形为第三个.

12.5　在图 12.18 中确定哪些纽结是等价的，并猜测哪些纽结是等价的.（我们可以通过寻求一系列描述从一个纽结到另一个纽结的环绕空间合痕的图形，来证明这两个纽结是等价的. 然而，正如本书已指出过的，我们没有方法证明两个纽结不等价.）

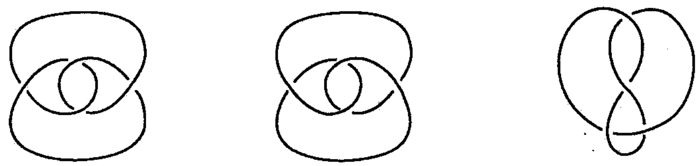


图 12.18　哪些纽结是等价的

12.6 纽结理论通常把一个纽结看作是在 S^3 中的嵌入，而不是在 $\mathbf{R}^3$ 中的嵌入．正如我们已看到的，我们可以认为 S^3 是 $\mathbf{R}^3\cup\{\infty\}$ 的单点紧化，所以恰好存在此两个空间的一个单点差集．添加这个单点而得到 S^3 的优点，是所得到的环绕空间是紧致的，此结果被证实是有用的．请证明，如果在 $\mathbf{R}^3$ 中两个纽结是等价的，那么，它们在 S^3 中也是等价的．

12.2　赖德迈斯特运动与环绕数

假设用两个纽结射影来表示等价的纽结，那么，必定存在一个由第一个射影所表示的纽结，到由第二个射影所表示的纽结的环绕空间合痕．然而，要确定这种合痕是否存在是困难的，由于这些合痕给我们的活动余地太大了．1927 年，*K*. 赖德迈斯特（1893—1971）通过证明一个命题使这个任务得以简化．这个命题说，由两个不同的纽结射影所表示的，纽结之间的一个环绕空间合痕的存在性，等价于一系列称为赖德迈斯特运动的存在性，这种运动把我们从一个射影引向另一个射影．赖德迈斯特运动分为以下三种类型．

第一种赖德迈斯特运动，如图 12.19 所示，使我们能对一个射影打上一个结或解开一个结．请注意，这样确实不会改变纽结的类型．



图 12.19　第一种赖德迈斯特运动

至于第二种赖德迈斯特运动，我们如图 12.20 所示，把相邻的两根线之一滑向另一根线之下，或反过来，我们把一根线从另一根线之下滑出，形成相邻的两根线．图 12.20 所示的两种运动，实际上是相同的．把右边的图旋转 180 度，就得到实质上表示左边运动的图．显然，经过第二种赖德迈斯特运动，纽结的类型得以保持．

而对于第三种赖德迈斯特运动来说，让一根线在两段线之上滑动并通过交叉，就形成如图 12.21 所示的交叉．

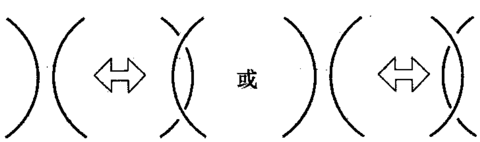


图 12.20　第二种赖德迈斯特运动

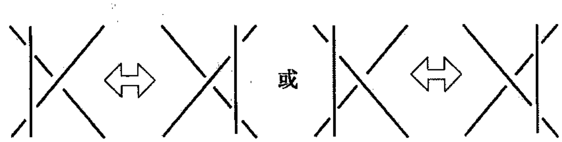


图 12.21　第三种赖德迈斯特运动

如果我们从底下一根线的角度来考察图 12.21 中的运动，然后在图示的运动中，让底下的一根线在由另两根线所形成的一个交叉之下运动．于是，如图所示的第三种运动，可能包括一根线在一个交叉之下的运动．此外，第三种运动可能还包括一根线在组成此交叉的两根

线之间，通过一个交叉的运动.

接下来，我们介绍一个重要的结论——赖德迈斯特定理，正如我们随后将看到的，它使我们能够验证所定义的不变量，确实是能判断纽结类型的不变量.

定理 12.4（赖德迈斯特定理） 两个纽结是等价的，当且仅当存在平面合痕，以及把一个合痕的纽结射影引向另一合痕的纽结射影的有限序列.

证明 正如我们前面已提及的，平面合痕和赖德迈斯特运动不改变纽结的类型，所以立即可得出，如果通过一系列的平面合痕和赖德迈斯特运动两个纽结射影相关联，那么，它们表示等价的纽结.

再假设两个纽结射影与等价的纽结相对应. 我们要证明，存在一系列的平面合痕，和一系列的从一个纽结射影到另一个纽结射影的赖德迈斯特运动.

我们假定这两个纽结都是折线状的，因而与对应纽结射影有关的拓扑图，由与这些顶点相连的线段所组成. 由于所表示的两个纽结是等价的，所以，存在一个把一个纽结，变形为另一个纽结的，从 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的逐段线性环绕空间合痕. 由于此合痕是逐段线性的，因此根据定义，我们能由一系列的三角形运动，来实现在这个纽结上的紧致性.

只要此环绕空间合痕的每个阶段的射影是一个纽结射影，那么，我们只能随着平面合痕前进. 当平面合痕的一个阶段不产生一个正则射影时会出现什么情况呢？可以证明，在本质上会出现三种情况.

考虑如图 12.22 所示的三角形移动. 在阶段（c）与（e），射影不是正则射影. 当在阶段（b）与（d）之间的三角形移动的变形进程经过阶段（c）时，所导致的射影是第三种赖德迈斯特运动. 而当在阶段（d）与（f）之间的三角形移动的变形进程经过阶段（e）时，所导致的射影则是第二种赖德迈斯特运动.

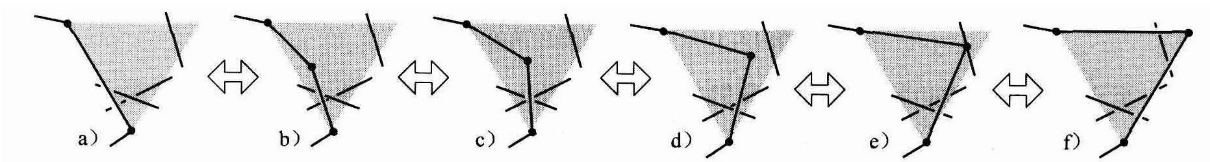


图 12.22 第二种与第三种赖德迈斯特运动在图示的三角形移动时出现

在图 12.23 中，我们表示了一种环绕空间合痕的射影不是正则射影的三种情况. 在阶段（c），由于边的射影如图所示，我们就没有正则射影. 当变形从阶段（a）开始，直到阶段（e）结束（反之亦然），射影的各种改变，都是第一种赖德迈斯特运动.

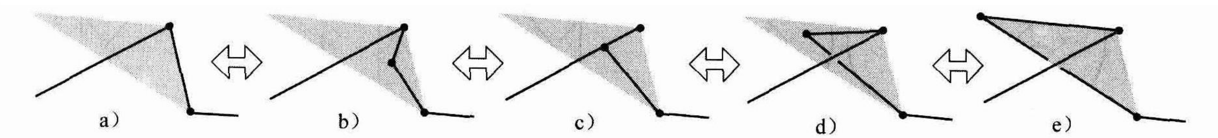


图 12.23 当三角形移动按图示的方式来配置，就出现第一种赖德迈斯特运动

这样当三角形移动在一个示意图上被投影时，它们就导致一系列的平面合痕或赖德迈斯特运动. 因此，如果两个纽结是等价的，那么通过一系列的平面合痕或赖德迈斯特运动，我

们就能够实现从第一个纽结的纽结射影到第二个纽结的纽结射影的转换. ■

除了纽结，我们还要考虑环绕.

定义 12.5 一个**环绕**是在 $\mathbf{R}^3$ 中一组圆周的一个嵌入. 两个环绕被认为是等价的，如果借助环绕空间合痕，一个环绕可以变形为另一个环绕. 每个被嵌入的圆周称为此环绕的**分支**，而如果此环绕有 n 个分支，就称为是一个 n **分支环绕**.

图 12.24 描述了两种很著名的环绕，怀特黑德环绕和博罗米恩环绕. 前者是 2 分支环绕，后者是 3 分支环绕. 在意大利文艺复兴时期，博罗米恩环绕出现于博罗米安家族的族盔的装饰之中.

对于纽结（以及正则射影、赖德迈斯特运动及赖德迈斯特定理等）所提出的所有概念和结论，在此时都适用于环绕. 存在一种容易计算的，称为环绕数的不变量，利用它可以对两个环绕相互加以区分. 下面我们就对此作一些介绍.

设 L 是一个 2 分支环绕. 环绕此分支，我们选取一个运动方向. 我们称此方向为一个**定向**，通过在此分支上放置一个箭头来表示. 在环绕的一个特定的图示上，每个交叉出现于图 12.25 中的两个图中之一.

两个不同分支之间所出现的每个交叉，用 +1 或 −1 来标记，这由图 12.25 中的配对（1）或（2）而定. 我们把一个交叉 c 的标记记为 $l(c)$.

定义 12.6 一个有向 2 分支环绕 L 的图示的**环绕数**由

$$\mathrm{lk}(L) = \frac{1}{2}\sum_c l(c)$$

给出，其中的和取遍与此环绕有关分支的所有交叉 c.

例 12.5 我们来确定在图 12.26 中所出现的有向环绕 L 示意图的环绕数.

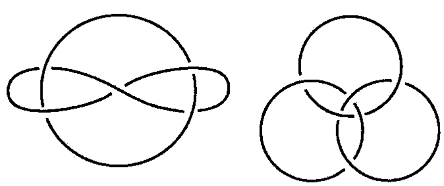


图 12.24 怀特海环绕和博罗米恩环绕

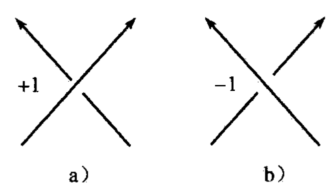


图 12.25 在一个定向环绕的投影上可能出现的交叉

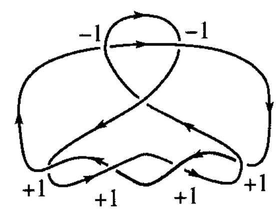


图 12.26 带交叉标记的有向环绕 L

标记为 +1 的交叉有 4 种，标记为 −1 的交叉有两种，一个分支与它自身之间的交叉不加标记. 所以，$\mathrm{lk}(L)=\frac{1}{2}(+1+1+1+1-1-1)=1$.

环绕数是对于与一个已知有向环绕有关的环绕射影来定义的. 以下的定理说明，环绕数确实已对有向环绕恰当地定义，且与环绕射影的选取无关. 据此，此定理蕴涵环绕数是有向环绕的一个不变量.

定理 12.7 如果两个有向环绕是等价的，那么，它们的所有示意图都有相同的环绕数.

证明 我们必须证明，如果等价有向环绕有两个环绕射影，那么，由每个环绕射影所计算出来的环绕数是相同的. 与纽结射影一样，如果两个纽结是等价的，那么，它们的环绕射影，通过一系列的平面合痕和赖德迈斯特运动相关联. 而平面合痕并不改变交叉，因而不影

响环绕数. 因此，就足以证明，此环绕数不受赖德迈斯特运动的影响.

假设我们作一个第一种赖德迈斯特运动. 它既不能使单个分支与它自身之间的交叉消失，也不能增添交叉. 然而，它不改变此分支之间的交叉. 所以，此环绕数不受第一种赖德迈斯特运动的影响.

假设我们通过第二种赖德迈斯特运动，把一根线从与它相邻的一根线之下滑出. 如果这两根线来自同一个分支，那么环绕数就不会改变. 如果这两根线来自不同的分支，我们就添加标记为+1 和−1 的交叉. 由于在环绕数中，对各个+1 和−1 求和，这就使环绕数仍然不受影响. 同样，如果我们通过第二种赖德迈斯特运动来消除不同分支之间的两个交叉，而我们所消除的，是标记为+1 和标记为−1 的交叉，因而环绕数保持不变.

最后，如果我们作一个第三种赖德迈斯特运动，环绕数也不会改变. 由于我们只是移动了所标记交叉的位置，所以不会改变这些标记的总和.

总之，赖德迈斯特运动使环绕数保持不变，因而所有等价有向环绕的示意图，都有同样的环绕数. 所以，环绕数是有向环绕的一种不变量. ■

例 12.6 考虑图 12.27 中所示的一些环绕. 环绕 T 称为**两个分支的平凡环绕**. 它的环绕数为 0. 在此图中间的环绕 M，它的环绕数为+2 或−2，取决于定向的选取. 因此，环绕 M 不是平凡环绕.

怀特海环绕 W 的环绕数也为 0. 因此，W 与平凡环绕没有区别，但是，W 与环绕 M 有区别.

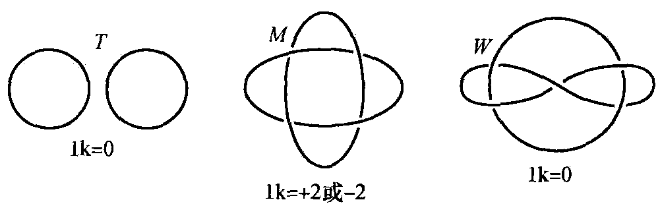


图 12.27 T 和 W 的环绕数与 M 不同，但 T 和 W 的环绕数相同

12.2 节练习

12.7 确定一系列的赖德迈斯特运动，使得把我们从图 12.28 所示纽结的第一种射影引向第二种射影.

12.8 用环绕数来区别图 12.29 所示的两个纽结.

12.9 用环绕数来说明，图 12.30 所出现的环绕不是这两个分支的平凡环绕.

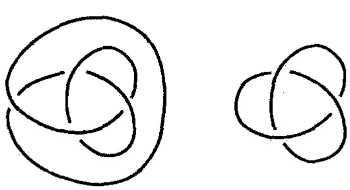


图 12.28 第一种射影如何转换为第二种射影



图 12.29 说明这两个纽结是不等价的

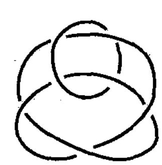


图 12.30 说明这个环绕不是平凡环绕

12.10 用环绕数来证明：图 4.20 所示的两个环绕是等价的，再用此结果论证：图 4.19 所示圆环的两个嵌入之间的环绕空间合痕不存在.

12.11　证明：在图 12.31 中的两个 3 分支环绕是不等价的.

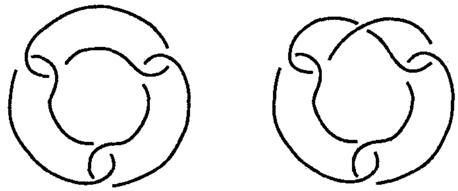


图 12.31　证明这两个环绕不等价

12.3　纽结多项式

W. 亚历山大（1888—1971）在他 1928 年的论文“纽结和环绕的拓扑不变量”中，对纽结引入了一种多项式不变量. 有了这种不变量，就有可能通过证明它们存在不同的相应多项式，来对纽结加以区分. 然而，亚历山大多项式在区分时受到限制，它允许存在不同的纽结，但它们却具有相同的亚历山大多项式. 在 20 世纪 80 年代，V. 琼斯发现了一种新的多项式不变量，现在称之为琼斯多项式. 这就导致可以加以区分的纽结的数量神奇地增加. 由于引入琼斯多项式，就发现了许多新的多项式不变量. 以下我们用 L. 考夫曼的方法来介绍琼斯多项式.

假设我们要为纽结和环绕构建一种多项式不变量. 我们假定它是一个劳伦多项式，这意味着多项式中变量的指数，既可以是正整数，也可以为负整数. 我们希望能对一个已知的纽结射影，来求出这个多项式. 然而，由于它是一个不变量，因此与特定的射影无关. 我们需要知道，它不受纽结射影改变的影响.

上一节我们发现，一个已知纽结的任何两个不同的射影，与一系列的赖德迈斯特运动有关. 所以，如果我们能从一个纽结射影构建一个多项式，使得它不受赖德迈斯特运动的影响，那么，此多项式对于所有的纽结射影来说，就都是一样的了. 我们就为这些纽结构建出了一种多项式不变量.

首先，让我们假定，已构建了可从一个纽结或一个环绕射影求出的，含有 3 个变量 A，B 与 C 的多项式. 最初，对于一个已知纽结的所有射影来说，我们假定相应的多项式是不同的. 最后，当我们为利用此多项式为定义一个多项式不变量而努力时，就把此多项式化为一个变量 A 的多项式. 我们把所得到的多项式，称为一个**换位多项式**，一个已知纽结或环绕射影 P 的换位多项式，记为$\langle P \rangle$. 为了简单起见，在本节随后的部分，我们所说的“射影”，指的就是“纽结或环绕射影”.

我们假定此多项式符合以下 3 个规则：

规则 1：$\langle \bigcirc \rangle = 1$，其中$\bigcirc$是不带交叉的一个平凡纽结射影. 这就是说，不带交叉的一个纽结射影，有多项式 1. 这是所谓的标准化条件.

规则 2：$\langle P \cup \bigcirc \rangle = C\langle P \rangle$.

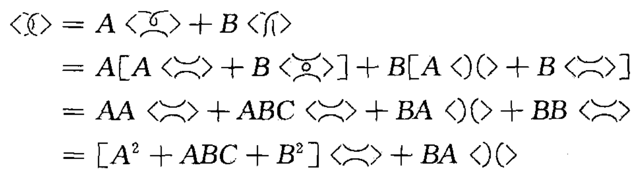
这个规则指出，把一个额外的非环绕的平凡分支$\bigcirc$加到射影 P 中，等于 P 的多项式乘以 C.

规则 3：$\langle \diagup\!\!\!\diagdown \rangle = A\langle)(\rangle + B\langle \asymp \rangle$，$\langle \diagdown\!\!\!\diagup \rangle = A\langle \asymp \rangle + B\langle)(\rangle$.

规则 3 指出，我们能利用与两个新射影有关的多项式（每个多项式具有的交叉要比 P 少）而得到与射影 P 有关的多项式．这称为**拧成束关系**．这样的关系有两种，但它们在本质上是相同的．

规则 3 的第一个版本指出，给定一个射影，如果我们在其中按照规则所述来安排选取一个交叉，而且垂直地切此交叉，以得到一个新的射影，再水平地切此交叉，以得到另一个新的射影，那么，这 3 个射影的这些换位多项式，通过这个等式相关联．规则 3 的第二个版本可类似地解释，但请注意，如果我们让第二个版本的每个示意图，都转动 90 度，就得到第一个版本，因而，正如我们已经指出过的那样，此关系的两个版本实际上是相同的．这种拧成束关系如何起作用，我们在随后许多场合使用它时就会清楚．

给出了这些规则，我们就要对 B 与 C 作出选择，使得所得到的多项式是一个不变量．特别地，我们希望它不受赖德迈斯特运动的影响．我们首先考虑第二类赖德迈斯特运动．应用换位多项式规则，我们得到下式：



为了使此换位多项式不受第二类赖德迈斯特运动的影响，我们就要求〈)(〉$=$〈)(〉．由我们刚推导出的这个关系式就可得出，$BA=1$ 和 $A^2+ABC+B^2=0$ 成立．原来的 3 个规则变为

规则 1：〈○〉$=1$

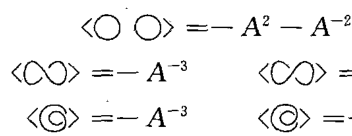
规则 2：〈P∪○〉$=[-A^2-A^{-2}]$〈P〉.

规则 3：〈╳〉$=A$〈)(〉$+A^{-1}$〈≍〉，〈╳〉$=A$〈≍〉$+A^{-1}$〈)(〉.

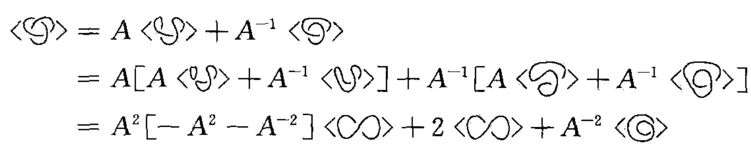
由这些新的规则我们就知道，所得到的多项式不受第二类赖德迈斯特运动的影响．

接下来，我们再来看几个特定射影的换位多项式．然后，我们再回过来考察，此换位多项式如何受赖德迈斯特运动的影响．

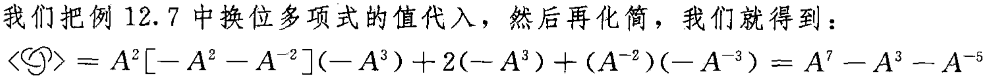
例 12.7 用规则 1～3 不难验证以下这些换位多项式．在练习 12.12 中要求完成此事．



例 12.8 现在我们来计算三叶纽结的射影的换位多项式．使用规则 3，就可以得到以下前两个等式，再用规则 2 和简单的代数运算，就得到第三个等式：



而如果我们把例 12.7 中换位多项式的值代入，然后再化简，我们就得到：



因此，射影的换位多项式是 $A^7-A^3-A^{-5}$.

现在我们再回到对换位多项式的赖德迈斯特运动的紧致性进行研究. 在第三类赖德迈斯特运动下，会发生什么情况呢？对第一种形式的第三类赖德迈斯特运动来说，我们可得出：

$$\begin{aligned}\langle \rangle &= A\langle \rangle + A^{-1}\langle \rangle\\ &= A\langle \rangle + A^{-1}\langle \rangle\\ &= \langle \rangle\end{aligned}$$

由拧成束关系，第一个和第三个等式成立. 再由换位多项式不受第二类赖德迈斯特运动影响的事实，第二个等式也成立. 如果已知以下事实：即换位多项式不受按我们所选取的 B 与 C 的第二类运动的影响，那么，就能方便地推出：换位多项式不受第一种形式的第三类赖德迈斯特运动的影响. 类似地可以证明，换位多项式不受第二种形式的第三类赖德迈斯特运动的影响.

最后，我们还必须考虑第一类赖德迈斯特运动的紧致性. 应用拧成束关系和我们的规则可得：

$$\begin{aligned}\langle \rangle &= A\langle \rangle + A^{-1}\langle \rangle\\ &= A\langle - \rangle + A^{-1}[-A^2-A^{-2}]\langle - \rangle\\ &= -A^{-3}\langle - \rangle\end{aligned}$$

在此多项式上，第一类运动有紧致性，这引起一系列的问题. 我们不能得到等式$\langle \rangle=\langle - \rangle$，这是为了使得在第一种形式的第一类赖德迈斯特运动下，此换位多项式是不变量所需要的. 类似的情况，在第二种形式的第一类赖德迈斯特运动时也会出现.

为了处理这一争论，我们需要另外的一个称为扭动的概念. 利用它就能对此换位多项式来定义纽结或环绕的不变量了. 此扭动可像环绕数一样来定义. 我们仅考虑在一个射影中的每个交叉，而不是只考虑那些涉及一个环绕的不同的分支.

定义 12.8 已知一个定向环绕的一个射影 P，P 的**扭动**记为 $w(P)$，它是当取遍 P 中所有交叉时标记为 $+1$ 或 -1 的和.

例 12.9 在图 12.32 中，第一个射影的扭动为 0，而第二个射影的扭动为 7.

请注意，当我们如图 12.33 所示，在一个射影上实现一个第一类赖德迈斯特运动时，扭动增加 1 或减少 1.

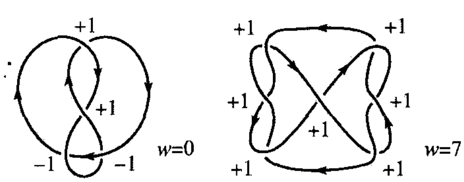


图 12.32 计算已知射影的扭动

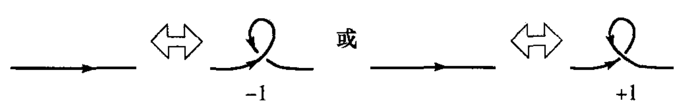


图 12.33 第一种运动使扭动增加 1 或减少 1

在这时我们已经对射影定义了换位多项式. 它不会因第二和第三类赖德迈斯特运动而改变，但在第一类赖德迈斯特运动下却会改变. 因此，换位多项式对纽结和环绕来说，不是一个不变量，由于它依赖特定的射影. 我们还定义了扭动，它是定向环绕射影的一种性质. 正如在定理 12.10 已证明的，这个多项式与一个纽结或环绕的特定射影无关，因而是一个多项式不变量.

定义 12.9 一个定向环绕射影 P 的**考夫曼多项式** X，定义为多项式 $X(P)=(-A^3)^{-w(P)}\langle P\rangle$.

定理 12.10 考夫曼 X 多项式，是纽结和定向环绕的一个不变量.

这个定理指出，X 多项式是纽结的一个不变量，无论它们是定向的还是非定向的. 而对于定向环绕来说，X 才是它的一个不变量. 引起这种差别的原因是，如果纽结的定向改变，一个定向纽结的射影的扭动不会改变，但如果在环绕分支之一上的定向改变，一个定向环绕的扭动就可能会改变.

证明 为了证明这个定理，我们就要证明，对于一个已知纽结或定向环绕的所有射影来说，X 多项式是相同的. 因此，需要证明它不受赖德迈斯特运动的影响.

首先，考虑第二类赖德迈斯特运动. 我们已经看到，此换位多项式不受第二类赖德迈斯特运动的影响. 所以此扭动也不受第二类赖德迈斯特运动的影响，由于这些运动要么增加符号相反的两个交叉，要么减少符号相反的两个交叉. 于是 X 多项式不受第二类赖德迈斯特运动的影响.

接下来考虑第三类赖德迈斯特运动. 而我们已经看到，换位多项式不受这种运动的影响. 此外第三类运动只是对交叉作了重新安排，而并没有改变其中任意一个交叉上的标记. 因此，此扭动不受第三类运动的影响. 于是可得出，多项式 X 不受第三类赖德迈斯特运动的影响.

最后，当我们实现第一类赖德迈斯特运动时，像图 12.33 中的左边那样，在我们的射影上系上一个扣，我们发现此扭动减少 1. 这导致此多项式被乘以 $-A^{-3}$. 然而由于同样的运动，正如我们在以前所导出的关系式⟨⟩$=-A^{-3}$⟨—⟩中所见到的，此换位多项式被乘以 $-A^{-3}$ 的一个因子. 因此，多项式 X 不受第一种形式的第一类赖德迈斯特运动的影响.

于是可得出，对于纽结和定向环绕来说，考夫曼 X 多项式是一个不变量. ■

例 12.10 我们来计算三叶纽结的考夫曼 X 多项式. 由例 12.8，我们有换位多项式

⟨⟩ $= A^7 - A^3 - A^{-5}$.

射影的扭动是 −3. 因此三叶纽结的考夫曼 X 多项式是

X() $= (-A^3)^3(A^7 - A^3 - A^{-5}) = -A^{16} + A^{12} + A^4$.

有了例 12.10 的结论，我们现在就可以证明，非平凡纽结是存在的. 特别地，我们有以下的定理：

定理 12.11 三叶纽结与平凡纽结不等价.

证明 平凡纽结的考夫曼 X 多项式是 1，因而不等于三叶纽结的考夫曼多项式. 由于考夫曼多项式是纽结的一个不变量，于是可得出，三叶纽结与平凡纽结不等价. ■

我们已经证得非平凡纽结是存在的. 我们不仅证明了这一结论，而且还有了区别许多纽结的一种手段. 事实上，用考夫曼 X 多项式，就可以区别如图 12.17 所示的所有具有不超过 6 个交叉的纽结.

考夫曼 X 多项式与 1984 年首先发现的琼斯多项式是等价的. 琼斯多项式是用一组规则来定义的，它们与定义换位多项式时所使用的 3 个规则稍有不同，结果是具有分数指数的一个多项式. 琼斯多项式可从考夫曼 X 多项式得到，不过，其中的 A 要用 $t^{-\frac{1}{4}}$ 取代.

12.3 节练习

12.12 计算在例 12.7 中每个射影的换位多项式，并验证在这时所给出的多项式.

12.13 （1）计算在图 12.34 左边所示的 n 分支平凡环绕的换位多项式.

（2）计算在图 12.34 右边所示的 n 分支平凡环绕的换位多项式.

12.14　计算图 12.35 中所示的射影的扭动.

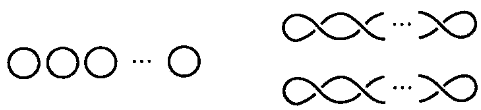


图 12.34　n 分支平凡环绕与拧成螺旋状的平凡纽结的射影

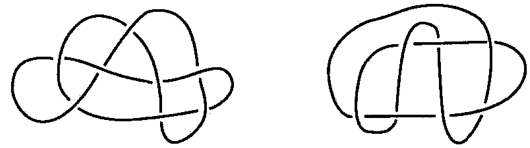
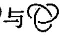


图 12.35　计算每个射影的扭动

12.15　计算三叶纽结的镜像的多项式，它的多项式已在例 12.10 中算出. 你计算出的结果对纽结与蕴涵什么结论？

12.16　求 8 字形纽结（在图 12.17 中上面一排第三个纽结）的多项式 X.

12.17　计算两个分支的平凡环绕，以及在图 12.36 中所示的每个定向霍普夫环绕的多项式 X. 得出这 3 种定向环绕是相异的结论.

12.18　一个纽结或环绕 L 最初的琼斯多项式 $V(L)$ 可通过对多项式 X 作替代 $A=t^{-\frac{1}{4}}$ 而得到.

（1）求 8 字形纽结的琼斯多项式.

（2）用拧成束关系来证明，琼斯多项式满足拧成束关系 $t^{-1}V(L_+)-tV(L_-)+(t^{-1/2}-t^{1/2})V(L_0)=0$，其中 L_+，L_- 与 L_0 是三个相同的射影，除非出现图 12. 37 中的那些部分.

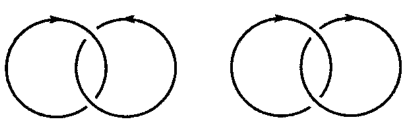


图 12.36　定向霍普夫环绕

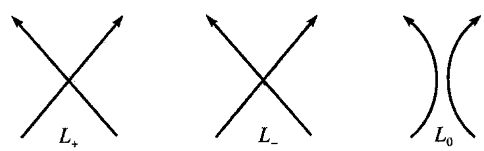


图 12.37　如图所示，L_+，L_- 与 L_0 仅在一个地方不同

12.4　在生物化学与化学中的应用

本节我们考虑纽结理论在 DNA 的酶机能，以及在化学设计上的应用.

DNA 中的纽结

在 5.2 节中，我们已介绍过 DNA 的结构，在那里我们曾指出，一个 DNA 分子由两条缚在一起的核苷酸链所组成. 这两个链彼此紧紧地缠绕在一起，与已经编织成一根细绳索的双股线的长短没有什么不同. 不管这种高阶结构如何，一个 DNA 分子——像一根绳索——可以建模为单独的又长又薄的一串. 此外，我们称一个 DNA 分子是环状的，如果分子的一端与另一端粘合在一起. 环状 DNA 分子是常见的，但是，在本节中我们所述的大多数结论，对非环状 DNA 分子也成立.

正如我们在本书引论中所说过的，DNA 压挤入一个细胞核中的状态，与把 200 千米的钓丝塞入一个篮球中的状况不相上下. 因而，与 DNA 缠结有关的问题，对生物组织来说是至关重要的. 作为一个例子，考虑 DNA 的复制过程. 两条核苷酸链从一个 DNA 分子中分离出来，而每一条核苷酸链，用于构建一个完整的新的分子的一个模板. 由于这些模板一开始就紧紧地缠绕在一起，因此两个新的分子天生地缠结在一起. 对于它们有用的是，细胞必须能把它们分离. 这会出现什么情况呢？

在细胞的核中，存在能使 DNA 缠结和解开的一些酶. 生物学家希望通晓每种这样的酶的

机理. 这样一种酶（即拓扑异构酶Ⅱ）具有DNA的两条链，把一条链切断，从另一条的间隙穿过，然后让第一条闭合. 交叉改变的总数，如图 12.38 所示.

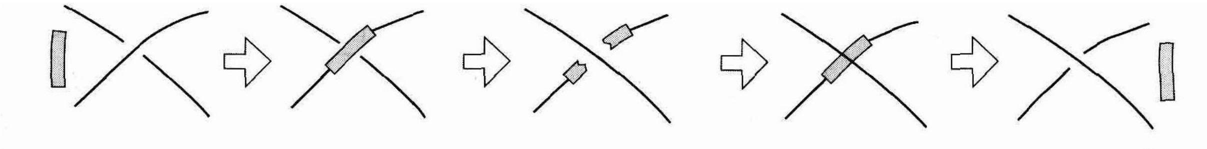


图 12.38 酶使交叉改变

我们还想知道，这样的运动是否足以使DNA解开. 以下的定理以肯定的方式回答了这个问题：

定理 12.12 已知一个纽结射影，存在这些交叉的一个子集，它能被转换成为得到平凡纽结的一个示意图.

证明 已知一个纽结射影 P，我们对此转换的交叉定义一个算法，使得所得到的纽结射影 P'与平凡纽结相对应.

不打结算法： 在射影 P 上，选取一个非交叉点作为起点，并选取一个运动方向. （见图 12.39.）当我们从起点环绕 P 作运动时，每次我们到达作为第一次的一个交叉，如果它还不是一个跨越交叉，就把它改变为相对于我们的位置的一个跨越交叉. （如果我们第二次到达一个交叉，它将是相对于我们的位置的一个跨越交叉，而我们让它保持原来的状态）当我们环绕 P 的全部路程运动时，继续这个过程，再回到起点.

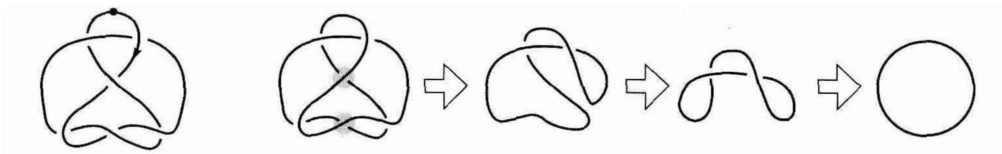


图 12.39 对不打结纽结改变交叉

图 12.39 中的例子，说明了不打结算法如何改变交叉（带阴影的交叉）以产生平凡纽结.

已知一个纽结射影 P，设 P'是对 P 进行非纽结算法所得到的纽结射影. 我们断言 P'是平凡纽结的一个射影. 为此，在 $\mathbf{R}^3$ 中我们作一个具有纽结射影 P'的一个纽结 K，然后证明 K 是平凡的.

假定纽结射影 P'位于 xy 平面上. 我们作纽结 K，使得它朝正下方投影到 P'上. 因此，在 P'中的每个点（x，y）之上，我们在 3 维空间中的纽结上选取一个点（x，y，z）. 在此纽结上选取一些点，使得当我们环绕 P'沿给定的方向从起点开始运动时，z 坐标连续减少，直到恰好在我们上一次遇到一个交叉之后，然后增加，使我们的路线回到我们在此纽结上所选取的第一个点. （见图 12.40.）

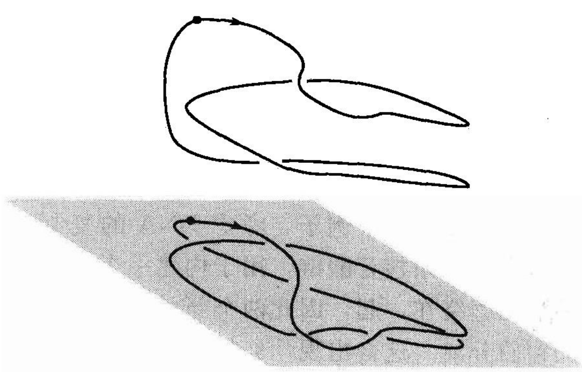


图 12.40 从一个纽结射影构建一个纽结

显然，如果我们把 K 朝正下方投影到 xy 平面，它投影到 P' 上．此外，由于 z 坐标照原样选取，在示意图上的每个交叉，我们就有适当的上交叉/下交叉的关系．最后，由于纽结 K 视为已作出，就不难发现，K 所减少的 z 部分，与 K 所增加的 z 部分会变形为组成 $\mathbf{R}^3$ 中一个平凡纽结的分离的半个圆周.（见图 12.41）于是得出，K 是平凡的，而 P'是 K 的一个纽结射影．■

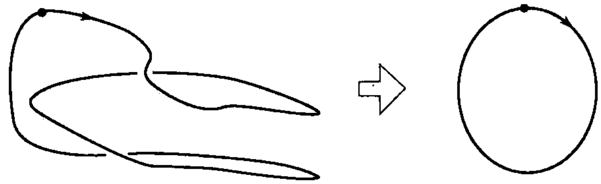


图 12.41　纽结 K 变形为一个平凡纽结

作为定理 12.12 的一个推论，为使得每个纽结实现非纽结化，所需改变交叉的数量存在最小值.

定义 12.13　一个纽结 K 的**不打结数**，是对 K 的所有纽结射影而言必须改变的交叉个数的最小值，上述交叉的改变，是为了把 K 的某个纽结射影转换为与平凡纽结所对应的纽结射影.

例 12.11　在图 12.42 的左边所示的 8 字形纽结是非平凡的.（见练习 12.16.）然而，改变一个交叉，就能把它转换为平凡纽结．因此，它的不打结数是 1.

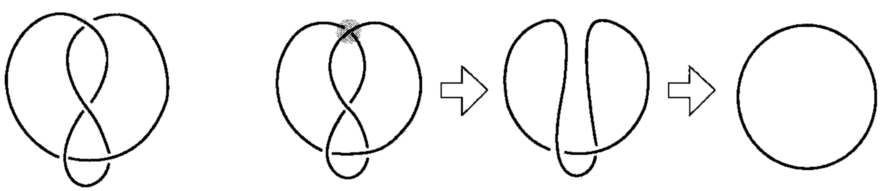


图 12.42　8 字形纽结通过改变一个交叉就可以成为平凡纽结

例 12.12　在图 12.43 的左边所示的纽结 7_4，借助右边所示的两个交叉的改变，可以是非纽结的．然而，为了证明它的不打结数是 2，就需要证明，它不具有这样一个示意图，对此示意图，通过改变一个交叉，就可以作出平凡纽结的一个示意图．尽管可以证明这一结论，但是，在这里没有证明它所需的数学工具.

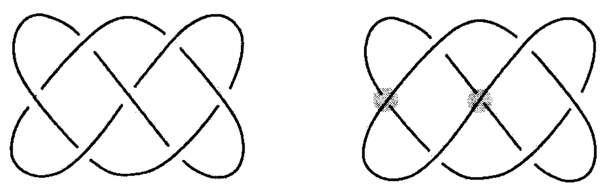


图 12.43　不打结的 7_4 纽结

除了拓扑异构酶Ⅱ以外，还有其他一些酶，也能在 DNA 链上实现复杂的作用．当这些酶处于分离状态，纽结理论方面的性质，可用来对它们的功能进行分类.

一种酶在实验室里一旦被分离出来，就被应用于一族非纽结型的环状 DNA 分子．于是，源于应用的各种纽结被确定，而酶的作用由这些纽结推断出来．但是如何来确定所形成的纽结呢？它们是如此微小，即使有时可以使用电子显微镜来确定单独一个 DNA 分子的纽结，但是，提出有效使用这种方法的分子太多了.

幸好，生物学家根据分子的物理和化学性质，已经开发出了许多分离它们混合物的方法．例如，如果尺寸可变分子的混合物通过一种多孔的材料，不难想象，较小的分子以摇晃的方式首先通过．一个分子中纠结的程度，也影响在这种材料中通过的能力．在这一种称为凝胶电泳的过程中，实验已经证实，对于数量较小的交叉，一个纽结通过多孔材料的速度，与交

叉的数量成比例. 这种方法已用于把纽结混合物分为组成它的纽结类型. 于是，各种类型的纽结，由电子显微镜反映出来，从而能够洞察新酶的功能.

用于抗肿瘤化学疗法的药品阿霉素，借助传承 DNA 复制的能力（对细胞组成部分来说，是不可或缺的），特别能阻止来自非纽结 DNA 的酶. 由于肿瘤细胞分裂非常迅速，上述这种效应，使它们特别易受伤害，从而使此药成为一种有效的抗肿瘤药.

合成化学中的纽结

除了环状的 DNA 分子以外，许多较简单的分子，也包括环状的成键的原子. 环状分子的一个著名例子，是在图 12.44 中所示的，由 6 个碳原子和 6 个氢原子键合而成的苯.

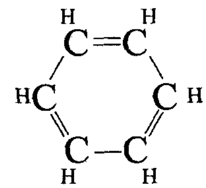


图 12.44　苯分子的示意图

在化学中，使用许多其他常见的环状分子. 而像苯一样，它们以一种不打结的形式出现. 然而已知一个具有不打结形式的环状分子，一个显而易见的问题是，我们是否同样能构建此分子的一个纽结版本. 此外，此分子的纽结版本，是否具有与不打结版本不同的化学和物理性质呢？

近年来化学家首先合成出一种纽结型分子. 这样做的一个挑战是，构建一个含有较少（与有上百万个原子和简单形式纽结的 DNA 相比而言）原子的纽结型分子. 1988 年施陶博格大学的 C. 迪特里希-布赫克尔和 J-P. 索瓦热成为合成纽结型分子的第一批化学家. 他们的合成过程，需要某些有创意的化学理论，用两个铜离子，让两个分子链保持特定的形状，使得此时这两个链相连，而这两个铜离子消失，这样所得到的分子是纽结状的. 这个分子由 104 个碳原子、104 个氢原子、8 个氮原子和 14 个氧原子组成. 在图 12.45 中，画出了这个分子的示意图. 在此示意图中，每个未作标记的顶点表示，一个碳原子要么与 0 个、1 个氢原子相结合，要么就与 2 个氢原子相结合，使得在每个碳原子周围都有 4 个键.（每个双道的边算作两个键.）

自从纽结状分子首先被合成出以来，对开发和研究它们形成方法的兴趣持续不减. 化学家一旦发现合成纽结状分子的简单方法，化学产品的一个新世界就可望形成. 每个不同的纽结，可能与不同的分子相符，后者是由同一组按同样环状顺序键合而构成的原子产生. 已知一个特定的环状分子，对不同纽结状分子数量的唯一界限，可以由环状分子来确定，这是此分子的柔性. 区别两个纽结状分子之间的不同，以及确定它们性质的过程，对于我们理解纽结及其性质当然是有利的.

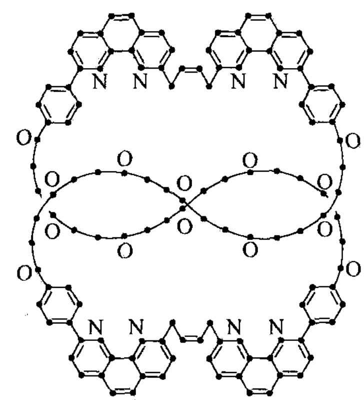
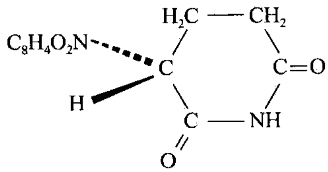


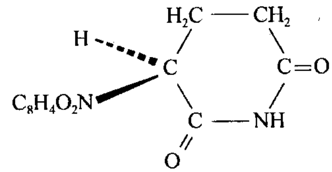
图 12.45　首先合成的纽结状分子的示意图

被称为手性的这种性质，在化学中是很有意义的，即使这些分子既不是纽结状的，也不是环状的. 在其镜像上不重叠的分子，称为具有**手性**，否则称为**非手性**. 药品萨立多胺是手性分子的一个例子. 图 12.46 所示的，是（R）型萨立多胺与（S）型萨立多胺的示意图. 这两个分子借助书页所在平面上的一个反映互为镜像. 在此图左边的（R）型萨立多胺与实心带子相连，表明原子 H 在书页所在平面的前面；而与虚线的带子相连，则表明 $C_8H_4O_2N$ 基在此平面的后面.（S）型萨立多胺

的情况是反转．如果我们试图通过旋转（R）型萨立多胺，来把它迭加到（S）型萨立多胺之上，使得原子 H 与每个 $C_8H_4O_2N$ 基一致，于是，这两个分子余下的部分，完全不连成一线．因此，萨立多胺是一个手性分子．



（R）型萨立多胺



（S）型萨立多胺

图 12.46　（R）型萨立多胺与（S）型萨立多胺分子

化学家充分认识到手性的重要性．手性分子与它的镜像，有类似的物理性质，与非手性分子有类似的交互作用，但是，它们与另一些手性分子却可能有引人注目的不同反应．萨立多胺（“反应停”）是一个经典的例子．在 20 世纪 50～60 年代，它曾被指定为孕妇用药，以减轻孕妇怀孕初期时的恶心．（R）型㊀萨立多胺在这方面㊁确实是有效的，但此药㊂却很快引发了导致出生缺陷的一个浪潮㊃．现在已广为人所知，罪魁祸首正是（S）型萨立多胺，因此，对此药提出了剂量的限制，以应对这些不幸效果的出现．“反应停”的病例，在以下两方面引起了关注：一是手性化合物的生物化学，另一是采用更严格的药物安全报告书．

如果我们考虑纽结状的分子，那么，就恰好面临来自纽结理论方面重要的手性问题．例如，如果由一个纽结所表示的分子，与它的镜像不等价，那么，此分子当然是手性的．因此，研究一些纽结与它们的镜像等价是有意义的．

一个纽结 K 的镜像，通过在 $\mathbf{R}^3$ 中一个平面上取 K 的镜中影像而得到．立即可证明，此镜像的纽结类型与平面的选取无关．如果我们有 K 的一个示意图，且在此示意图的平面上求 K 的镜中影像，那么就可得出结论：通过改变所有交叉的手段，就可以把 K 的示意图，转换为所产生镜像的示意图．（见图 12.47.）

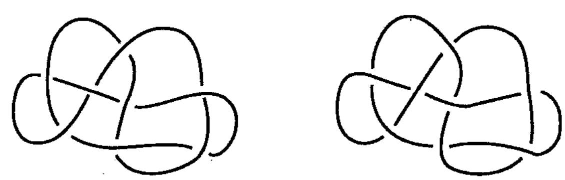


图 12.47　一个纽结及其镜像的示意图

在图 12.10 中，我们表示出了从 8 字形纽结开始的变形．如果你在图示的最后一步旋转 180 度，并再让此纽结稍作变形，容易看出，你以变形开始时此纽结的镜像而告终．因此，8 字形纽结与它的镜像是等价的．另一方面，三叶纽结与它的镜像有相异的考夫曼 X 多项式，因而彼此不等价．（见例 12.10 和练习 12.15.）

定义 12.14　一个与它的镜像等价的纽结，称为是**兼手性的**．否则，此纽结称为是**手性的**．

我们可以用考夫曼 X 多项式，来帮助确定一个纽结是否为手性的．首先，我们有以下的

㊀　指右旋型的．——译者注

㊁　指镇痛．——译者注

㊂　指（S）型即左旋型萨立多胺．——译者注

㊃　据统计，“反应停”致畸的案例全世界达 17 000 例以上，是 20 世纪最大的药害事件．——译者注

定理，它表明一个纽结的考夫曼 X 多项式，与它镜像的多项式有关：

定理 12.15　*设 K 是一个具有考夫曼 X 多项式 P，如果 K^* 是 K 的镜像，那么，K^* 的考夫曼 X 多项式，可通过在 P 中以 A^{-1} 替代 A 而得到.*

证明　见练习 12.23. ■

从定理 11.15 可得，如果一个纽结的考夫曼 X 多项式，在以 A^{-1} 替代 A 时改变，那么，此纽结和它的镜像不等价，因而此纽结是手性的. 在以 A^{-1} 替代 A 时不改变的多项式，是旋转对称的，这是多项式的一种性质，定义如下：

定义 12.16　*一个多项式*

$$a_{-n}A^{-n}+a_{-n+1}A^{-n+1}+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}+a_nA^n$$

*称为**旋转对称的**，如果对于任一 $j=1, \cdots, n$ 都有 $a_{-j}=a_j$.*

于是，如果一个多项式的系数朝前或朝后看都一样，那么它是旋转对称的. 显而易见，当且仅当多项式

$$a_{-n}A^{-n}+a_{-n+1}A^{-n+1}+\cdots+a_{n-1A}{}^{n-1}+a_nA^n$$

在以 A^{-1} 替代 A 时不改变，那么它是旋转对称的.

于是，我们就得到下述定理 12.15 的推论.

推论 12.17　*如果纽结 K 的考夫曼 X 多项式不是旋转对称的，那么 K 是手性的.*

推论 12.17 形成有关纽结手性及纽结状分子的一种简单的检验法. 按照这种途径，就有可能使用来自拓扑学和纽结理论的基本理念，以区分分子之间的差别.

合成用于化学的化合物，并对它们加以区分是合成化学的重要方面. 确定所得到化合物的性质也很有意义. 在 13.2 节中，我们将说明拓扑图如何用于协助人们来预测分子的性质的.

12.4 节练习

12.19　请描述对在一个 n 分支环绕的环绕射影中的交叉加以改变，使得结果是一个具有 n 分支的平凡环绕的环绕射影.

12.20　确定在图 12.48 中所出现的那些纽结的不打结数.

12.21　证明：在图 12.49 中的每个纽结的不打结数至多为 2.

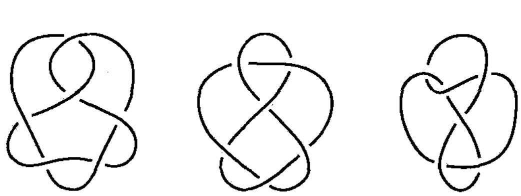


图 12.48　确定不打结数

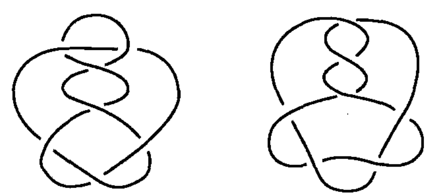


图 12.49　证明每个纽结的不打结数至多为 2

12.22　画出与图 12.45 中的纽结状分子有关的纽结的草图. 然后通过画出这两个纽结之间的变形，来确定在图 12.17 中所出现的纽结与上述有关的纽结等价.

12.23　**证明定理 12.15**：设 K 是一个具有考夫曼 X 多项式 P，如果 K^* 是 K 的镜像，那么，K^* 的考夫曼 X 多项式，可通过在 P 中以 A^{-1} 替代 A 而得到.（提示：首先证明此结论对于换位多项式成立，然后证明它对考夫曼 X 多项式成立.）

12.24　证明：图 12.17 中最上面一排的最后一个纽结 5_2 是手性的.

第13章 图论与拓扑学

在本书的引论中我们就已指出，欧拉为哥尼斯堡七桥问题提出解决方案之时，可以认为是拓扑学这一领域诞生的日子．同样也可认为，它是图论这一领域的起点．当然，这两个领域之间存在部分重迭，而此重迭又是这两个领域各自的子学科，因此称为拓扑图论是很恰当的．

在 13.1 节，我们考虑图与它的某些性质．在 13.2 节，我们提出在化学中有关定量结构关系性质方面的一个应用，其中分子的结构形态（例如，图的模型），用于预测分子的性质．在 13.3 节，我们给出与图的嵌入有关的重要问题和结论．在最后一节，我们引进交叉数和图的厚度的概念，还将讨论在电子线路设计中的一个应用．

13.1 图

本节将介绍与图有关的某些基本性质和结论．随后，我们以图为工具来形成适用于解决哥尼斯堡七桥问题的一些概念．

在图论中，把一个图 G 抽象地定义为顶点的一个有限集 V_G，以及作为顶点无序偶 $\{v_i, v_j\}$ 的有限集 E_G．E_G 的元素，称为 G 的边．

人们认为，在拓扑图论中，一个图是由两个有限集所组成，一个是被称为 G 的顶点的集合 V_G，另一个是连接顶点的边的集合 E_G．每条边是这样得到的：先在 $\mathbf{R}$ 中取一个有界闭区间，再把它的一个端点与顶点 v_i 相粘合，而把另一个端点与顶点 v_j 粘合在一起．（见例 3.17.）

图论中的抽象图，与拓扑图论中的拓扑图有明显的对应关系．在本章，我们对抽象图与拓扑图不加区分，都使用图这个术语．在需要关注它们的差别时，从上下文就能对它们的含义一目了然．

设 G 是一个图，如果 e 是在 G 中以 v_i 与 v_j 为顶点的一条边，那么，称 e 和顶点 v_i 与 v_j 为相互**关联的**．而称 e 为与顶点 v_i 与 v_j **相邻接**．

重要注记 *在本章的许多地方，我们往往通过从一个特定的图中删去顶点或边的方法来构建一个图．在此时，当我们从一个图删去一条边时，不必删去与此边邻接的顶点，但已被我们明确指出的除外．*

一个图是一个紧致的豪斯多夫空间．（见练习 13.1.）因此，在一个图中的单点集是闭集．特别地，每个顶点作为一个单点集是闭的．一个图中的每条边是此图的一个紧致子集，这是由于，它是在一个连续函数（把边和顶点粘合在一起的商映射）下的一个紧致空间的象．由于图是豪斯多夫的，于是可得出，每条边是此图中的一个闭子集．

例 13.1 完全图和完全二部分图是两族重要的图．***n* 个顶点的完全图**是有 n 个顶点和一族边的图 K_n，其中每对相异的顶点，由单独的一条边相连．（见图 13.1.）

n 个顶点的完全图可为"握手问题"建模，这个问题是：如果 n 个人彼此握手，握手的总次数是多少？

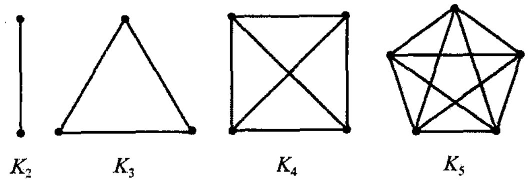


图 13.1 完全图 K_2，K_3，K_4 与 K_5

完全二部分图 $K_{m,n}$ 是一个有 $m+n$ 个顶点的图，它可分为分别具有 m 个与 n 个顶点的集合 V_m 与 V_n，使得

(1) 每条边把 V_m 中的一个顶点，与 V_n 中的一个顶点相连.

(2) 每对顶点 $v \in V_m$ 与 $v' \in V_n$，由单独的一条边相连.

完全二部分图的例子，已在图 13.2 中表示出来.

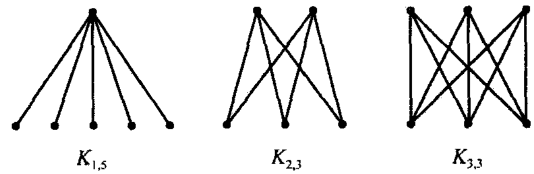


图 13.2 完全二部分图 $K_{1,5}$，$K_{2,3}$与 $K_{3,3}$

图 $K_{3,3}$可为一个广为人知的称为"三项公共设施问题（简称气水电问题）"的，与钢笔和纸打交道的难题建模，这个问题问：三个住宅是否能与三项公共设施（燃气、自来水和电气）相连，而这些住宅和这些设施之间没有线路的交叉. 这相当于问，$K_{3,3}$是否能嵌入平面. 在 13.3 节中，我们将进一步讨论这个问题.

定义 13.1 设 G 是一个图，对于每个顶点 $v \in G$，v 的度定义为与 v 关联的边数. 如果 v 与自身相连，边数以 2 计.

我们可以认为，一个顶点 v 的度，是沿着与 v 关联的那些边而到达 v 的不同路径的个数.

例 13.2 在图 13.3 中，在这两个图的每个顶点处，我们对度作了标记.

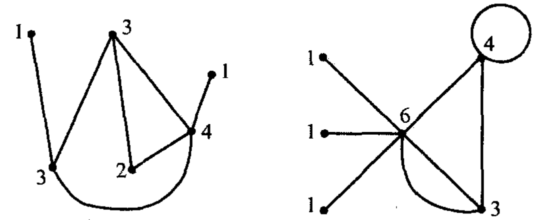


图 13.3 顶点的度

例 13.3 在 n 个顶点的完全图 K_n 上，每个顶点的度为 $n-1$. 在完全二部分图 $K_{m,n}$上，有 m 个度为 n 的顶点，它们把图的边，与度为 m 的 n 个顶点相连.

对于图来说，等价性定义如下：

定义 13.2 图 G 与图 G' 是**同构**或**图等价的**，如果存在相应顶点集合之间的一个双射函数 f：$V_G \to V_{G'}$，使得对于任一 v，$w \in V_G$，在 G 中连接 v 与 w 的边数，与在 G' 中连接 $f(v)$ 与 $f(w)$ 的边数相等. 这样的函数 f，称为**图同构**.

已知一个图同构 f，立即可看出，f 导致一个同胚 f^*，它把图 G 映射到图 G'，并把 G 的顶点双射到 G'的顶点. 与此相反的情况也成立. 特别地，我们有以下的定理：

定理 13.3 设图 G 与 G'分别具有顶点集 V_G 与 $V_{G'}$. 如果存在把 V_G 双射到 $V_{G'}$ 的一个同胚 h：$G \to G'$，那么 G 与 G'是同构的，而由 $h_V(v)=h(v)$ 所定义的函数 h_V：$V_G \to V_{G'}$ 是一个**图同构**.

证明 见练习 13.3. ■

如果我们放弃定理 13.3 中的一个假定：h 把 G 的顶点集双射到 G'的顶点集，那么，未必能得出 G 与 G'是同构的结论. 例如，图 13.4 中的两个图是同胚的，但不同构.

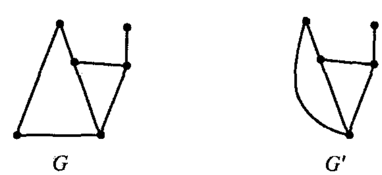


图 13.4 图 G 与 G'是同胚的，但不同构

概括以上的定义、定理和例子，对于图 G 与

G'，我们有两种等价概念：

(1) **拓扑等价**：图 G 与 G' 是同胚的.

(2) **图等价**：通过把图 G 的顶点集双射到图 G' 的顶点集的一个同胚，图 G 与 G' 是同胚的.

通常我们允许图有**平行边**（与一对顶点相联的两条或多条边）和**圈**（与一个顶点自身相连的边）. 但是我们对不出现上述情况的图也很感兴趣：

定义 13.4 一个图称为是**简单的**，如果它没有平行边和圈.

在图 13.5 中，图 G_1 与 G_2 是简单的，G_3 与 G_4 则不是.

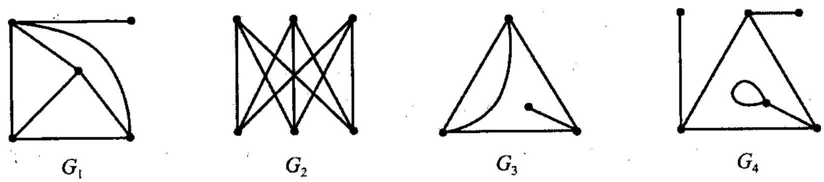


图 13.5 前两个图是简单的，后两个图则不是

定理 13.5 如果 G 是一个图，那么存在一个与 G 同胚的简单图 G'.

证明 设 G 是一个图. 按以下的步骤来构建一个新图 G'. 对于 G 中的每条边 e，连接顶点 v 与 v'，再添加两个相异的顶点 v_1 与 v_2，并用 3 条相异的新边 e_1，e_2 与 e_3 来取代 e，使得 e_1 同 v 与 v_1 相连，e_2 同 v_1 与 v_2 相连，而 e_3 同 v_2 与 v' 相连.（见图 13. 6.）这样所得到的图 G'，与简单图 G 是同胚的. ■

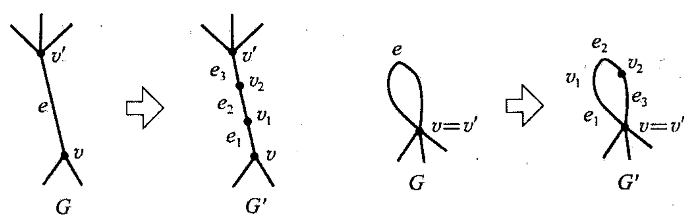


图 13.6 添加一些边和顶点以构成一个简单图

定义 13.6 设 G 是一个图，v 与 v' 是 G 的顶点. **从 v 到 v' 的一个通道**，是一些顶点与边的交替序列，

$$v=v_0,e_0,v_1,e_1\cdots,v_{n-1},e_{n-1},v_n=v',$$

使得对于任一 $i=0$，1，…，$n-1$，边 e_i 同 v_i 与 v_{i+1} 相连.

以下的定义引进了在图论中感兴趣的一些不同类型的通道：

定义 13.7 设 G 是一个图.

(1) 一个**闭通道**，是起点与终点为同一顶点的通道.

(2) 一个没有重复边的闭通道，称为一个**回路**.

(3) 一个没有重复（第一个和最后一个顶点除外）的回路，称为一个**环**.

例 13.4 在图 13.7 所示的图中，与以下的按顺序的边 1～7 相对应的通道是一个回路，

但不是一个环，而与按 1～4 的顺序的边相对应的通道是一个环.

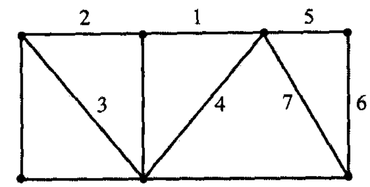


图 13.7 一个回路（1～7）与一个环（1～4）

定义 13.8 设 G 是一个图.

(1) 如果 G 没有环，那么我们称 G 是**无环图**.

(2) 如果 G 至少有一个环，那么 G 的**围长**，是在 G 的任意环中的最小边数.

例如，如果 m，$n\geqslant 2$，那么完全二部图 $K_{n,m}$ 的围长为 4，而如果 $n\geqslant 3$，那么，完全图 K_n 的围长为 3.

以下的定理提供了确保一个图至少有一个环的条件：

定理 13.9 如果一个图 G 中的每个顶点的度至少为 2，那么在 G 中存在一个环.

证明 取 G 的一条边 e_0. 设 v_0 和 v_1 是与 e_0 关联的顶点. 如果 $v_0=v_1$，那么结论就已经成立，由于那时 v_0，e_0，v_1 是一个环. 否则，设 e_1 是与 v_1 关联且不等于 e_0 的一条边. 这是不可能的，这是由于每个顶点的度至少为 2. 再设 v_2 等于通过 e_1 与 v_1 相连的顶点. 如果 $v_2=v_1$ 或 $v_2=v_0$，那么正如以前一样，结论就已经成立. 否则，就取一条与 v_2 关联且不等于 e_1 的边 e_2.

我们继续上述过程. 由于在 G 中只有有限个顶点，那么，在某个点就必定有一个没有重复边的通道

$$v_0, e_0, v_1, e_1, \cdots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m,$$

这个通道直到 v_{m-1} 没有重复顶点，而对于 0 与 $m-1$ 之间的某个 k 成立 $v_m=v_k$. 于是 v_k，e_k，…，e_{m-1}，v_m 是 G 中的一个环. ■

定义 13.10 设 G 是一个图. G 中的一个**欧拉通道**，是访问 G 中每条边刚好一次的通道. G 中一个**欧拉回路**，是 G 中一个封闭的欧拉通道. 我们称 G 是**欧拉图**，如果它包含一个欧拉回路.

在图 13.8 中，左边的图，描绘出了一个欧拉通道（其边按照图示的数字为顺序），右边的图，描绘出了一个欧拉回路.

在 0.2 节中曾介绍过的哥尼斯堡七桥问题是问，在相关的图 K 中，是否存在一个欧拉通道，此图是为哥尼斯堡的陆地区域（一些顶点）和桥（一些边）所建立的模型.（见图 13.9.）

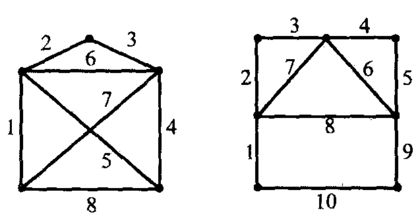


图 13.8 欧拉通道与欧拉回路

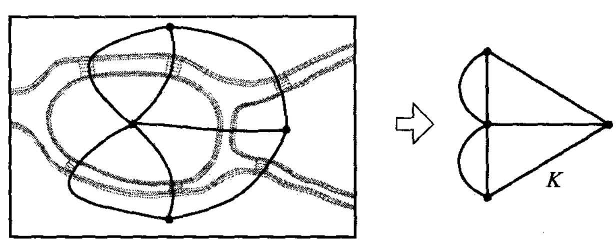


图 13.9 用图 K 为哥尼斯堡七桥问题建模

欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题时，在本质上，为一个具有欧拉通道或欧拉回路的图，确认了必要和充分条件，并证明了必要性，不过，当然没有使用尚待开发的图论的说法. 我们用以下的定理，来叙述欧拉所得出的图论版本的结论：

定理 13.11 设 G 是一个连通的图.

(1) 在 G 中存在一个欧拉回路，当且仅当 G 的所有顶点的度为偶数.

(2) 在 G 中存在一个不是欧拉回路的欧拉通道，当且仅当 G 恰好有两个度数为奇的顶点. 这样的通道，必定开始于度数为奇的一个顶点，而终止于度数为奇的另一个顶点.

我们来证明定理 13.11 (1) 蕴涵的必要性，也就是证明，如果一个图有一个欧拉回路，那么，G 的所有顶点的度为偶数. 其逆命题是本节末的一组补充练习中的课题. (2) 的证明与 (1) 的证明类似.

(1) 中必要性的证明 设 G 是一个图，且

$$v_0, e_0, v_1, e_1, \cdots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n = v_0$$

是 G 中的一个欧拉回路. 我们来证明 G 的所有顶点的度为偶数.

设 v 是在此回路中异于 v_0 的一个顶点. v 每次访问此回路，它就到达与它关联的一条边，并离开另一条边. 每种这样的到达与离开，都为 v 的度赋予 1，因而每次对 v 的访问就使它的度增加 2. 由于在一个回路，每条边恰好被访问一次，v 的度是在此回路访问 v 的次数的两倍. 因此 v 的度是偶数.

对于顶点 v_0，同样的论证蕴涵：度是 1（对于边 e_1）加 1（对于边 e_{n-1}）再加上访问 v_0 次数的两倍，其中 v_0 位于此回路的起点与终点之间. 于是 v_0 的度也是偶数. ■

定理 13.11 为我们提供了哥尼斯堡七桥问题的一个解. 由于哥尼斯堡图 K 有度数为奇的 4 个顶点，于是可得出，在 K 中，既没有欧拉回路，又没有欧拉通道. 因此，走过哥尼斯堡每座桥梁恰好一次的遨游全城的漫游路线，是不可能存在的.

13.1 节练习

13.1 设 G 是一个图. 证明 G 是紧致的，且是豪斯多夫空间.

13.2 确定在图 K_n 与 $K_{m,n}$ 中有多少条边，请验证你的论断.

13.3 **证明定理 13.3**：设图 G 与 G' 分别具有顶点集 V_G 与 $V_{G'}$. 如果存在把 V_G 双射到 $V_{G'}$ 的一个同胚 h：$G \to G'$，那么 G 与 G' 是同构的，而由 $h_V(v)=h(v)$ 所定义的 h_V：$V_G \to V_{G'}$，是一个图同构.

13.4 证明：如果 G 是一个图，那么 G 的每个分量也是一个图.

13.5 (1) n 取何值时图 K_n 是欧拉图？验证你的答案.

(2) m 与 n 取何值时图 $K_{m,n}$ 是欧拉图？验证你的答案.

13.6 设 G 是一个图. 证明：G 有度数为奇的偶数个顶点.

13.7 画出所有具有 8 条或不超过 8 条边的无环图（直到图同构为止）. 指出哪些边是同胚的.

13.8 设 G 是一个具有 V 个顶点和 E 条边的无环图. 证明 $E<V$.

13.9 (1) 证明：如果从哥尼斯堡的七座桥梁中除去任何一座，那么，就可能存在走过哥尼斯堡每座桥梁恰好一次并遨游全城的漫游路线.

(2) 证明：如果在哥尼斯堡任何相异的两个陆地区域之间建一座新桥，那么，就可能存在走过哥尼斯堡每座桥梁恰好一次并遨游全城的漫游路线.

(3) 证明：你可以在哥尼斯堡七桥中任选一座，并把它移到新的位置，使得在作此移动之后，就可能存在走过哥尼斯堡每座桥梁恰好一次，起点与终点在同一位置并遨游全城的漫游路线了.

13.10 对于图 13.10 所示的每个图，用定理 13.11 来确定，其中是否有图存在一个欧拉通道，或一个欧拉回路，或者二者都不存在. 如果此图有一个欧拉通道或一个欧拉回路，在图上画出它的草图来.

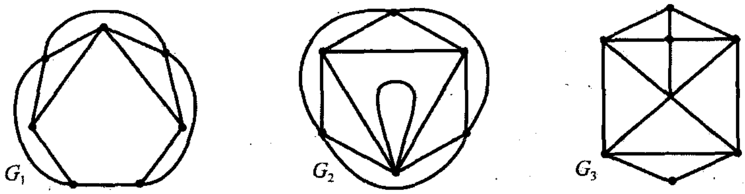


图 13.10　在上述每个图中存在一个欧拉通道或一个欧拉回路吗

补充练习：欧拉回路的存在性

通过以下这些练习，我们来证明蕴涵于定理 13.11（1）的充分性．也就是说，我们要证明，如果 G 是一个连通图，G 的所有顶点的度为偶数，那么，在 G 中存在一个欧拉回路．在证明时，通过对 G 中的边数用数学归纳法来进行．

SE13.11　在 G 有一条边的情况，证明上述定理．

然后假定 G 有 n 条边，对于边数在 1 和 $n-1$ 之间的图来说，结论成立．我们来证明，在 G 中存在一个欧拉回路．由定理 13.9 可得，在 G 中存在一个环

$$v_0, e_0, v_1, e_1, \cdots, v_{j-1}, e_{j-1}, v_j = v_0,$$

在此环中的每一条边恰好被访问一次，但是此环不需要访问此图的每一条边．设 E^* 是在此环中边的集合，并设 V^* 是在此环中仅与 E^* 中的边关联的顶点的集合．再设 G' 等于从 G 中通过删去 E^* 中的所有边，以及 V^* 中的所有顶点而得到的图．

SE13.12　证明：在 G' 中的每个顶点的度为偶数．

G' 未必是连通的，但是它的每个分量是连通的．设 C 是 G' 的一个分量．于是可得，C 是一个图（见练习 13.4）且是连通的．此外，C 的边数在 1 与 $n-1$ 之间，而 C 中的每个顶点的度为偶数．因此，由数学归纳法可得，C 有一个欧拉回路．

SE13.13　证明在 G 中一个欧拉回路的存在性．

于是，由数学归纳法可得出，如果在一个图 G 中的每个顶点的度为偶数，那么，G 有一个欧拉回路．

13.2　化学图论

在化学中广泛使用图论模型．特别是，在一个分子中的原子，用一个图的顶点来表示，而键则用边来表示．人们的基本目标是，要确定一个分子的性质，可以通过它的图论模型的性质来推断．本节我们提出一个特别的例子，其中一类称为烷烃的碳氢化合物的燃点，可以通过这些分子的图论模型来确定．

在化学中，一个描述符，是从分子结构的定量方面用于确定分子性质的一种建模工具．一族描述符，产生所谓的定量结构性质关系（QSPR）．成百个 QSPR 描述符，已经被确认用于对一些分子进行分析，它们已被分成 5 个公认的范畴：结构的、拓扑的、静电的、几何的和量子化学的．某些拓扑描述符，源于分子的图论模型的一些性质．在此，我们提出其中的一个，即威纳指数，是 1947 年威纳[⊖]首先提议把它用于化学建模之后被命名的．我们以下要介绍的这个应用，取材于论文［Rou］．

定义 13.12　设 G 是一个连通图．

⊖ 美国化学家．——译者注

(1) 对于 G 中的顶点 v 与 v'，我们定义 **v 与 v' 之间的距离**为在 G 中从 v 到 v' 的一个通道中边数的最小值.

(2) G 的**威纳指数**记为 $W(G)$，它是 G 中每对顶点之间距离之和.

例 13.5 在图 13.11 中表示出了 4 个图及其威纳指数.

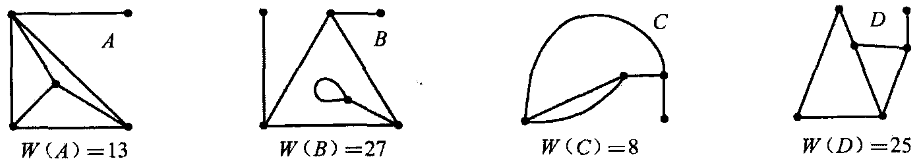


图 13.11 一些图的威纳指数

在图 13.11 中所表示的图 C 与 D 是拓扑等价的，但是，它们的威纳指数却不相等. 于是，在拓扑等价下，威纳指数不能保持不变. 然而，正如以下的定理所指出的，在图同构的情况下，威纳指数保持不变：

定理 13.13 如果连通图 G 与 G' 是同构的，那么 $W'(G)=W(G')$.

证明 见练习 13.15. ■

我们对一类称为烯烃的分子应用威纳指数. 存在直链或支链的碳氢化合物，其中碳原子之间的每个键，是一个单独的共价键（直链或支链的含义，随后将显而易见.）

最简单的是甲烷、乙烷和丙烷. 这些烯烃全都是直链的碳氢化合物. 每一种都已在图 13.12 中表示出来.

在一个烯烃中，每个碳原子产生一个总数为 4 的，与其余氢和碳原子相连的键. 存在一个与一些碳原子以键相连的骨架，每个碳原子的其余键，被一些氢原子接纳.

从一个特定的烯烃表达式，我们可以构成一些表达式，通过在原表达式中一个碳原子和一个氢原子之间，插入一个新的附带两个氢原子的碳原子，使得它们有附加的碳原子. 这是对一些表达式的一种运算，而不是一种化学过程. 于是从丙烷的表达式，我们就可以构成两种包含 4 个碳原子的烯烃：丁烷和二甲基丙烷.（见图 13.13.）二甲基丙烷分子是最简单的支链烯烃.

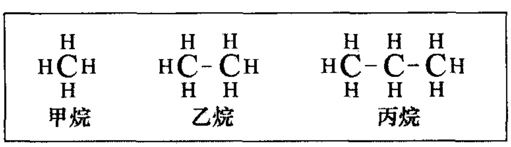


图 13.12 烯烃甲烷、乙烷和丙烷

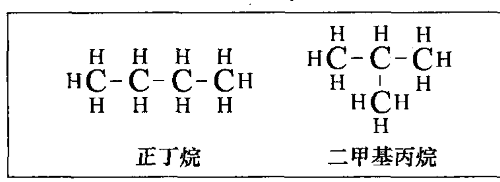


图 13.13 两种 4 碳烯烃：丁烷和二甲基丙烷

从具有 4 个碳原子的烯烃，我们可以构成如图 13.14 所示的 3 种 5 个碳原子的烯烃.

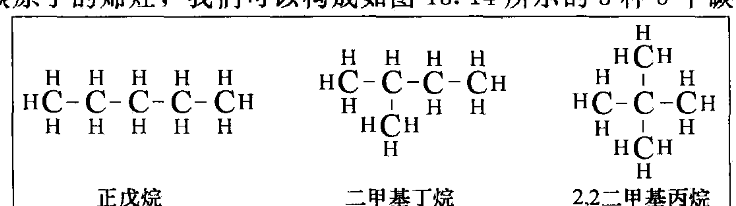


图 13.14 三种 5 个碳原子的烯烃

我们用图来为烯烃建模，使得每个碳原子对应于一个顶点，而每个碳原子之间的键，对应于一条边. 于是，带键碳原子的骨架就确定了此图. 我们忽略了氢原子和氢-碳键，由于当碳原子的配置为已知时，它们是隐藏着的. 包含 2～5 个碳原子的烯烃的图论模型如图 13.15 所示.

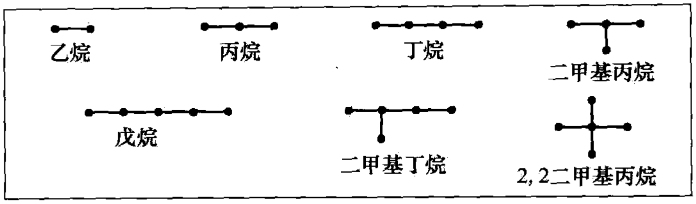


图 13.15 2～5 个碳原子的烯烃的图论模型

对已知的烯烃的图，通过适当添加顶点和边，就可以为具有 6 个或 6 个以上碳原子的烯烃构建图论模型了. 在图 13.16 中，我们表示出了 6 碳和 7 碳烯烃的图论模型.

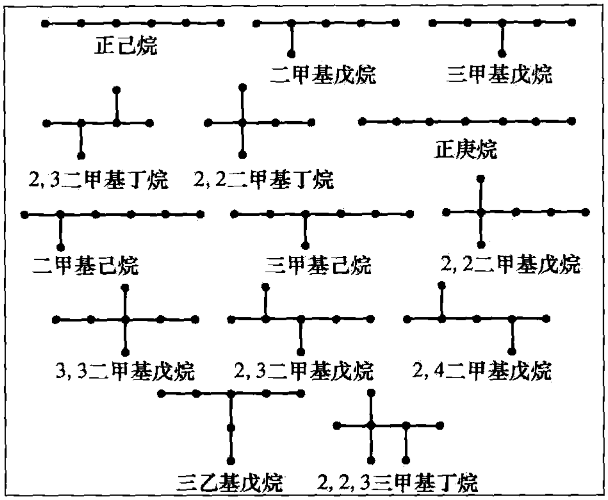


图 13.16 具有 6 个或 7 个碳原子的烯烃的图论模型

在图 13.17 的表中，我们列出了包含 2～7 个碳原子的烯烃，并对每一种烯烃列出了此分子的燃点（以开尔文为单位），以及此分子图论表示的威纳指数.

名称	WI	BP(K)	名称	WI	BP(K)
乙烷	1	184	2，2二甲基丁烷	28	323
丙烷	4	233	正庚烷	56	371
正丁烷	10	272	二甲基己烷	52	363
二甲基丙烷	9	261	三甲基己烷	50	365
正戊烷	20	309	2,2二甲基戊烷	46	352
二甲基丁烷	18	301	3,3二甲基戊烷	44	359
2，2二甲基丙烷	16	283	2,3二甲基戊烷	46	363
正己烷	35	342	2,4二甲基戊烷	48	354
二甲基戊烷	32	333	三乙基戊烷	48	366
三甲基戊烷	31	336	2,2,3三甲基丁烷	42	354
2，3二甲基丁烷	29	331			

图 13.17 一些烯烃的燃点和威纳指数

在图 13.18 中，我们画出了燃点和威纳指数数据的一个图形．显而易见，这两个变量之间有很强的相关性．在化学建模时，这是一种很有用的关系，是一种反映一个分子数学模型的定量性质，与此分子本身的物理性质相关的关系．

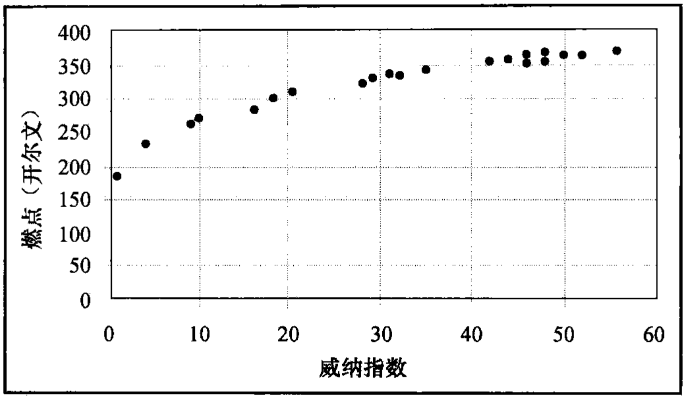


图 13.18　燃点和威纳指数数据的图形

燃点与威纳指数的关系，可以用一条增长曲线来很好地逼近．以乘幂式 $B=\alpha W^{\beta}$ 来对此数据拟合，我们发现，燃点 (B) 与威纳指数 (W) 数据的关系由 $B=181W^{0.1775}$ 来逼近．(见图 13.19.)

辛烷是具有 8 个碳原子的直链烯烃．在图形表示中，它的威纳指数是 84．而用我们的乘幂式，我们所得到辛烷燃点的一个近似值为 397K，这与已知的燃点值 399K 很接近．

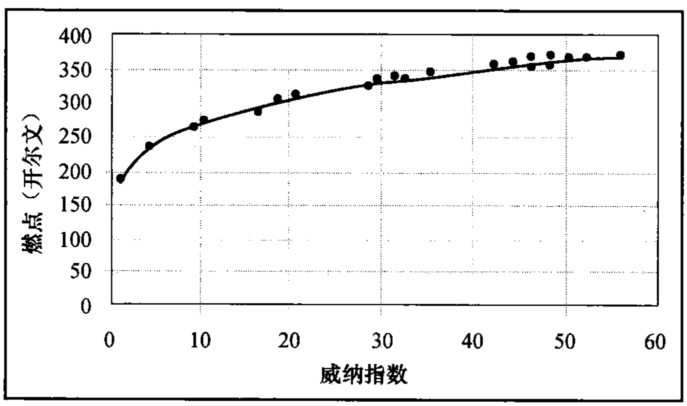


图 13.19　用一个幂方程来拟合数据

当然，正是由于分子的一些已为人所知的性质不能“预测”，诸如威纳指数那样的拓扑工具就很有用了。在预测分子的性质和性态时，这些有意义的建模方法已经被综合。“分子的性态是所期望的吗?”和“分子的毒性最小吗?”在化学设计时是重要的问题．合成出分子，并对它们进行检验以回答这些问题，是既花时间又费金钱的事．前面提过的定量结构性质关系 (QSPR) 和其中的建模工具提供了重要的信息，这有助于预料一些分子的特征．

13.2 节练习

13.14　(1) 确定 n 个顶点的完全图 K_n 的威纳指数．

(2) 确定完全二部分图 $K_{n,m}$ 的威纳指数.

13.15 (1) **证明定理 13.13**：如果 G 与 G' 同构，那么 $W(G)=W(G')$.

(2) 证明定理 13.13 的逆命题不成立. 即找出图 G 与 G'，论证 $W(G)=W(G')$ 未必蕴涵 G 与 G' 同构.

13.16 (1) 确定图 $S_n \subset \mathbf{R}$ 的威纳指数，此图的顶点是整数 1，2，3，…，n，而它的边是连接它们的区间 [1，2]，[2，3]，…，[$n-1$，n].

(2) 对直链烯烃 A_n 推导燃点和碳原子数量 n 之间的关系，A_n 的图形表示由 (1) 中的图 S_n 给出.

(3) 壬烷是具有 9 个碳原子的烯烃，用你源自 (2) 中的关系式来近似壬烷的燃点. 将你的结果与准确值 424K 相比较.

(4) 癸烷是具有 9 个碳原子的烯烃，用你源自 (2) 中的关系式来近似癸烷的燃点. 将你的结果与准确值 447K 相比较.

13.17 在图 13.20 的表中，我们列出了所有包含 8 个碳原子的烯烃，以及它们的燃点和相应的威纳指数. 把这些数据添加到包含 2～7 个碳原子的烯烃中，再使用数据分析软件为具有 2 至 8 个碳原子的烯烃推导出逼近燃点与威纳指数关系的乘幂式 $B=\alpha W^{\beta}$.

名称	WI	BP(K)	名称	WI	BP(K)
正辛烷	84	399	3,3二甲基己烷	67	385
二甲基癸烷	79	391	三乙基己烷	72	392
三甲基癸烷	76	392	2,2,3三甲基戊烷	63	383
四甲基癸烷	75	391	2,3,4三甲基戊烷	65	386
2,2二甲基己烷	71	380	三乙基-二甲基戊烷	67	389
2,3二甲基己烷	70	389	2,2,4三甲基戊烷	66	372
2,4二甲基己烷	71	382	2,3,3三甲基戊烷	62	388
2,5二甲基己烷	74	382	三乙基-三甲基戊烷	64	391
3,4二甲基己烷	68	391			

图 13.20 8 个碳原子烯烃的燃点与威纳指数

13.3 图的嵌入

有关图的嵌入的问题和结论，在拓扑图论中起着重要的作用. 本节我们介绍这些结果的几个例子，其中包括库拉托夫斯基定理，这个定理提供了一个图嵌入平面的必要和充分条件.

首先，我们有以下的定理，它指出不管一个图有多少顶点和多少边，在 $\mathbf{R}^3$ 中存在足够的空间以构建此图的拷贝：

定理 13.14 每个图 G 都可嵌入 $\mathbf{R}^3$.

证明 设 G 是一个图，有 n 个顶点 v_1，…，v_n 与 m 条边 e_1，…，e_m. 我们定义一个嵌入 f：$G \to \mathbf{R}^3$. 首先对于任一 $i=1$，…，n，定义 $f(v_i)=(0, 0, i)$. 按照这种方式，顶点集被双射地映成 $\mathbf{R}^3$ 中 z 轴上的一个点集.

设 P_1，…，P_m 是 $\mathbf{R}^3$ 中一个不同半平面的集合，每个集合都是从 z 轴出发的. 如果 e_k 是 G 的一条连接顶点 v_i 与 v_j 的边，那么把 f 延拓到 e_k，使得它把 e_k 同胚地映成从 (0，0，i) 到 (0，0，j) 的 P_k 的半圆周. (见图 13.21.). 按照这样来定义的映射 f，是 $\mathbf{R}^3$ 中 G 的一个嵌入. ■

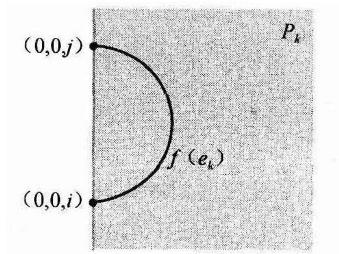


图 13.21 边 e_k 同胚地映成半平面 P_k 上的一个半圆周

已知可嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中的每个图 G，接下来我们考虑嵌入平面中的问题．我们还能对每个图获得一个嵌入吗？我们将发现，以下的定义导致否定的回答：

定义 13.15 一个图 G 称为**可平面的**，如果它能被嵌入到平面上．否则称为**不可平面的**．

在 13.1 节中，我们介绍过“气水电问题”，在本质上这个问题是问：是否可能把图 $K_{3,3}$ 嵌入平面上．经过若干次尝试以后发现，“气水电问题”没有解，因而我们猜测 $K_{3,3}$ 是不可平面的．如果正是这种情况，那么，就可得出，当 m，$n\geqslant 3$ 时，没有一个 $K_{m,n}$ 是可平面的，由于 $K_{3,3}$ 可以被嵌入到每个这样的图上．

另一方面，我们从图 13.22 可以看出，所有完全二部分图 $K_{1,n}$ 与 $K_{2,n}$ 是可平面的．

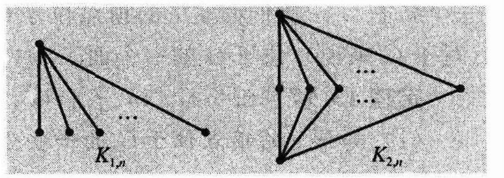


图 13.22 完全二部分图 $K_{1,n}$ 与 $K_{2,n}$ 是可平面的

再考虑完全图．当 $n\leqslant 4$ 时，我们可以如图所示，把 K_n 嵌入平面上．但是，如果我们对 K_5 作尝试，就导致我们作出 K_5 是不可平面的猜测．而如果正是这种情况，那么就可得出，当 $n\geqslant 5$ 时，没有一个 K_n 是可平面的，由于 K_n 可以被嵌入到这些图中每个图上．

于是看来，如果把 $K_{3,3}$，K_5 以及任一包含 $K_{3,3}$ 或 K_5 的图作为一个子空间，那么，它们都是不可平面的．拓扑图论的以下重要结论指出，这些图正是不可平面图．

定理 13.16(库拉托夫斯基定理) 一个图是可平面的，当且仅当它不包含与 $K_{3,3}$ 同胚的子空间，且没有与 K_5 同胚的子空间．

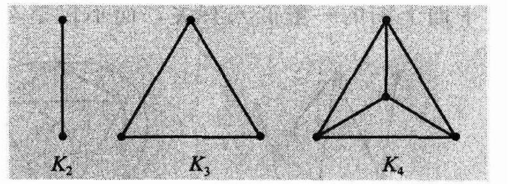


图 13.23 完全图 K_2，K_3 与 K_4 是可平面的

K. 库拉托夫斯基（1896—1980）是 20 世纪初期在发展拓扑学这一领域作出过重要贡献的波兰学者．他在 1930 年的一篇论文“拓扑学中的左曲线问题”中，证明了上述（后来）以他的名字命名的定理．1930 年以来，此定理许多可供替代和简化的证明都已发表．（例如，见［Tho］和［Mak］.）

以下我们来证明库拉托夫斯基定理的一半，即证明：如果一个图包含一个与 $K_{3,3}$ 或 K_5 同胚的子空间，那么，它是不可平面的．我们不再证明库拉托夫斯基定理的其他蕴涵关系，即如果图 G 是不可平面的，那么无论 $K_{3,3}$ 还是 K_5 都能嵌入 G 之上．为介绍这样进行证明所需的全部细节，就将使我们离课程太远．

如果 G 是此平面上的一个嵌入图，那么，G 的补图由许多分支组成，我们称这些分支为此嵌入图的**面**．（见图 13.24.）此外，由于 G 是紧致的，它是此平面的一个有界子集，因而恰好存在 G 的一个无界面．（见练习 6.19.）

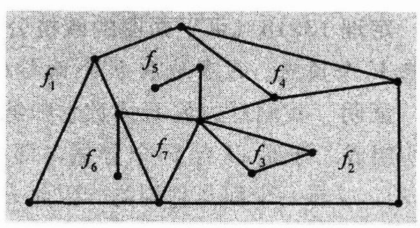


图 13.24 在平面上的一个图把此平面分成一些面 f_i

考虑图 13.24 和图 13.25 中的可平面图．如果我们为顶点、边和面计数，并设它们的个数分别为 V，E 和 F，那么，在这三种情况下，可得到关系式 $V-E+F=2$.

它与在每个这样的例子中 $V-E+F$ 是 2 的结论并非巧合. 这个关系式，就是对于可平面图成立的欧拉公式的一个结论，即我们在定理 13.18 中所建立的结论.

我们对欧拉公式的证明，以以下的定理为根据，它是建立在若尔当曲线定理（定理 11.2）和定理 11.10 之上的，在平面上关于图的一个一般的分离和非分离定理.

虽然此定理在直觉上是显然的，但与若尔当曲线定理一样，证明并不是轻而易举的. 我们在这里就不提供证明了.

定理的结构如下：设 G 是平面上的一个图. 我们将为 G 添加一条边 e，以得到此平面上的一个新图 G'. 我们假定 e 的顶点位于 G 中，而另一方面，e 与 G 不相交. 于是得出 e 的内部（对于 G' 来说）位于 G 的一个面 f 中，我们感兴趣的，是如何把 e 添加到图 G，让面 f 塞满.

定理 13.17 *已知 G，e，f 和 G'.*

(1) 如果 e 的顶点位于 G 的一些分离分支之上，那么，$f-e$ 是 G' 中的一个面 f'，而 h 位于 f' 的边界上.

(2) 如果 e 的顶点位于 G 的一些分离分支之上，那么，$f-e$ 由 G' 的两个面 f' 和 f'' 组成，而 e 同时位于 f' 和 f'' 的边界上.

于是在定理 13.17 中的第一种情况，新边 e 不分离 G 的面，但在第二种情况，则分离 G 的面. 请注意，在第二种情况下，这些顶点重合是不可能的. 我们用图 13.26 来说明定理 13.17 的两种情况，而且把这些边画成曲线而不是直线段，以强调以下的事实，即这个结论与平面上图的一般嵌入有关，而不仅是与它的象是由一些线段所组成的那些嵌入有关.

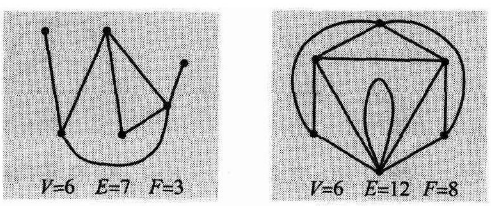


图 13.25 关系式 $V-E+F=2$ 对这两个图都成立

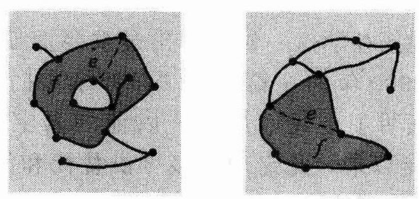


图 13.26 在第一种情况，新边 e 与 f 不分离，但在第二种情况下则与 f 分离

对连通的可平面图来说，关系式 $V-E+F=2$ 成立. 而以下要证明的可平面图的欧拉公式，对于此平面上的所有图都成立. 请注意，如果一个图不是连通的，那么，它是有限多个补图的并，其中每一个是一个连通图.（见练习 13.4.）

定理 13.18（可平面图的欧拉公式） *设 G 是平面上具有 C 个分量的一个非空图. 如果存在 V 个顶点、E 条边和 F 个面与 G 相关，那么 $V-E+F=C+1$.*

证明 我们对边数 E 用数学归纳法来证明这个结论. 如果 $E=0$，那么 G 由 V 个顶点及 0 条边所组成. 于是 G 有 V 个分量，即 $C=V$. 由于删去一个有限点集的平面是连通的（见练习 6.43），G 有一个面与它相关. 因此 $F=1$. 我们就有 $V-E+F=V+1=C+1$. 因此，在 $E=0$ 时，欧拉公式成立.

再假定欧拉公式对位于此平面且有 $E-1$ 条边的图 G 成立. 设 G' 是位于此平面且有 $E\geqslant 1$ 条边的图. 假定与 G' 相应的顶点、面和分量的个数分别为 E，F 和 C. 我们考虑两种情况：

G'是无环的或有环的.

首先假定G'是无环的. 取G'的至少包含一条边的分量H. 分量H是一个无环图，因而由定理13.9可得，H有一个度为1的顶点. 取这样一个顶点v，并设e是与它关联的边. 在G'中删去e，得到一个图G. 顶点v是G的一个单点分量，而G比G'多一个分量. 此外G有V个顶点和$E-1$条边. 如果我们收回e，由G得到G'，那么定理13.17蕴涵，G与G'在面的数量上相同. 因此，G有F个面. 对G应用归纳法的假设，就得到$V-(E-1)+F=(C+1)+1$. 于是在这种情况，就有所想要的结果$V-E+F=C+1$.

再假定G'有一个环. 设e是G'中一个环的一条边. 从G'中删去e就得到图G. 由于e位于一个环中，从G'中删去e，并不改变此图分量的数量，而e的两个顶点位于G的同一分量中. 此外，G有V个顶点和$E-1$条边. 如果我们收回边e，由G得到G'，那么，定理13.17蕴涵，在面的数量上G'比G多1. 因此，G有$F-1$个面. 再对G应用归纳法的假设，就得到$V-(E-1)+F-1=(C+1)$，因此$V-E+F=C+1$.

在以上两种情况，我们都得到$V-E+F=C+1$，因而，在假定欧拉公式对位于此平面且有$E-1$条边的图成立时，此公式对位于此平面且有E条边的图也成立. 于是由归纳法，此定理得以证明. ■

对于可平面图的欧拉公式的一个令人满意的结论，是对于多面体的欧拉公式. 如果我们按图13.27所示，认为一个多面体的面、棱和顶点的个数分别为F，E和V，那么，就得到$V-E+F=2$. 我们就能发现，通过从此多面体的一个面删去一个点，然后把所得到的空间同胚地映射到此平面，这个结论为什么成立了. 此多面体的顶点和棱，映射到此平面上的一个连通图，而此多面体的面，映射到此连通图的一些面. 因此，由定理13.18，就得到$V-E+F=2$.

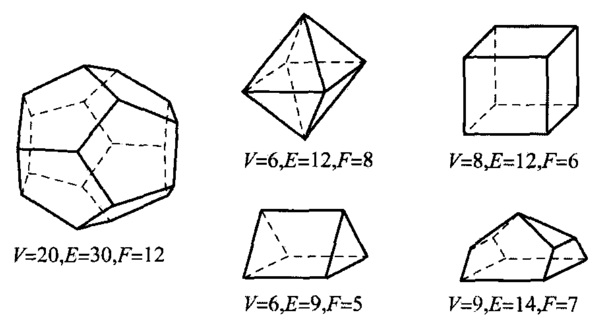


图13.27 关系式$V-E+F=2$对多面体成立

随后，以下的引理用来推导一个有用的界（定理13.21），用以估计可平面图的边数.

引理13.19 *设G是在平面上的一个图.*

(1) 如果e是G中不位于一个环中的一条边，那么，e位于G的一个单独面的边界.

(2) 如果e是G中位于一个环中的一条边，那么，e位于G的两个面的边界.

证明 见练习13.22. ■

引理13.20 *设G是平面上的一个图. 如果G的面多于一个，那么，G的每个面的边界包含一个环.*

引理13.20并不蕴涵每个面的边界是一个环，但是，恰好每个这样的面在它的边界有一个环. 考察图13.24，我们就会发现一些例子，其中一个面的边界不是一个环. 特别地，在面f_5与f_6的边界上，存在一些边，它们不是此图中任何环的一部分，而在f_2的边界上存在两个环.

证明 假定G的面多于一个，并设f是G的一个面. 设H是由G的所有位于f的边界上

的顶点和边所组成的图．我们断言，在 H 中存在一个环，因而，在 G 中存在由位于 f 边界的一些边所组成的一个环． ■

首先，我们注意到，f 是 H 的一个面，而 H 的面多于一个．设 p 是从 f 中的一个点，到 H 另一个面的一个点的一条路径．如果 α 是 $\mathrm{Cl}(f)$ 中的在 p 上的最后一个点，那么 α 位于 H 的一条边 e 上，α 位于 f 的边界上，α 位于 H 至少另一个面的边界上．于是可得出，e 位于 H 的多于一个面的边界上，因而引理 13.19 蕴涵，e 位于 H 中的一个环中．因此，H 包含一个环，这正是我们所要证明的结论． ■

以下的定理为我们提供了关于一个可平面图的边数的界，它表示了此图的顶点数与它围长的关系．我们回想起围长是图中任何环的边数的最小值．

定理 13.21 设 G 是一个可平面图，具有 V 个顶点、E 条边并至少有一个环．如果 G 的围长为 g，且 $g\geqslant 3$，那么

$$E\leqslant\frac{g(V-2)}{g-2}.$$

证明 由于 G 是可平面的，它可以被嵌入此平面上．我们可以假定，G 本身位于此平面上．（由引理 13.20.）与 G 相应的每个面在它的边界上有一个环，而每个环至少由 g 条边组成，因此，我们可以认为，至少向 G 提供 g 条边．但是，由于在这 gF 条边中，每一条边都位于一个环中，引理 13.19 蕴涵，这样的每一条边来自不同的面．所以，在 G 中的边数至少为$\frac{gF}{2}$．因此$\frac{gF}{2}\leqslant E$，因而 $F\leqslant\frac{2E}{g}$．

在欧拉公式中代入 F，我们就得到

$$2\leqslant C+1=V-E+F\leqslant V-E+\frac{2E}{g}.$$

因此

$$E-\frac{2E}{g}\leqslant V-2,$$

于是

$$gE-2E\leqslant g(V-2).$$

由于 $g\geqslant 3$，由此可得

$$E\leqslant\frac{g(V-2)}{g-2}.$$ ■

推论 13.22 图 $K_{3,3}$ 与 K_5 是不可平面的．

证明 对于 $K_{3,3}$，我们有 $V=6$，$E=9$ 和 $g=4$．如果我们能把 $K_{3,3}$ 嵌入此平面上，那么由定理 13.21，我们就有 $E\leqslant 2V-4$．但是，E 和 V 不满足此不等式，因此，$K_{3,3}$ 是不可平面的．

再考虑 K_5，这时 $V=5$，$E=10$ 和 $g=3$．由于 E 和 V 不满足不等式 $E\leqslant 3V-6$，于是得出 K_5 同样是不可平面的． ■

由推论 13.22 可推出库拉托夫斯基定理的一半．图 $K_{3,3}$ 与 K_5 是不可平面的，因而，如果 G 以这两个图中的任何一个为子空间，那么，G 同样是不可平面的．

例 13.6 哈拉里图 $H_{4,6}$ 与 $H_{4,7}$ 如图 13.28 所示，这两个图都是可平面的吗？

对于 $H_{4,6}$ 说来，回答是肯定的．在图 13.29 中，我们仅仅通过对图 13.28 中所示的描绘 $H_{4,6}$ 的边之中的 3 条边重新配置，就表示出了 $H_{4,6}$ 在平面上的一个嵌入．

对于 $H_{4,7}$ 说来，回答却是否定的．在图 13.30 中，我们描述了 $K_{3,3}$ 在 $H_{4,7}$ 的一个嵌入．由库拉托夫斯基定理可得出 $H_{4,7}$ 是不可平面的．

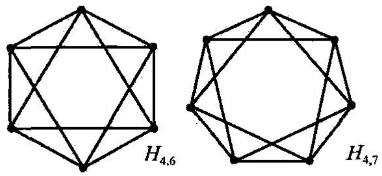
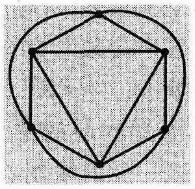


图 13.28 哈拉里图 $H_{4,6}$ 与 $H_{4,7}$


图 13.29 $H_{4,6}$ 在平面上的一个嵌入

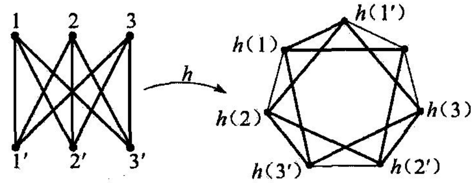


图 13.30 二部图 $K_{3,3}$ 嵌入 $H_{4,7}$ 上

13.3 节练习

13.18 (1) 举例说明 $K_{3,3}$ 与 K_5 可嵌入一个默比乌斯带之上．

(2) 举例说明 $K_{3,3}$ 与 K_5 可嵌入一个环面．

13.19 设 G 是一个无环图．证明 G 是可平面的．

13.20 利用定理 13.14 和推论 13.22，证明 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{R}^3$ 不是同胚的．

13.21 尽管 $K_{3,3}$ 是一个具有 6 个顶点和 9 条边，且是不可平面的简单图，但却存在另一些具有 6 个顶点和 9 条边的可平面的简单图．请找出其中一个（与 $K_{3,3}$ 不同），并验证它满足定理 13.21 中的不等式．

13.22 **证明引理 13.19**：设 G 是平面上的一个图．

(1) 如果 e 是 G 中不位于一个环中的一条边，那么，e 位于 G 的一个单独面的边界．

(2) 如果 e 是 G 中位于一个环中的一条边，那么，e 位于 G 的两个面的边界．

13.23 (1) 用定理 13.21 来证明：在图 13.31 中所示的希伍德图 H 是不可平面的．

(2) 由于希伍德图是不可平面的，库拉托夫斯基定理蕴涵，它必定既包含与 $K_{3,3}$ 同胚的一个子空间，也包含与 K_5 同胚的子空间．在希伍德图的示意图上画出这一子空间的草图．

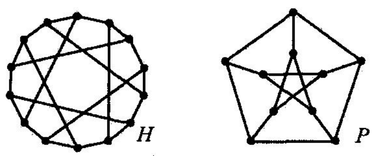


图 13.31 希伍德图 H 与彼得森图 P

13.24 (1) 用定理 13.21 证明：在图 13.31 中所示的彼得森图 P 是不可平面的．

(2) 由于彼得森图不能嵌入平面上，库拉托夫斯基定理蕴涵，它必定既包含与 $K_{3,3}$ 同胚的一个子空间，也包含与 K_5 同胚的子空间．在彼得森图的示意图上，画出这一子空间的草图．

13.25 按以下的步骤画一个图 G：在一个 4×4 的国际象棋盘中的每一个正方形上放置一个顶点．如果有一个骑士从与一个顶点相应的正方形，移动到与另一个顶点相应的正方形，再用一条边把这两个顶点相连．（骑士水平移动 2 个单位、垂直移动 1 个单位，或垂直移动 2 个单位、水平移动 1 个单位．）请画出 G 的草图，要么图示 G 在平面上的一个嵌入，要么证明 G 是不可平面的．

13.4 交叉数与厚度

本节我们要介绍交叉数与厚度，这是对一个未能成为可平面图的图进行研究时常用的两种度量. 它们是拓扑图论的主题，而且正如我们在一个例子中所见到的，它们在电子线路设计时是至关重要的.

在本质上，一个图的交叉数，是在平面上画出此图时所需要的交叉个数的最小值. 为了明确这一点，我们需要清楚地了解“图样”与“交叉”究竟意味着什么.

首先，一个图 G 的**图样**[⊖]是一个连续函数 f：$G\to\mathbf{R}^2$. 当然图样这个概念是过于宽泛了，由于它允许包含在此平面上这个图的一些很不受欢迎的象. 我们要这些象的交叉尽量少，而又尽可能地刻画出这个图. 于是我们作以下进一步的限制：

定义 13.23 *一个图的图样 f：$G\to\mathbf{R}^2$ 称为一个**规范的图样**，如果它满足以下条件：*

(1) 在 f 的象中，不存在与此图的多于两个点相对应的点.

*(2) 在 f 的象中，仅有有限多个点与此图的两个点相对应. 这些点称为此图样的**交叉点**.*

(3) 此图样中，不存在与此图一个顶点相对应的交叉点.

定理 13.24 *每个图 G 都有一个规范的图样.*

证明 假定我们有一个图 G. 正如在定理 13.14 的证明中一样，我们可以把 G 嵌入 $\mathbf{R}^3$，使得 G 的顶点映射到 z 轴上的点，而 G 的边映射到在从 z 轴出发的半平面上的一些半圆周. 如果我们把嵌入 $\mathbf{R}^3$ 与映成 $\mathbf{R}^3$ 中平面 P 的一个射影相复合，那么就有 G 的一个图样，但未必是一个规范的图样. 然而，如果我们选取 P，使得它与 z 轴平行，且不与任何包含 G 的边的象的半平面相垂直，那么，所得到的图样至少满足一个规范图样所要求的条件 (2) 与 (3). 于是，如果在所得到的图样中，存在一些点与此图中多于两个点相对应，我们就可以对相应的半圆周稍作变形，使得一个规范图样所要求的条件 (1) 也同样满足. ■

由于所有的图都有规范的图样，因此我们有以下的定义：

定义 13.25 *已知一个图 G，G 的**交叉数**是在 G 的任一规范的图样中，交叉点个数的最小值，记为 $v(G)$.*

以下的定理描述了两个与交叉数有关的重要事实：

定理 13.26 *(1) 交叉数是图的一个拓扑不变量，即如果 G_1 与 G_2 是同胚的，那么 $v(G_1)=v(G_2)$.*

(2) 一个图可以嵌入平面上，当且仅当交叉数是 0.

证明 定理的第二部分立即可得到. 以下考虑第一部分. 假设我们有一个规范的图样 d_1：$G_1\to\mathbf{R}^2$. 我们断言，存在一个同胚 h：$G_2\to G_1$，使得由 $d_2=d_1\circ h$ 所定义的函数 d_2 是 G_2 的一个规范的图样. 于是，对于 G_1 的任一规范的图样 d_1，存在相应的 G_2 的一个规范的图样 d_2，使得 d_1 与 d_2 有同一个象. 于是得出，G_1 与 G_2 的交叉数相等.

为了完成证明，我们需要确认同胚 h：$G_2\to G_1$ 的存在性. 已知一个同胚 h^*：$G_2\to G_1$，未

⊖ 在《McGraw-Hill Dictionary of Scientific and Technical terms，1989》中，drawing 的释义是 A surface portrayal of a form or figure in line，据此译为图样。——译者注

能使 $d_1 \circ h^*$ 产生一个规范的图样的唯一方式，是当 h^* 把 G_2 的一个或多个度为 2 的顶点映成 G_1 中与图样 d_1 的交叉点相对应的那些点. 在这一情况，可对同胚 h^* 稍作调整，成为同胚 h，使得 G_2 中所有的度为 2 的顶点，映成 G_1 中不与交叉点相对应的那些点.（见练习 13.26.）■

例 13.7　正如我们在上一节中所看到的，图 K_5，$K_{3,3}$ 与 $H_{4,7}$ 都是不可平面的，因此由定理 13.26，每个图的交叉数不为 0. 在图 13.32 中，我们表示出了这些图中每一个规范的图样，并在每种情况，只存在一个交叉. 于是，这些图中每一个图的交叉数都为 1.

例 13.8　考虑图 13.33 中所表示的图 $K_{3,4}$. 由于 $K_{3,3}$ 嵌入 $K_{3,4}$ 中，$K_{3,4}$ 的交叉数至少为 1. 在图 13.33 中，图 $K_{3,4}$ 的规范的图样有两个交叉，因此 $K_{3,4}$ 的交叉数至多为 2. 此交叉数能为 1 吗?

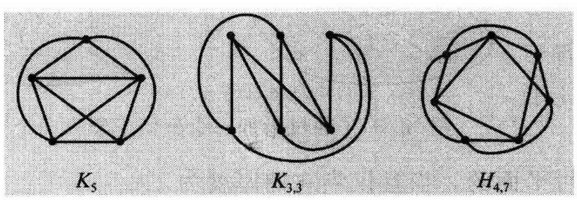


图 13.32　图 K_5，$K_{3,3}$ 与 $H_{4,7}$ 的交叉数都为 1

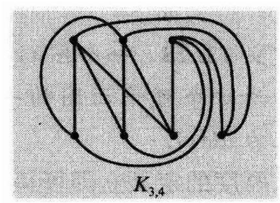


图 13.33　图 $K_{3,4}$ 的交叉数为 2

我们用反证法来证明 $K_{3,4}$ 的交叉数不能为 1. 假设我们有 $K_{3,4}$ 的只有一个交叉的规范的图样. 于是，如果我们删去导致此交叉的一条边，所得到的图就是可平面的了（由于我们消去了唯一的交叉). 然而，如果从 $K_{3,4}$ 删去任一条边，结果仍然是一个 $K_{3,3}$ 可嵌入其中的图，因而带一条删去边的图 $K_{3,4}$ 是不可平面的. 这就导致矛盾，于是得出不存在 $K_{3,4}$ 的只有一个交叉的规范的图样. 因此，$K_{3,4}$ 的交叉数为 2.

为完全二部图 $K_{m,n}$ 确定交叉数的问题，称为图兰砖厂问题，以对图论做出重大贡献的图兰（1910—1976）的名字命名. 图兰遇到这个问题是在 1944 年，当时他正在匈牙利布达佩斯附近一个战时劳工营中的砖厂工作. 在 [Tur] 即《图论杂志》的创刊号上一篇“欢迎的注记”中，他描述了导致他对交叉数问题进行研究的状况：

> 那里有几座砖窑，还有几个宽敞的贮砖场. 所有的砖窑通过铁道与贮砖场相连. 这些砖由小轮货车运往贮砖场. 我们必须从事的全部工作，是把砖窑的砖装上货车，再把货车推到贮砖场，并在那里把它们卸下来. 对货车我们有合理的整车价格，而劳务本身也并不艰难，但唯一使人困扰的是交叉. 货车通常在铁道上会颠簸，砖会掉落下来. 简言之，这会引起不少麻烦并浪费时间，这对我们大家来说是毫无价值的（其理由在此不作讨论). 我们全都为这种状况担心，并感到棘手，我也有同感. 但是无论是否愿意，我所想到的是，如果铁道交叉数实现最小化，时间的这项浪费就可以减少到最小. 但是怎样才能使交叉数实现最小化呢? 几天后我恍然大悟，现有的状况是可以得到改善的，但具有 m 个砖厂、n 个贮砖场的一般问题的精确解，看来是很难求出的，而为了防止我的家庭被毁灭起见，我又几次拖延了对它的研究.

自从图兰提出这个问题以来，虽然曾有许多数学家对它进行过研究，但是，为交叉数给出一个一般公式的问题，仍然未能得到解决.

而一个交叉数至少为 1 的图，不能嵌入平面上，以下的定理指出，它可嵌入通过求 n 个环面的连通和而得到的一个曲面上.（见 3.4 节.）

定理 13.27 *如果图 G 的交叉数为 n，那么 G 可嵌入 n 个环面的连通和上.*

证明 对具有 n 个交叉数的图 G 取一个规范的图样. 用球极射影的逆，我们就可以把此规范的图样，从平面映射成球面. 在此球面所得到象的每个交叉的邻域中放置一个把柄（如图 13.34 所示），相互交叉的两根线之一，通向此把柄，而另一根交叉线则穿过此曲面中的洞，此曲面是由附加的把柄得到的. 按照这种方式，一些交叉被删去，结果是 G 的在具有 n 个把柄的球面上的一个嵌入，即与 n 个环面的连通和同胚的一个曲面. ■

一个图未能成为可平面图的另一种度量是厚度，定义如下：

定义 13.28 *一个图 G 的**厚度**，是使得 G 能表示为 n 个可平面图的一个并的 n 的最小值，记为 $\theta(G)$.*

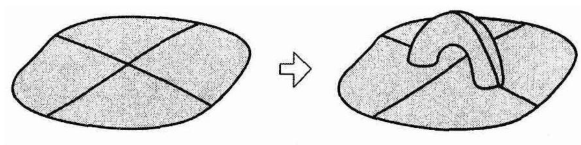


图 13.34 通过附加一个把柄来删去一个交叉

从厚度的定义立即可得出，一个图是可平面的，当且仅当它的厚度为 1.

例 13.9 图 $K_{3,3}$ 与 K_5 的厚度为 2. 为什么呢? 由于这些图是不可平面的，它们中每一个的厚度至少为 2. 设 K' 是由 $K_{3,3}$ 的一条边，以及与此边关联的一些顶点所组成的图，而 K'' 是由 $K_{3,3}$ 的其余边，以及 $K_{3,3}$ 的所有顶点所组成的图. K' 与 K'' 都是可平面的，而 $K_{3,3}$ 是这两个图的并；因此 $\theta(K_{3,3})=2$. 类似地可得出 $\theta(K_5)=2$.

显然厚度是图同构下的不变量. 然而厚度在同胚下则不是不变量，此结论来自以下两个定理.

定理 13.29 *设 G 是一个不可平面图. 存在与 G 同胚，厚度为 2 的一个图 G'.*

证明 考虑图 G'，像定理 13.5 的证明中一样，它是由 G 通过对其中的所有边三等分而构成.（见图 13.6.）图 G 与 G' 是同胚的.

再设 G_1 是由 G' 中所有中间第 3 条边，以及所有与这些边关联的顶点所构成. 设 G_2 是由 G' 中其余顶点，以及所有与这些边关联的顶点所构成. G_1 与 G_2 都是可平面的（见练习 13.30），于是得出 G' 的厚度为 2. ■

由定理 13.29，每个不可平面图与厚度为 2 的一个图同胚. 每个不可平面图本身的厚度是 2 吗? 回答是否定的. 以下结论的一个推论是，存在厚度为任意值的图.（见推论 13.31 和练习 13.31.）

定理 13.30 *设 G 是一个图，有 E 条边、V 个顶点且围长 $g\geqslant 3$. 那么*

$$\theta(G)\geqslant\frac{E(g-2)}{g(V-2)}.$$

证明 假设 G 的厚度是 $\theta(G)$. 那么，G 可表示为可平面图 G_i 的并. 我们可以假定在图 G_i 中没有两个图有一条公共边，否则就可以从包含此边以外的任何一个图中删去一条公共边，而我们仍然把 G 表示为可平面图 $\theta(G)$ 的一个并. 设 G_i 有 E_i 条边和 V_i 个顶点.

假定图 G_i 有一个环. 如果 G_i 的圈长是 g_i，那么定理蕴涵

$$E_i\leqslant\frac{g_i(V_i-2)}{g_i-2}\leqslant\frac{g(V-2)}{g-2}.$$

第二个不等式成立，是由于 $V_i \leqslant V$，$g_i \geqslant g$，且当 g 增加时 $\frac{g}{g-2}$ 减少.

再设 G_i 是无环的. 我们断言，在这种情况，同样有 $E_i \leqslant \frac{g(V-2)}{g-2}$. 首先我们注意到，由于 G_i 是无环的，所以 $E_i < V_i$.（见练习 13.8.）而 $g \leqslant V$ 恒成立，因此，$\frac{V}{V-2} \leqslant \frac{g}{g-2}$，这蕴涵 $V \leqslant \frac{g(V-2)}{g-2}$. 于是

$$E_i \leqslant V_i \leqslant V \leqslant \frac{g(V-2)}{g-2},$$

这正是我们所要证明的.

如果我们对不等式 $E_i \leqslant \frac{g(V-2)}{g-2}$ 关于所有的 G_i 求和，那么，我们就得到

$$E \leqslant \theta(G)\, \frac{g(V-2)}{g-2},$$

由上式就得到所要的不等式. ■

由定理 13.30，我们可得到关于完全图和完全二部图厚度的下列推论.

推论 13.31 对于 K_n 和 $K_{n,m}$，厚度是有下界的：

(1) 如果 $n \geqslant 3$，那么，$\theta(K_n) \geqslant \frac{n(n-1)}{6(n-2)}$.

(2) 如果 n，$m \in \mathbf{Z}^+$ 且 $n+m \geqslant 3$，那么，$\theta(K_{n,m}) \geqslant \frac{nm}{2(n+m-2)}$.

证明 见练习 13.29. ■

例 13.10 由推论 13.31，完全二部图 $K_{7,7}$ 厚度的下界为

$$\frac{7 \times 7}{2(7+7-2)} = \frac{49}{24}.$$

因此 $\theta(K_{7,7}) \geqslant 3$. 在图 13.35 中，我们表示了 3 个图，它们的并为 $K_{7,7}$. 在此图中，我们把 $K_{7,7}$ 看成是这样的图，它的边使得标注有 A 至 G 这 7 个字母的每个顶点，与其余 7 个顶点中的每一个顶点相连. 于是得到 $\theta(K_{7,7}) = 3$.

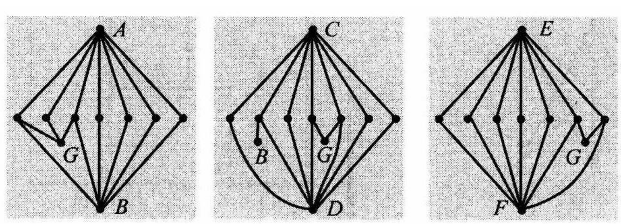


图 13.35 二部图 $K_{7,7}$ 是图示的 3 个可平面图的并

例 13.11（在电子电路设计中的应用） 印刷电路板是一项有意义的发明，它在 20 世纪下半叶引起了电子技术的迅速发展. 印刷电路板是一块（或几块）安装有一些电子元件，并彼此由一些导电通路（称为蚀刻铜板或线道）相连的板. 印刷电路板可以在许多电子设备中

找到，从个人电脑、DVD 机到手提音乐播放器．它们可以安装上千个元件，包括电阻器、电容器、电感器、晶体管和集成电路芯片（它们本身是微型电路）．

在一个印刷电路板上的每个元件，有若干条金属引线，使它与导电通路相连．元件的引线少至一二条，在集成电路芯片的情况，引线多达上百条．这些元件被安装在印刷电路板上，而它们的引线由导电材料相连，这些材料通常是蚀刻在此印刷电路板上的狭长的铜片．

图 13.36 所示的是一个简单的调幅收音机的电路示意图．通常，每个元件的性能（例如，电源的电压）在这一示意图上加以标注，但是，在此我们仅关心此电路的拓扑结构．请注意，在此示意图左下角附近有一个地方，一个导电通路跨越另一个通路．是否有可能通过对此电路重新安排来避免这一跨越呢？我们通过考虑一个图论模型来回答这个问题．

打算用于印刷电路板的电路，当然可以用一个图来建模．在图 13.37 中，我们画出了一个图 G，为在图 13.36 中调幅收音机的电路建模．在 G 中的顶点对应于电路的元件和接点（即导电通路相聚的位置）．在 G 中的边表示在此电路中的导电通路．

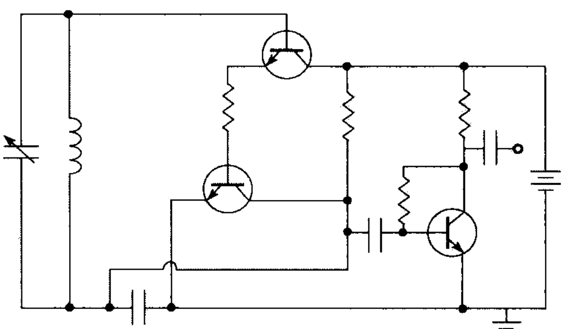


图 13.36　一个调幅收音机的电路示意图

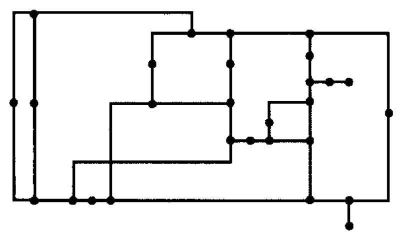


图 13.37　调幅收音机电路的一个图论模型

在图 13.38 中，我们表示了 $K_{3,3}$ 在图 G 中的一个嵌入．因此 G 不能嵌入平面上，这就蕴涵，G 的每个规范的图样至少有一个交叉点．于是得出，在此电路的任一示意图上必定有导电通路的一个跨越．因此在一块印刷电路板上，设计调幅收音机的电路至少要钻两个孔，允许一条通路（譬如从板的上部到下部）在另一条通路之下穿过，然后再从板的上部穿回来．

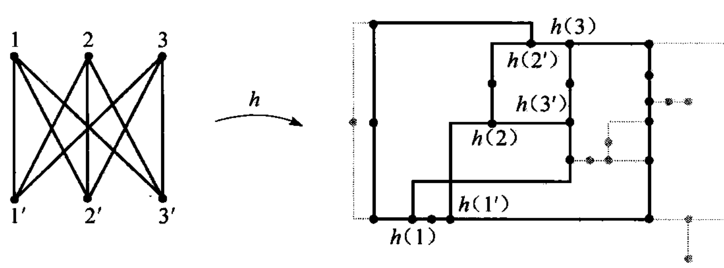


图 13.38　图 $K_{3,3}$ 嵌入 G

元件的安装和导电通路的蚀刻，是印刷电路板制作的简单易行且花费较少的方面．当一个电路为了使用一块板的两面而需要钻孔时，或为了使用多层表面需要把分层的若干板整合在一起时，生产成本就会提高．

正如我们在调幅收音机电路的例子中所见到的，图的性质有助于电路配线的设计，对确定如何才能最经济地制作印刷电路板也是有益的. 作为图的重要性质的交叉数和图的厚度，当然在印刷电路板的设计中起作用. 交叉数意味着一个特定图的规范图样的交叉数的最小值，因而确定了在一个印刷电路板上，为了使得电路通道彼此贯通，以确保没有不必要的交叉所需孔数的最小值. 对于交叉，替代钻孔的方法是在一个多层板上设计电路，在若干板的表面把电路整合在一起，彼此绝缘，而以电子方式相连. 按照这种方式，图的厚度为构建一个多层电路提供了所需最小表面个数的一个指标. 因此，在设计和分析一个电子电路时，交叉数和图的厚度都是很有价值的工具，利用它们就能使这种电路尽量经济地被制造出来.

13.4 节练习

13.26 (1) 在 $\mathbf{R}$ 中，假定 $a_1<b_1<c_1$，且 $a_2<b_2<c_2$. 证明：存在一个同胚 h：$[a_1, c_1] \to$，$[a_2, c_2]$，使得 $h(b_1)=b_2$.

(2) 讨论 (1) 在证明定理 13.26 中的作用，在那里曾断言，可对同胚 h^* 稍作调整为同胚 h，使得 G_2 中所有度为 2 的顶点，映成 G_1 中不与交叉点相对应的那些点.

13.27 证明：对于图 G 来说，厚度与交叉数的关系如下：$\theta(G)\leqslant 1+\left\lceil\frac{\upsilon(G)}{8}\right\rceil$，其中$\lceil x\rceil$表示大于或等于 x 的最小整数.

13.28 证明：当 $n\geqslant 3$ 时，$K_{3,n}$的厚度为 2，当 $m\geqslant 4$ 时，$K_{4,m}$的厚度也为 2.

13.29 **证明推论 13.31**：对于 K_n 和 $K_{n,m}$，厚度是有下界的：

(1) 如果 $n\geqslant 3$，那么 $\theta(K_n)\geqslant\frac{n(n-1)}{6(n-2)}$.

(2) 如果 n，$m\in\mathbf{Z}^+$ 且 $n+m\geqslant 3$，那么 $\theta(K_{n,m})\geqslant\frac{nm}{2(n+m-2)}$.

13.30 证明：在定理 13.29 证明中所作的图 G_1 与 G_2 是可平面的.

13.31 用推论 13.31 找一个特定的正整数 k，对此值你可以证明，对于任一 $n\geqslant 1$，$\theta(K_{kn})\geqslant n$.（这就证明了，存在厚度为任意值的一些图. 特别，给定任一 $n\geqslant 1$，完全图 K_{kn} 的厚度至少为 n.）

13.32 考虑 $K_{3,3}$在图 13.38 所示的图 G 中的嵌入. 请画出草图，并指出在此嵌入下，$K_{3,3}$中的每条单独的边映成 G.

13.33 考虑在图 13.39 中所示的电路示意图. 为此电路构建一个图论模型，并证明此电路不能在一块电路板的一个面上制造出来.

13.34 考虑在图 13.40 中所示的电路示意图. 证明：对此电路重新作出安排，使得能消除两个交叉，而不能消除全部的 3 个交叉.

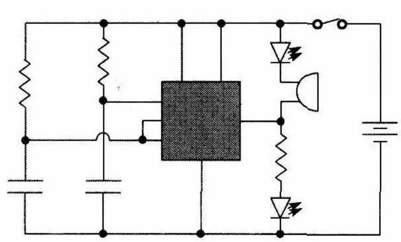


图 13.39 证明这个电路不能在一块电路板的一个面上制造出来

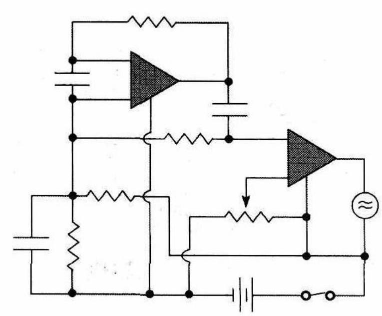


图 13.40 证明能消除两个交叉，而不能消除全部 3 个交叉

第 14 章

流形与宇宙学

迄今为止，人类已取得的最巨大的智力成就之一，就是知道了我们所在的这个行星的形状. 在获悉我们生活在一个球面上之前，人类已生存了几十万年之久.

早在公元前 500 年，毕达哥拉斯[1]就已假设大地（包括陆地与海洋）是球形的. 许多观察者提出大地是弯曲的. 例如，一艘船在地平线消失的最后一部分是桅杆. 300 年以后，埃拉托色尼[2]就已用正午时太阳投射在两个不同城市的影子，来估计地球的曲率，并据此来估计地球的半径.

地球表面在局部上是 2 维这一事实，蕴涵它是一个 2 维流形. 在 14.1 节，我们就已严格定义过流形. 我们已经遇到过的其他 2 维流形，还有环面、克莱因瓶、射影平面和平面. 我们先前了解到的大地表面的局部 2 维性，并不排除地球除了对应于球面之外，还存在某种 2 维流形的可能性. 一个环面状的地球，就曾经引起过人们的兴趣.（见图 14.1.）

由于我们知道了地球的形状，我们就确定了宇宙的许多其他的情况. 但是有一个基本问题需要回答. 这就是，我们居住在其中的这个宇宙，它的形状究竟怎样呢? 在这里我们所说的是宇宙的空间部分，它可作为 4 维时空的一个空间片段. 我们可以把宇宙的空间部分，描绘成宇宙大爆炸时刻产生，并在此后一直膨胀. 我们还很想知道，宇宙正在膨胀着的空间部分，究竟有怎样的拓扑形状呢?

为了在数学上了解这个问题的含义，我们需要考察这个宇宙的空间部分的本性. 那么，对于宇宙的空间部分，我们究竟已经假定了它具有哪些基本性质呢?

请注意，迄今为止无论我们处于宇宙的哪一个地方，如果我们选择一个给定的地方，并从那里朝各个方向走出一段短的距离（譬如 3 英尺），事实上我们就被封入嵌入于 3 维欧氏空间中的一个球之中.（见图 14.2.）

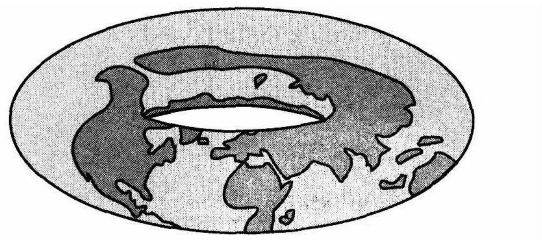


图 14.1　一个环面状的地球

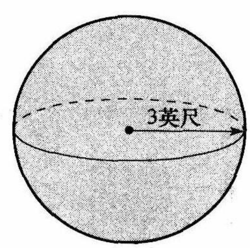


图 14.2　在一个点 3 英尺范围之内的点集是一个球

[1] 古希腊数学家和哲学家. ——译者注
[2] 古希腊地理学家、天文学家和数学家. ——译者注

我们所生存的空间看来是局部3维的. 我们称这一对象为3维流形. 正如存在许多2维流形一样，其中任何一个2维流形满足与地球的表面同样的局部性质，存在许多3维流形，且它们都是宇宙形状的候选者.

本章前三节，讨论维数为1，2和3的流形，而在最后两节，讨论对3维流形的理解如何有助于宇宙形状的确定. 我们首先给出n维流形的严格定义.

14.1 流形

我们要获得用一个空间来局部类似实n维空间$\mathbf{R}^n$的概念。

定义 14.1 *一个n维**流形**是一个具有可数基的豪斯多夫空间，使得对于任一$x\in X$，都有一个与n维开球同胚的邻域.*

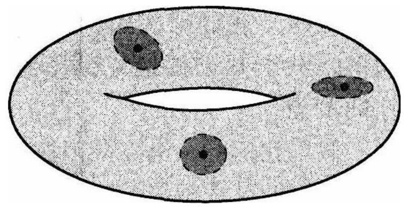


图 14.3 环面上的每个点都存在一个与一个开圆盘同胚的邻域

此邻域只需要与n维开球同胚的事实，给了我们实质性的活动余地. 在$\mathbf{R}^n$中一个邻域与一个开球同胚并不需要保持距离不变，它仅需要让此邻域变形看起来像一个开球. 如图14.3所示，环面有一个性质，即它的每个点，都存在一个与此平面上的一个开圆盘同胚的邻域，尽管此邻域在此曲面上看起来是弯曲的.

空间是豪斯多夫的，以及它有一个可数基，以上这两个附加条件确保n维流形是一个合适的性态良好的空间.（见练习14.1和14.2.）

当我们对一个已知的n考虑n维流形时，最基本的问题是分类问题. 我们能为所有n维流形列出一张完整的表来吗？而如果这样一张表存在，并已知一个特定的n维流形，是否存在一个算法，以确定哪一个流形在此表中呢？

原来这是一个非常困难的问题. 对于维数1或2，问题已经成功地得到解决. 在维数为3或4时，就有大量的工作要做. 此外，3维流形的全面分类仍然难以理解，而且已被证实，确定两个4维流形是否同胚的算法绝不会存在. 于是对4维流形的全面分类也从未实现过. 同样，当$n\geqslant 4$时，n维流形的分类也出现同样的情况.（见 [Mar] 与 [Boo].）

首先我们考虑1维流形.

定义 14.2 *连通的1维流形称为**曲线**.*

在一条曲线上的每一点，有一个与开区间（-1，1）同胚的邻域. 对于1维流形存在全面的分类：

定理 14.3 *设X是一个1维流形.*

(1) 如果X是连通的和紧致的，那么X与S^1同胚.

(2) 如果X是连通的和非紧致的，那么X与$\mathbf{R}$同胚.

(3) 如果X是非连通的，那么X是一个可数分支族的并，其中每个分支族与S^1或$\mathbf{R}$同胚.

(1) 与 (2) 的证明可在 [Chr] 中找到. 而 (3) 可直接由 (1) 与 (2) 得出. 特别地，如果一个1维流形X是非连通的，那么它是一些分支的并，其中每一个分支是一个连通的1

维流形．因此，X 是相互分离子空间的一个并，每个子空间与 S^1 或 $\mathbf{R}$ 同胚．由于一个流形必定有一个可数基，因此，在 X 中至多有可数个这样的分支．

由于我们对 1 维流形已有充分的了解，于是我们转入 2 维流形的讨论．

定义 14.4 连通的 2 维流形称为**曲面**．

平面是一个曲面．它是连通的且是豪斯多夫的．已知一个点 $p\in\mathbf{R}^2$，以 p 为中心且半径为 1 的开球，是 p 的一个与开圆盘同胚的邻域．此外此平面有一个可数的基，它由中心在点 $x=(x_1,\ x_2)$ 且半径为有理数的开球的集合给出，其中 x_1 与 x_2 都是有理数．

平面的每个连通的开子集也是一个曲面．在本节和下一节，我们主要关注紧致曲面．

定理 14.5 球面、环面、克莱因瓶和射影平面，全都是紧致曲面．

证明 我们对克莱因瓶进行证明．其他 3 种情况的证明，在本质上是与克莱因瓶相同的．我们早已知道克莱因瓶是连通且紧致的，是在一个商映射下的一个连通且紧致的空间的象．

假定我们有一个克莱因瓶，它是通过把正方形 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 的边，按通常的方式粘合在一起的方法做出的．如图 14.4 所示，此正方形内部的一个点 x，有一个开圆盘的邻域，它通过取一个半径适当小的开球而得到．对于此正方形一条边上的一个点（但不是正方形的顶点）y 和对边上被视为“同一”的点 y'，y 的一个半圆盘邻域，和 y' 的一个半圆盘邻域粘合在一起，构成在克莱因瓶中所得到的点的一个开圆盘邻域．最后，此正方形的一个顶点，有一个$\frac{1}{4}$圆盘邻域．此顶点与另外 3 个顶点被视为“同一”，其中每个顶点有类似的$\frac{1}{4}$圆盘邻域．这 4 个$\frac{1}{4}$圆盘邻域，构成在克莱因瓶中所得到的点的一个开圆盘邻域．因此，在克莱因瓶中的每个点都有一个开圆盘邻域．

克莱因瓶是豪斯多夫的．在克莱因瓶中给定两个点，我们就可以用充分小的开圆盘邻域把它们分开，按需要粘合成半圆盘邻域或$\frac{1}{4}$圆盘邻域．

最后，正方形 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 有一个可数基$\mathcal{B}$，它是通过对在平面上带有中心位于有理坐标且半径为有理数的每个开球的正方形取交而得到的．由$\mathcal{B}$，在此正方形的内部取一些球、中心在边上且不包含顶点的半球，以及中心在顶点的$\frac{1}{4}$球，于是它们就映成克莱因瓶，而这些半球和$\frac{1}{4}$球适当地粘合在一起．结果是此克莱因瓶的一个可数的基． ■

我们很想用曲面的各种特征来对它们加以区分．其中一个特征是定向性．为了获得定向性的头衔，我们从典型的不可定向的空间即默比乌斯带开始讨论．

默比乌斯带具有这样的特征，即在下列意义下它能使定向逆转：在此默比乌斯带 M 的中心线上选取一个起点，并如图 14.5 中的 M 上所示，在此起点的一个邻域中作一个顺时针方向的旋转．再让我们沿此中心线移动，使此顺时针旋转与我们一起前进，直到我们回到起点为止，我们的顺时针旋转就转化为逆时针旋转．这样就使定向实现了逆转．

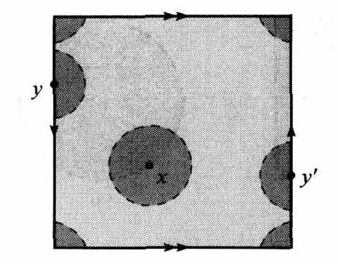


图 14.4 在克莱因瓶中的每个点都有一个与开圆盘同胚的邻域

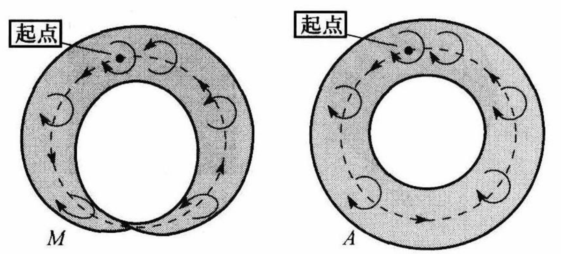


图 14.5 旋转方向沿默比乌斯带与环面前进

在另一方面，考虑图 14.5 中环面 A 上的顺时针旋转．如果我们让此旋转沿中心线前进，它就不能使定向实现逆转．

一条曲线所具有定向逆转的性质，由每个包含默比乌斯带的一个嵌入拷贝的曲面所拥有．这就导致以下的定义：

定义 14.6 一个包含嵌入默比乌斯带的曲面，称为**不可定向的**．一个不包含嵌入默比乌斯带的曲面称为**可定向的**．

正如图 14.6 中克莱因瓶和射影平面之中浅黑色区域所指出的，这两个区域都包含一个嵌入的默比乌斯带，因而它们都是不可定向的曲面．

以下的定理指出，定向性是一个拓扑不变量．因此我们可以用定向性来对曲面加以区分．

定理 14.7 设 S_1 与 S_2 是两个同胚的曲面．那么 S_1 是可定向的，当且仅当 S_2 是可定向的．

证明 见练习 14.4. ■

一般来说，通过直接证明一个曲面不包含一个嵌入默比乌斯带的方法，来证明此曲面是可定向的是很困难的．因此，我们采用不同的方法来论证定向性．一种方法涉及三角剖分——把一个曲面剖分为三角形．在我们讨论三角剖分和某些有用的相关结论后再回过来讨论定向性．

设 τ 是平面上的一个三角形区域，并设 S 是一个曲面．如果 $f: \tau \to S$ 是一个嵌入，那么，我们称 $f(\tau)$ 是 S 中的一个**三角形**．而在 f 下 τ 的边和顶点的象分别称为 $f(\tau)$ 的边和顶点．(见图 14.7.)

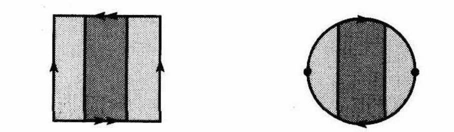


图 14.6 克莱因瓶和射影平面都包含个嵌入的默比乌斯带

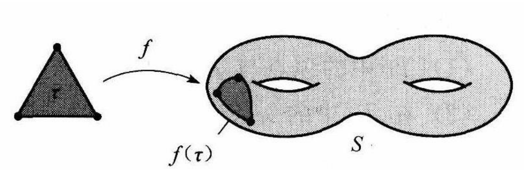


图 14.7 在曲面 S 上的一个三角形

定义 14.8 一个紧致曲面 S 的**三角剖分** T，是在 S 中的一族有限个三角形，这一族三角形不仅覆盖 S，而且使得 T 中的两个三角形，要么不相交或交于这两个三角形的一个顶点，要么交于这两个三角形的一条边．

在图 14.8 中，我们画出了球面、环面、克莱因瓶和射影平面的三角剖分．

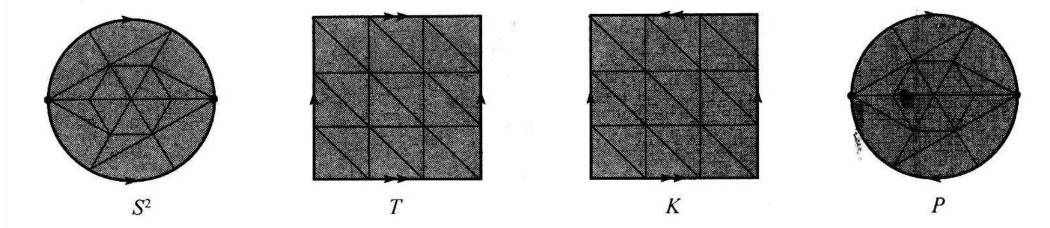


图 14.8 紧致曲面的三角剖分

定理 14.9 *每个紧致曲面都有三角剖分.*

T. 雷多于 1925 年就首先证明了这个结论. 由于证明过于专业，因此在这里就不再进行了. 证明可以在雷多的原始论文 [Rad] 中找到，较新的证明可见教材 [Moi].

对于我们在本节或下一节关于三角剖分的论述，以下的定义和定理至关重要.

定义 14.10 *设 T 是紧致曲面 S 的一个三角剖分. 那么*

*(1) 三角剖分 T' 称为 T 的一个***细分***，如果 T 中的每个三角形，都可以表示为 T' 中的一些三角形的并.*

(2) 三角剖分 T^* 称为与 T **等价***，如果存在一个同胚 $h: S\to S$，它把 T 中的三角形同胚地映成 T^* 中的三角形.*

定理 14.11 *设 T_1 与 T_2 是紧致曲面 S 的三角剖分. 存在彼此等价且分别是 T_1 与 T_2 细分的三角剖分 T_1' 与 T_2'.*

证明 假设我们有紧致曲面 S 的三角剖分 T_1 与 T_2. 这些三角剖分称为处于一般位置，如果以下条件成立：

(1) 每个三角剖分的任一顶点，位于其他三角剖分的一个三角形的内部.

(2) 每个三角剖分的任一边，与其他三角剖分交于至多有限多个点.

如果 T_1 与 T_2 都处于一般位置，那么，我们可以作出一个三角剖分 T'，它既是 T_1 又是 T_2 的一个细分. 按下列步骤作出 T'，我们用图 14.9 来加以说明：

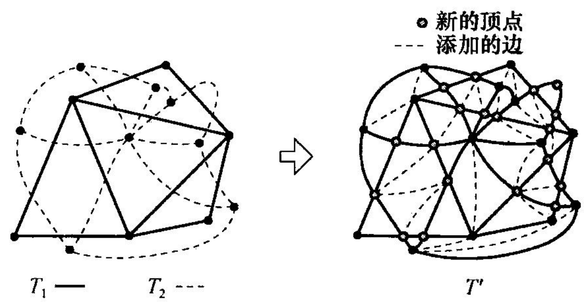


图 14.9 从三角剖分 T_1 与 T_2 作出一个细分 T'

(1) T_1 中的顶点与 T_2 中的顶点成为 T' 中的顶点.

(2) 在 T_1 中的一条边与 T_2 中的一条边之间的每个交点，成为 T' 中的一个顶点.

(3) 在 T_1 中或在 T_2 中的每条边，要么成为 T' 中的一条边，要么被来自步骤 (2) 的一些顶点细分为 T' 中的一些边.

(4) 在一些边上添加一些新的顶点以形成一些三角形，这些三角形出自仅由两条边所界的那些区域.

(5) 在由三条以上的边所界的那些区域添加一些新的边，把这些区域分为一些三角形.

这样得到的三角剖分 T' 既是 T_1 又是 T_2 的一个细分，因而当 T_1 与 T_2 都处于一般位置

时，此定理成立.

再设 T_1 与 T_2 不处于一般位置. 于是我们可以对一个三角剖分，譬如 T_1 稍作调整，以得到一个新的三角剖分 T_1^*，它与 T_1 等价，且使得 T_1^* 与 T_2 处于一般位置. 我们能这样做似乎是有道理的，但它是一个需要对所采用的许多细节进行严格推导的专门结论. 于是，设 T_1^* 就是这样的一个三角剖分，并设 f: $S \to S$ 是把 T_1 映成 T_1^* 的一个同胚. 由于 T_1^* 与 T_2 处于一般位置，正如以前一样，我们可以找到同时是 T_1^* 与 T_2 的一个细分 T_2'. 然后我们可以通过 f^{-1} 把 T'_2 映成 T_1 的一个细分 T'_1. 以这样的方式就可以得到分别是 T_1 与 T_2 细分的 T'_1 与 T'_2，使得它们是等价的. ■

如图 14.10 所示，一个三角形可以被指定一个旋转方向，作为它的每个点的旋转方向，而它不是在默比乌斯带上所遇到的定向逆转的局面.

如图 14.10 所示，在一个三角形上的旋转方向导致它在每条边上的一个方向. 这使我们有以下的定义：

定义 14.12 设 S 是一个紧致曲面，而 T 是 S 的一个三角剖分. 三角剖分 T 可以是**协同定向的**，如果 T 中的每个三角形可以被指定一个旋转方向，使得如果两个三角形交于一条边，那么传承自每个三角形的边的方向彼此相反. (见图 14.11.)

在上述定义中，被传承的边的方向不匹配的条件，确保我们可以把一个定向从一个三角形越过 1 条边推向相邻的三角形，并使对应的定向一致.

在图 14.12 中，我们描绘了球面和环面的协同定向的三角剖分. 在图 14.8 中，射影平面的三角剖分似乎与球面的三角剖分相类似. 然而球面的协同定向的三角剖分，不转化为射影平面，由于当我们把圆盘的顶部和底部粘合在一起以得到此射影平面时，就有一些三角形，它们的边粘合在一起，使得定向并不真正匹配. 环面和克莱因瓶的三角剖分，也会出现类似的情况.

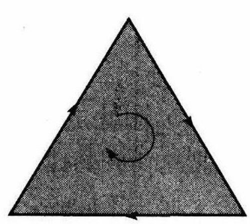


图 14.10 一个三角形上的旋转方向

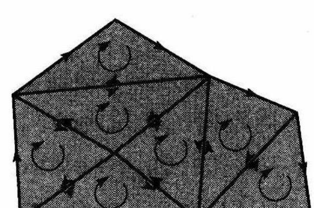


图 14.11 在一个协同定向三角剖分中的三角形

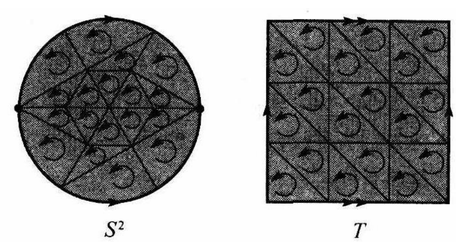


图 14.12 球面和环面的协同定向的三角剖分

以下的定理建立了可定向，以及具有协同定向这两种性质的等价性：

定理 14.13 一个紧致曲面 S 是可定向的，当且仅当它有一个协同定向的三角剖分.

证明 我们首先来证明，如果一个紧致曲面 S 是协同定向的，那么，S 的任一三角剖分也是协同定向的. 特别地，设 T_1 与 T_2 是 S 的三角剖分，并设 T_1 是协同定向的. 由定理 14.11，存在分别是 T_1 与 T_2 的细分 T_1' 与 T_2'，使得 T_1' 与 T_2' 是等价的. 显然

(1) 细分 T_1' 传承一个来自 T_1 的协同定向.

(2) 三角剖分 T_2' 由于等价于 T_1' 而得到一个协同定向.

(3) 三角剖分 T_2 来自它的细分 T_2' 的协同定向.

再设 S 是一个不可定向的紧致曲面，因而包含一个嵌入的默比乌斯带 M. 我们需要证明，S 的任一三角剖分不是协同定向的. 由本证明的第一部分，只要证明存在 S 的一个三角剖分不是协同定向的就可以了. 设 T 是 S 的一个三角剖分. 我们可以用与定理 14.11 的证明中类似的做法，调整和细分 T，使得所得到的 S 的三角剖分 T' 是一族三角形 T_M'，它的并是嵌入的默比乌斯带 M. 通过沿着默比乌斯带的中心线推拉旋转的方向，我们就可以使旋转的方向逆转. 这个事实蕴涵，在 T_M' 中的三角形不是协同定向的. 因此，S 的三角剖分 T' 不是协同定向的.

接下来设 S 是可定向的. 我们需要证明，S 有一个协同定向的三角剖分. 如果不是这样，设 T 是 S 的一个三角剖分. 那么，T 不是协同定向的. 从 T 中任一三角形开始，在它上面选取一个旋转方向，以协同的方式把此旋转方向延长到相邻的三角形. 对 T 中的所有三角形继续这个过程. 由于 T 不是协同定向的，因此在某个点，我们可以在一个三角形上的一个旋转方向终止，此方向与已指定为一个相邻三角形的方向不协同. 于是，可以得到相邻三角形的一个序列 τ_1，…，τ_n 使得

(1) 对于任一 $i=1$，…，$n-1$，τ_i 与 τ_{i+1} 有一条公共边，且是相互协同定向的.

(2) 三角形 τ_n 与 τ_1 有一条公共边，但 τ_n 上的旋转方向与 τ_1 的旋转方向不协同.

考虑跨越图 14.13 中阴影所示的每个三角形 τ_i 的带子. 如果我们把这条带子看成是由这些三角形粘合在一起而构成的，一次粘合一个，那么，当把 τ_n 与 τ_1 相粘合时，此带子就被拧了半拧，使之成了一条默比乌斯带. 因此，存在一条嵌入 S 中的默比乌斯带，这与 S 是可定向的假设相矛盾. 于是得出，S 有一个协同定向的三角剖分. ■

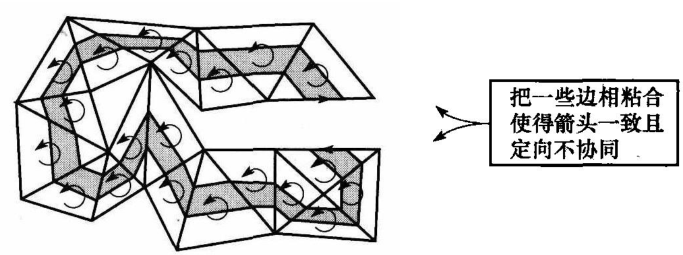


图 14.13 阴影的带子相粘合形成此曲面上的一条默比乌斯带

我们以前曾指出，球面和环面都存在协同定向的三角剖分.（见图 14.12.）因此定理 14.13 蕴涵球面和环面是可定向的. 由于定向性是一种拓扑性质，因此，我们可以把这两种曲面与克莱因瓶和射影平面加以区分. 特别地，无论球面还是环面，与克莱因瓶和射影平面都不同胚，由于前两个曲面是可定向的，而后两个曲面是不可定向的. 正如本例所指出的，定向性是用于区分紧致曲面的一种基本性质. 下一节，我们把它与欧拉示性数一起，用来区分所有的紧致曲面.

至此我们已经对稍受限制的紧致曲面族作了介绍，但我们可以戏剧性地用以下定义中的连通和来对此曲面族加以扩充：

定义 14.14 已知两个曲面 S_1 与 S_2，S_1 与 S_2 的**连通和**，是通过从每个曲面中挖去一个圆盘的内部，并借助一个商映射，把两个圆周的边粘合在一起而得到的曲面，记为 $S_1 \# S_2$.（见图 14.14.）

连通和这种运算的结果是一个曲面.（见练习 14.9.）虽然在这里我们不加证明，但至于同胚，上述连通和运算与一些特定的圆盘无关，这些圆盘是我们从这些曲面中挖去的. 连通和运算与我们用于两种圆周边上的特定粘合也无关.

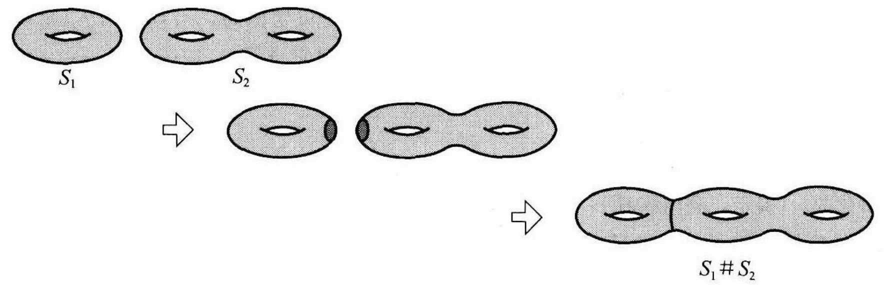


图 14.14 两个曲面的连通和

请注意，当我们求曲面 S^2 与任何其他曲面 S 的连通和时，结果是与 S 同胚. (见图 14.15.) 如果我们把连通和认为是在曲面 S^2 上的一个加法运算，其作用像是恒等运算.

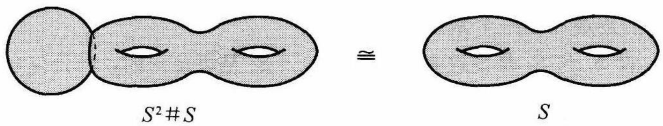


图 14.15 $S^2\#S$ 与 S 同胚

定义 14.15 *n* 维环面的连通和，称为 **n 维曲面的亏格**，记为 nT. 球面称为 **0 维环面的亏格**. (见图 14.16.)

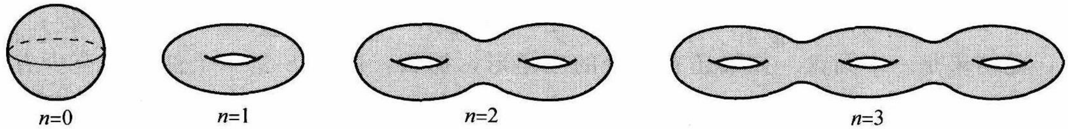


图 14.16 n 维曲面的亏格，$n=0$，1，2，3

对于所有整数 $n\geqslant 0$，n 维曲面的亏格是一个紧致曲面. 此外，由以下的定理可得出，n 维曲面的亏格是可定向的.

定理 14.16 设 S_1 与 S_2 是紧致曲面. 那么 $S_1\#S_2$ 是可定向的，当且仅当 $S_1\#S_2$ 是可定向的.

证明 见练习 14.10. ■

14.1 节练习

14.1 在练习 7.18 中，我们介绍并证明了附加点轴 (extra-point line) 是豪斯多夫的. 基本的集合是 $X=\mathbf{R}\cup\{p_e\}$，其中 p_e 是不包含在 $\mathbf{R}$ 之中的一个附加点. X 上的拓扑，借助由所有区间 $(a, b)\subset\mathbf{R}$ 及所有形如 $(c, 0)\cup\{p_e\}\cup(0, d)$ 的集合 $(c<0, d>0)$ 来定义.

(1) 证明：X 上有一个与一个开区间同胚的邻域.

(2) 证明：X 有一个可数的基.

(附加点轴满足 1 维流形所需的两个条件，但它不是豪斯多夫的，因而不是一个 1 维流形.)

14.2 证明：如果 $\mathbf{R}_d$ 是具有离散拓扑的 $\mathbf{R}$，那么，$\mathbf{R}_d\times\mathbf{R}$ 满足成为 1 维流形的，除了没有一个可数基之外的所有条件.

14.3 设 M 是一个 n 维流形，并假定 $x\in M$. 证明：对于 x 的任一邻域 U，存在一个开集 B，使得 $x\in B\subset U$，且 B 与 n 维开球同胚.

14.4 **证明定理 14.7** 设 S_1 与 S_2 是同胚的两个曲面. 那么 S_1 是可定向的，当且仅当 S_2 是可定向的.

14.5 尽管默比乌斯带不是一个曲面，我们可以如图 14.17 所示对它进行三角剖分. 在它的一个三角形上选取一个旋转方向，并证明它不能扩充为整个三角剖分的一个协同定向.

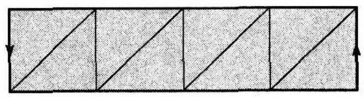


图 14.17 默比乌斯带的三角剖分

14.6 用乌雷松度量化定理（定理 5.24）来证明，每个流形是正则的，因而是可度量化的.（提示：利用练习 14.3.）

14.7 举一个拓扑空间的例子，它满足成为 2 维流形的除了不是豪斯多夫的之外的所有条件.（提示：考虑练习 14.1.）

14.8 设 M 是一个 n 维的非紧致流形.

(1) 证明 M 是局部紧致的.（因此 M 的单点紧化，产生一个紧致的豪斯多夫空间 Y，它以 M 为一个子空间，并使得 $\mathrm{Cl}(M)=Y$.）

(2) 举一个 2 维流形 M 的例子，使得 M 的单点紧化不是一个 2 维流形.

14.9 证明两个紧致曲面的连通和是一个紧致曲面.

14.10 **证明定理 14.16** 设 S_1 与 S_2 是紧致曲面. 那么 $S_1 \# S_2$ 是可定向的，当且仅当 S_1 与 S_2 都是可定向的.

14.2 欧拉示性数与紧致曲面的分类

本节我们继续研究紧致曲面. 我们介绍欧拉示性数，证明它是紧致曲面的一个不变量，然后用它——对可定向性的猜测——来对两个紧致曲面加以区分.

已知一个紧致曲面 S 的一个三角剖分，我们可以用被视为同一的，产生此曲面的若干对边作一个多边形. 我们首先从一个三角形开始，并与另一个三角形实现单边视为同一. 在拓扑上，此结果是一个圆盘. 如果还有其余的三角形，那么，由于 S 是一个曲面，至少有一个三角形沿它的边界上的一条边与这个圆盘粘合. 在拓扑上，此结果仍是一个圆盘. 我们继续此过程，直到所有的三角形都被粘合，产生一个圆盘，在它边界上的几对边仍然被视为同一. 这称为 S 的一个**多边形表示**. 把环面与克莱因瓶表示为把它们的边粘合在一起的一些正方形，就是多边形表示. 在 3.4 节中，我们已看到一些曲面的其他多边形表示.

例 14.1 在图 14.18 中，我们看到，环面与克莱因瓶的连通和 $T\# K$ 的一个多边形表示. 我们从所得到的曲面的图示，说明如何来展现被粘合的边.

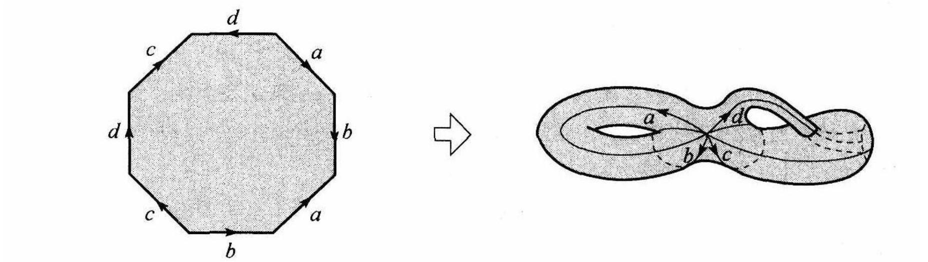


图 14.18 $T\# K$ 的一个多边形表达

已知一个紧致曲面的一个三角剖分，我们定义欧拉示性数如下：

定义 14.17 设 T 是紧致曲面 S 的一个三角剖分. 我们用 $\chi(T)=V-E+F$ 来定义 T 的**欧拉示性数**，其中 V 是在此三角剖分中的顶点数，E 是边数，而 F 是三角形的个数.

我们用 F 作为三角形的个数，由于我们还把它们认为是面的个数，就像剖分成三角形的紧致曲面由三角形的面组成一样. 表达式 $V-E+F$，既在欧拉示性数公式中出现，又在可平面图的欧拉公式中出现（定理 13.18）. 在本节最后，我们讨论这两个公式之间的关系.

原来，对于已知紧致曲面的任一三角剖分来说，欧拉示性数都是相同的. 我们把上述结论表示为以下的定理，它在对两个紧致曲面进行区分时，是非常有用的：

定理 14.18 *设 T_1 与 T_2 是紧致曲面 S 的三角剖分. 那么 $\chi(T_1)=\chi(T_2)$.*

证明 设 S 是紧致曲面，而 T_1 与 T_2 是 S 的三角剖分. 首先，如果 T_1 与 T_2 是等价的，那么直接可以得出，它们的欧拉示性数是相同的.

其次，如果 T_1 与 T_2 不等价，那么由定理 14.11，存在等价的三角剖分 T_1' 与 T_2'，它们分别是 T_1 与 T_2 的细分. 我们断言，在细分下欧拉示性数保持不变. 有了此断言就有 $\chi(T_1)=\chi(T_1')$ 与 $\chi(T_2)=\chi(T_2')$，又由于 T_1' 与 T_2' 是等价的，所以 $\chi(T_1')=\chi(T_2')$. 于是得出，在这种情况同样有 $\chi(T_1)=\chi(T_2)$.

我们再来证明，一个三角剖分 T 的欧拉示性数，在细分下保持不变. 为此，把 T 看成是在 S 中，由 T 的顶点和边所组成的一个拓扑图 G. 我们可以通过对 G 进行一系列的运算来作出 T 的一个细分 T'，产生一系列的拓扑图 $G=G_0$，…，G_n，其中 G_n 是与细分 T' 对应的拓扑图.

上述一系列的运算如下，我们用图 14.19 来加以说明：

(1) 在位于 G_i 的一条边上添加一个新的顶点，得到 G_{i+1}. 其结果是，G_i 中的边细分为 G_{i+1} 中的两条新边.

(2) 在 G_i 中添加一个新的顶点和一条新的边，得到 G_{i+1}. 所添加的顶点和边，位于 G_i 的补图，而新边把此新的顶点与 G_i 中的一个顶点相连.

(3) 在 G_i 中添加一条新的边，得到 G_{i+1}. 所添加的边位于 G_i 的补图，且把 G_i 中的两个顶点相连.

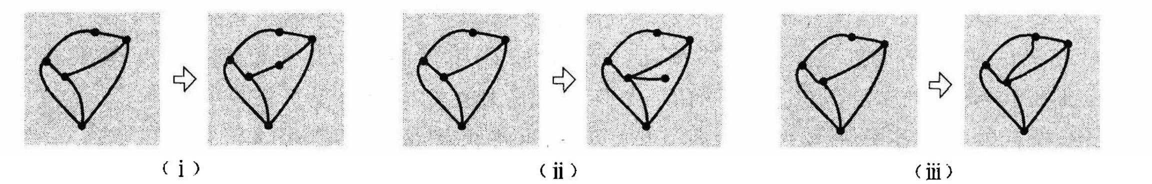


图 14.19 为细分三角剖分而在拓扑图上进行的一些运算

为了证明欧拉示性数在细分下保持不变，我们证明这样一系列的运算并不改变欧拉示性数. 首先，当一个拓扑图 G 与 S 的一个三角剖分 T 相关时，G 的顶点和边，与 T 的顶点和边相对应. 因此，如果我们设 V 表示 G 中的顶点数，E 是边数，而 F 是在 S 中 G 的补图的连通子图的个数，那么 $V-E+F$ 是欧拉示性数. 在对一个拓扑图进行以上每一种运算后，我们未必有与一个三角剖分相关的拓扑图，但是我们仍然可以为它算出 $V-E+F$. 我们断言，它的值经每一种运算后不变，因而得出欧拉示性数在细分下保持不变. 让我们看一下这些运算对 $V-E+F$ 的作用：

运算 (1)：经这个运算，在 G_i 中添加一个顶点，并把一条边细分为两条新边. 因此，我们净增加一个顶点和一条边，结果不改变 $V-E+F$ 的值.

运算 (2)：经这个运算，在 G_i 中添加一个顶点和一条边，且使补图的连通子图的个数保

持不变. 因此我们净增加一个顶点和一条边，结果也不改变 $V-E+F$ 的值.

运算 (3): 经这个运算，在 G_i 中添加一条边，并把补图的一个连通子图，分为两个新的连通子图. 因此，我们净增加一条边，和补图的一个连通子图，结果仍然不改变 $V-E+F$ 的值.

于是得出，欧拉示性数在细分下保持不变，因而我们就得到所要的结果：如果 T_1 与 T_2 是紧致曲面 S 的三角剖分，那么 $\chi(T_1)=\chi(T_2)$. ■

在上述证明中有两种运算，尽管在直观上显而易见，却非同寻常. 一是运算 (2)，它使拓扑图补图的连通子图的个数保持不变，二是运算 (3)，它把一个连通子图分为两个新的连通子图. 这些结果源自定理 13.17，它是我们未加证明的，但对若尔当曲线定理（定理 11.2.）和定理 11.10 作了推广的一个结论.

定理 14.18 证明中的运算 (1)～(3)，能使我们实现在定理 14.11 证明中的 5 个步骤，这些步骤用于对一般位置的两个三角剖分进行常见的细分. 设 T_1 与 T_2 是这样的两个三角剖分. 如果我们选取 T_1，那么我们可以用运算 (1)～(3)，把来自 T_2 的所有的顶点和边都添加到这两个三角剖分之上. 这在本质上涵盖了定理 14.11 证明中的作图步骤 (1)～(3). 然后我们就可以用运算 (1)～(3)，再插入一些顶点和边（就像定理 14.11 证明中的步骤 (4) 与 (5) 所叙述的一样)，使这些三角形离开那些已经不是三角形的区域.

有了定理 14.18，我们就可以把一个**紧致曲面 S 的欧拉示性数**，定义为 S 的任一三角剖分的欧拉示性数. 我们把 S 的欧拉示性数记为 $\chi(S)$.

显然如果 T 是 S 的一个三角剖分而 f：$S\to S'$ 是一个同胚，那么，f 自然把 T 映成 S' 的一个三角剖分 T'. 此外，T' 的欧拉示性数等于 T 的欧拉示性数. 于是，我们就有以下的定理，它证明了欧拉示性数是紧致曲面的一个不变量.

定理 14.19 如果 S 与 S' 是同胚的紧致曲面，那么 $\chi(S)=\chi(S')$.

例 14.2 从图 14.8 中的三角剖分，我们可以看出 $\chi(S^2)=2$，$\chi(T)=0$，$\chi(K)=0$，$\chi(P)=1$.

这些欧拉示性数的值与定向性一起，使我们能够区分这 4 个空间. 由定理 14.19 可得出，S^2 与 T，K 或 P 不同胚，T 与 P 不同胚，而 K 与 P 不同胚. 在这里通过欧拉示性数唯一不能加以区分的是 T 与 K，但在上一节，我们已用定向性对它们作了区分.

欧拉示性数的拓扑不变性（定理 14.19）和可平面图的欧拉公式（定理 13.18)，是密切相关的两个结论. 定理 14.19 适用于紧致曲面，但仅涉及三角剖分，而定理 13.18 适用于平面与球面，且涉及一般的拓扑图. 这两个结论都蕴涵球面的欧拉示性数为 2.

正如我们对 S^2，T，K 和 P 所做过的一样，我们可以用欧拉示性数与定向性，来区分所有的紧致曲面. 以下的定理是我们要寻求的那种结论的一个范例. 它对一些紧致曲面作出了全面的分类.

定理 14.20 任一紧致曲面恰好与 S^2，$T\#T\#\cdots\#T$ 或 $P\#P\#\cdots\#P$ 之一同胚.

在定理 14.20 中所列出的那些紧致曲面，已在图 14.20 中表示出来. 正如用 nT 表示 n 维环面的连通和一样，我们用 nP 表示 n 维射影平面的连通和.

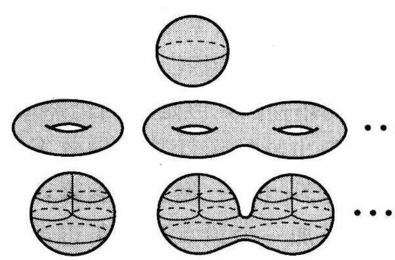


图 14.20 完整的紧致曲面族

为了证明定理 14.20，必须证明任一紧致曲面至少与 S^2，nT 或 nP 之一同胚，而在 S^2，nT 与 nP 之中，任何两

个都不同胚. 在本节稍后，我们用欧拉示性数与定向性，来证明所列出的那些紧致曲面中的任何两个都不同胚.

对任一紧致曲面至少与所列出的曲面之一同胚，我们不加证明. 它们的证明可以在 [Mun] 和 [Mas] 中找到. 证明的思路是，已知一个紧致曲面，我们可以对它进行一系列的切割和粘贴运算，以证明它具有所列出曲面之一的形式. 在 3.4 节中，我们已对切割和粘贴运算作过介绍. 我们在例 14.3 中给出另一个切割和粘贴的例子.

考虑我们能用连通和所作出的所有紧致曲面，令人惊奇的是，它们全都归入定理 14.20 所列出的曲面类型之一. 例如，克莱因瓶是不在定理 14.20 所列出的曲面之中出现的一个紧致曲面. 然而，在例 3.25 中我们已证明过 $K\cong P\# P$. 当然，$P\# P$ 是所列出的曲面之一，因而克莱因瓶也是.

例 14.3 不在定理 14.20 所列出的曲面之中出现的另一种紧致曲面是 $T\# P$. 这是一种不可定向曲面. 因此由定理 14.20，它必定是一些射影平面的连通和. 事实上 $T\# P\cong P\# P\# P$. 在图 14.21 中，我们用切割和粘贴说明了 $T\# P\cong K\# P$. 由于 $K\cong P\# P$，于是得出，$T\# P\cong K\# P\cong P\# P\# P$.

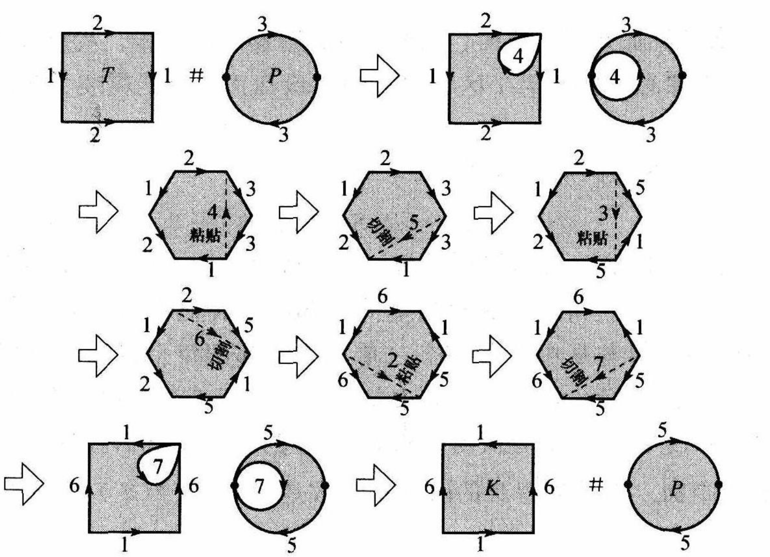


图 14.21 用切割和粘贴说明 $T\# P$ 与 $K\# P$ 同胚

从例 14.3 的关系式 $T\# P\cong K\# P$ 证实，对于曲面的连通和来说，消去律不成立. 而当 $T\# P$ 与 $K\# P$ 同胚为已知的事实时，此消去律却蕴涵 T 与 K 同胚. 然而，T 与 K 不同胚，这是由于 T 是可定向的，而 K 却不是.

关系式 $P\# P\cong K$ 与 $T\# P\cong K\# P$，产生射影平面连通和的下列表征:

定理 14.21 对于任一整数 $n\geqslant 3$，

$$nP\cong\begin{cases}\dfrac{n-1}{2}T\# P & n\text{ 是奇数}\\[2ex] \dfrac{n-2}{2}T\# K & n\text{ 是偶数}\end{cases}$$

证明 见练习 14.11. ■

紧致曲面分类定理的以下替代形式，是定理 14.20 与 14.21 的一个直接推论：

定理 14.22 任一紧致曲面恰好与 S^2，nT，$nT\#K$ 或 $nT\#P$ 之一同胚.

在定理 14.22 后两个连通和中，我们可以允许没有 T，而把 K 与 P 列入我们的表中. 在图 14.22 中，展示了我们在定理 14.22 中所列出的一些紧致曲面.

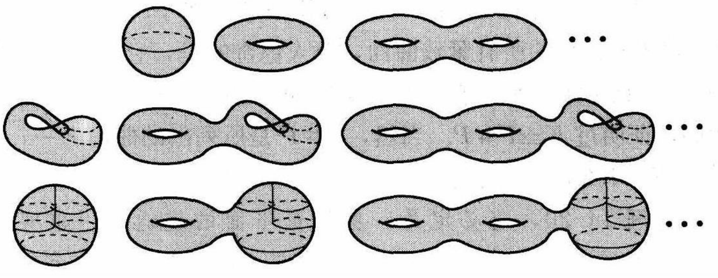


图 14.22 完整的紧致曲面族

像例 14.2 中所论证的球面、环面、克莱因瓶和射影平面一样，我们可以用定向性与欧拉示性数来区分不同的紧致曲面. 为了区分所有的紧致曲面，我们需要了解，连通和运算对欧拉示性数的作用.

引理 14.23 如果 S_1 与 S_2 是紧致曲面，那么

$$\chi(S_1\#S_2)=\chi(S_1)+\chi(S_2)-2.$$

证明 由于欧拉示性数与三角剖分无关，我们选取 S_1 与 S_2 的三角剖分，使得一些圆盘是在此三角剖分中的一些三角形，这些圆盘的内部，是我们在取连通和的过程中被我们挖去的. 于是连通和的运算与从中挖去一个三角形的内部的每个曲面相对应，这些三角形的边彼此视为同一，顶点与顶点粘合，边与边粘合. 但是每个边界由 3 个顶点和 3 条边组成. 因此，在组合 S_1 与 S_2 的三角剖分从而得到 $S_1\#S_2$ 的三角剖分的过程中，我们丧失了 3 个顶点、3 条边和 2 个面. 于是所得到的欧拉示性数是 $\chi(S_1)+\chi(S_2)-3+3-2$. 因此 $\chi(S_1\#S_2)=\chi(S_1)+\chi(S_2)-2$. ■

定理 14.24 对于紧致曲面 nT 与 nP 来说，欧拉示性数由 $\chi(nT)=2-2n$ 与 $\chi(nP)=2-n$ 给出.

证明 见练习 14.12. ■

由上一节包括定理 14.16 在内的关于定向性的结论，可得出 S^2 与 nT 是可定向的，而 nP 不是. 此外由于 $\chi(S^2)=2$ 与 $\chi(nT)=2-2n$ 可得出，在 S^2 与 nT 之中没有两个紧致曲面有相同的欧拉示性数. 类似地，没有两个[⊖]紧致曲面 nP 有相同的欧拉示性数. 因此，已知在定理 14.20 中所列出的任何两种紧致曲面，要么有相同的欧拉示性数，要么一种是可定向的，而另一种是不可定向的. 无论哪种情况，我们可以得到结论，在定理 14.20 中所列出的任何两种

⊖ 指两个不同的. ——译者注

紧致曲面都不是同胚的. 对于定理 14.22 中所列出的那些紧致曲面，也可以得出同样的结论. 这就导出以下有用的结论：

定理 14.25 两个紧致曲面是同胚的，当且仅当它们有相同的欧拉示性数，且要么都是可定向的，要么都是不可定向的.

定理 14.20 和定理 14.25 使紧致曲面的分类问题宣告结束. 为确定定理 14.20 中所列出的哪一种紧致曲面与任何给定的曲面相对应，我们有了完整的，所有无重复的可能情况的表，并有了一种简单的（计算欧拉示性数及确认曲面是否可定向）算法.

例 14.4 为了了解此算法如何能用于确认一个紧致曲面，考虑由连通和 $K\#K\#P\#P\#T\#T$ 给出的曲面 S. 于是可得出 S 是不可定向的，这是由于在连通和中存在一个不可定向曲面，S 正是由这个曲面而构成. 用引理 14.23，和 K，T 与 P 的欧拉示性数，我们看出 $\chi(S)=-8$. 在定理 14.20 中所列出的紧致曲面中，欧拉示性数为 -8 的不可定向曲面是 $10\,P$，即连通和为 10 的射影平面，因此，S 与 $10\,P$ 同胚.

确认诸如上例中的曲面为紧致曲面的另一个方法是，只要利用关系 $K=P\#P$ 及 $T\#P=P\#P\#P$，把此连通和表示为射影平面的连通和. 在 $K\#K\#P\#P\#T\#T$ 的情况，每个 K 提供一个 $P\#P$，每个 $P\#T$ 提供一个 $P\#P\#P$，因此结果是 $10\,P$.

我们还想把一个圆盘或一个默比乌斯带作为一个曲面来考虑. 然而，在它们的边上的那些点，没有与 2 维开球同胚的邻域. 但它们却有与半球同胚的邻域. 于是，设 H^n 是由 $H^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in \mathring{B}^n \mid x_n\geqslant 0\}$ 给出的 n 维开球 $\mathring{B}^n$ 的子空间. 我们定义广泛的一类流形如下：

定义 14.26 带边的 n 维流形 M 是一个具有可数基的豪斯多夫空间，使得任一点，要么存在一个与 n 维开球 $\mathring{B}^n$ 同胚的邻域，要么存在一个与 H^n 同胚的邻域，而且后一类型的点集是非空的.

存在一个与 n 维开球 $\mathring{B}^n$ 同胚的邻域的点集，称为此流形的**内部**，而不存在一个与 n 维开球 $\mathring{B}^n$ 同胚的邻域，但存在一个与 H^n 同胚的邻域的点集，称为此流形的**边缘**（简称**边**）. M 的边记为 ∂M.

一个带边的连通 2 维流形称为**带边的曲面**.

例 14.5 在图 14.23 中，我们图示了各种带边的曲面. 在左边，S_1 是一个亏格为 3 的曲面，在其中被挖去了两个圆盘的内部. 在中间，S_2 是一个在它的边上添加了两根重叠的带子. 在右边，S_3 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间，它的边（S_3 看成是带边的曲面）是一个三叶纽结.

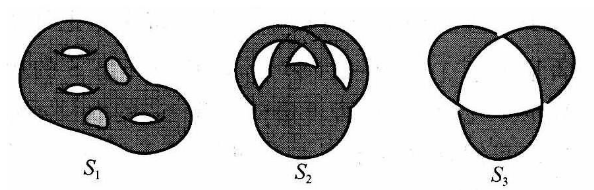


图 14.23 一些带边的曲面

在"带边的曲面"中，"边"的含义与以前的含义不同，尽管所得到的集合可能是一致的. 如果把一个圆盘看成是 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集，那么，把它的边作为带边曲面的边，与作为 $\mathbf{R}^2$ 一个子集的边是一样的.（见图 14.24.）然而对于嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中默比乌斯带的情况，它的作为带边曲面的边，是一个圆周，而作为 $\mathbf{R}^3$ 一个子集的边，是整个默比乌斯带.

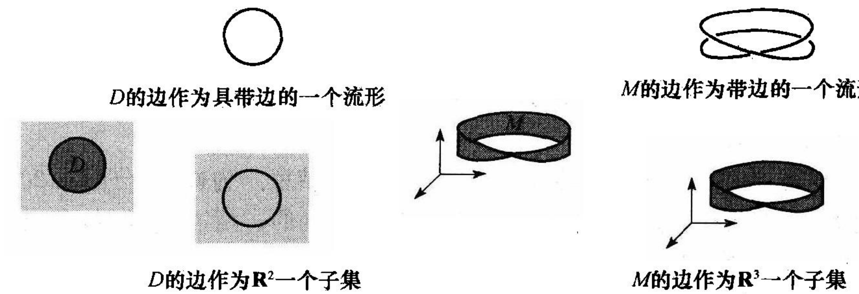


图 14.24 一个带边的曲面的边可能与作为一个拓扑空间子集的边一致，也可能不一致

我们采用以下一些关于带边 S 的曲面的事实．它们似乎有道理，但是为了证明它们需要一些预备的结论，这会使我们偏离主题太远．

（1）S 的边是一个 1 维流形．

（2）如果 S 是紧致的，那么，它的边存在有限个分支．

对紧致曲面曾提出过的大部分概念（三角剖分的存在性、定向性的定义与欧拉示性数等等），转为与带边的紧致曲面有关的概念．

设 S 是一个带边的紧致曲面．它的边的每个分支是 1 维紧致流形，因而由定理 14.3，每个这样的分支必定与一个圆周同胚．对于每个这样的边界圆周，我们可以添加一个带边的圆盘与此圆周粘合．这个过程称为 S 的**边加盖**（capping off）．于是，S 连同这些粘上的圆盘，是一个不带边的紧致曲面 S^*．因此，每个带边的紧致曲面 S，可通过从定理 14.20 所列出的哪些紧致曲面之中的 S^* 中，挖去有限多个分离圆盘的内部而得到．

如果一个带边的紧致曲面 S 嵌入 $\mathbf{R}^3$ 之中，对应的加盖的曲面 S^* 的情况未必相同．例如，默比乌斯带是一个嵌入 $\mathbf{R}^3$ 之中带边的曲面，但是，当我们为默比乌斯带加盖，就得到一个并非嵌入 $\mathbf{R}^3$ 之中的射影平面．

为了辨认一个带边的紧致曲面 S，计算它的欧拉示性数，确定它是否可定向，并确定它有多少个边的分支就可以了．我们再来考虑加盖曲面 S^*．直接就可看出，S 与 S^* 的欧拉示性数满足关系 $\chi(S^*)=\chi(S)+n$，其中 n 是 S 的边的分支数，即为得到 S^* 而在 S 上所粘合圆盘的数量．无论 S^* 是否可定向，用 S^* 的欧拉示性数，我们就可以利用定理 14.20 来辨认 S^*．于是，我们就确认了 S 是通过挖去 n 个分离圆盘而得到的曲面 S^*．

例 14.6 在图 14.25 中，我们图示了一个作为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间的，带边的曲面 S. S 的边是连通的，且构成记为 7_4 的纽结．我们希望辨认 S.

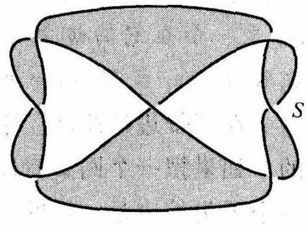


图 14.25 这是哪一种带边的曲面

请注意，在 S 中的任一圈，必定经历偶数次拧半圈．因此，在 S 中嵌入一条默比乌斯带（蕴涵 S 是可定向的）是不可能的．此外，S 的欧拉示性数是 -1．（见练习 14.16.）于是，如果 S^* 是由 S 加盖而得到的曲面，那么 S^* 是可定向的，且 $\chi(S^*)=\chi(S)+1=0$．于是得出，S^* 是一个环面，而 S 是从一个环面挖去单个圆盘而得到的带边曲面．

14.2 节练习

14.11 **证明定理 14.21** 对于任一整数 $n\geqslant 3$，

$$nP\cong\begin{cases}\frac{n-1}{2}T\# P & n\text{ 是奇数}\\ \frac{n-2}{2}T\# K & n\text{ 是偶数}\end{cases}$$

14.12 **证明定理 14.24** 对于紧致曲面 nT 与 nP 来说，欧拉示性数由 $\chi(nT)=2-2n$ 与 $\chi(nP)=2-n$ 给出.

14.13 考虑曲面 $T\# K\# K\# P\# P\# P$. 这是定理 14.20 中所列出的哪一种曲面？是定理 14.22 中所列出的哪一种曲面？

14.14 考虑通过把一个正方形的一对边相粘合来构建一个拓扑空间的所有可能的方式. 对于每种可能性辨认所得到的空间.

14.15 (1) 证明：把一个六边形相对的边视为直接越过，所产生的是一个环面.

(2) 请确定：当一个八边形相对的边视为直接越过，所产生的是什么曲面.

(3) 请确定：当一个十边形相对的边视为直接越过，所产生的是什么曲面.

(4) 请确定：当一个 $2n(n\geqslant 6)$ 边形相对的边视为直接越过，所产生的是什么曲面.

14.16 对于例 14.6 中的带边曲面，证明 $\chi(S)=-1$.

14.17 辨认在图 14.26 中的每个带边曲面.

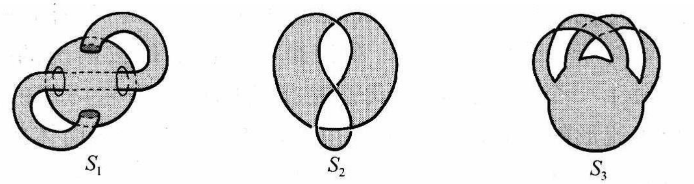


图 14.26 辨认图中的每个带边曲面

14.18 (1) 辨认（不作证明）所有带边的 1 维连通流形.

(2) 辨认（不作证明）所有带边的 1 维紧致流形.

14.3 3 维流形

在本节，我们观察各种 3 维流形的例子，在我们心目中，任何一个 3 维流形都是我们所在的宇宙的空间部分.

例 14.7(3 维球面 S^3) 3 维球面定义为在 4 维空间中与原点的距离为 1 的点集，

$$S^3=\{(x,y,z,w)\,|\,x^2+y^2+z^2+w^2=1\}.$$

它是一个紧致的连通 3 维流形.（见练习 14.19.）

在例 7.20 中，我们曾讨论过为什么可把 S^3 认为是 3 维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的单点紧化. 通过在 $\mathbf{R}^3$ 中只要添加一个点，并适当地为此结果定义一个拓扑，我们就能得到一个与 S^3 同胚的空间.

我们再考虑作出 S^3 的另一个方式. 我们把它看作为类似于 2 维球面，就可以认为是一个上半球面沿着赤道与下半球面相粘合. 由于这两个半球面都与圆盘同胚，我们可以认为，此 2 维球面由两个圆盘的边粘合在一起而产生.（见图 14.27.）

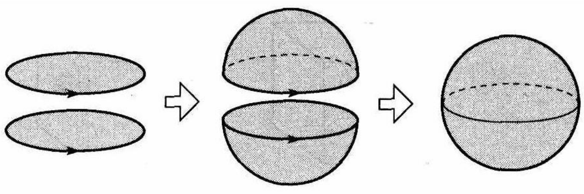


图 14.27 两个圆盘的边粘合在一起而得到 2 维球面

类似地，我们可以通过把 3 维球沿着它们的球面边缘粘合在一起的方法，来作出 3 维球面．但是按照我们最初把 3 维球面描述为在 4 维空间中，与原点距离为 1 的点集，这两个 3 维球在哪里呢？设

$$R = \{(x,y,z,w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \text{ 且 } w = 0\}.$$

换句话说，R 是 S^3 的，令 $w=0$ 而得到的子集．注意到对于那些点，$x^2+y^2+z^2=1$，所以 R 是一个 2 维球面．以下两个集合

$$S^3_- = \{(x,y,z,w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \text{ 且 } w \leqslant 0\}$$

$$S^3_+ = \{(x,y,z,w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \text{ 且 } w \geqslant 0\}$$

都以 R 为边缘．因此 S^3 是把 S^3_- 与 S^3_+ 沿着它们的球面边缘粘合在一起得到，而 S^3 的这两个子空间，都与此 3 维球同胚．（见练习 14.20.）于是按照这种方式就能发现，S^3 由两个 3 维球沿着它们的边缘粘合而成．

我们希望有一种产生 3 维流形一些例子的简单手段．正如一些曲面可以三角剖分一样，3 维流形可以分解为一些四面体，其中任何两个四面体如果相交，可能交于一个面、一条边或一个顶点．我们可以把一个紧致连通曲面的一个三角剖分中的有限多个三角形，与此边粘合的一个子集粘合在一起，以实现此曲面作为一个具有把若干对边视为同一的多边形．正如上述做法一样，我们可以把一个紧致连通的 3 维流形中有限多个四面体，与此面的一个子集粘合在一起，以实现此 3 维流形作为一个具有把它的外部若干对面视为同一的一个多面体．

当讨论多面体时，对于一个面的内部，我们是指从此面挖去周围的一些边和顶点，而得到的集合．类似地，对于一个边的内部，我们是指从此边挖去它两端的顶点而得到的集合．这些内部，与作为带边流形的集合的内部相对应，而不是与作为多面体的子集的内部相对应．

例 14.8(3 维环面) 在第 3 章，我们曾把 3 维环面定义为积空间 $S^1 \times S^1 \times S^1$．圆周 S^1 有可数组基，且是紧致、连通和豪斯多夫的．于是可得出，3 维环面作为圆周的一个乘积，同样具有这些性质．在 S^1 中的任意一点，有一个与一个开区间同胚的邻域．因此，在此 3 维环面中的任意一点，有一个与 3 个开区间的乘积同胚的邻域，而这一邻域与 3 维开球同胚．因此，3 维环面是一个紧致、连通的 3 维流形．

我们也可以像例 3.26 一样，通过在一个立方体相对的两个面粘合在一起的方法得到．对于我们今后要进行的类似的作法，可看出按照这种表示法，在此 3 维环面中的任意一点有怎样的一个邻域是有益的．在此立方体内部的一个点，有一个 3 维开球邻域，因而在此 3 维环面中的对应点同样如此．（见图 14.28.）在一个面内部的点有一个半球邻域．与相对的面上的点视为同一的点也有一个半球邻域．这两个半球邻域粘合在一起，构成此 3 维环面中对应点一个 3 维开球邻域．在一条边的内部点有一个$\frac{1}{4}$球邻域，把它与另外 3 条边的 3 个对应点的$\frac{1}{4}$球邻域粘合在一起，就构成在此 3 维环面中所得到的点的一个 3 维开球邻域．最后，在顶点

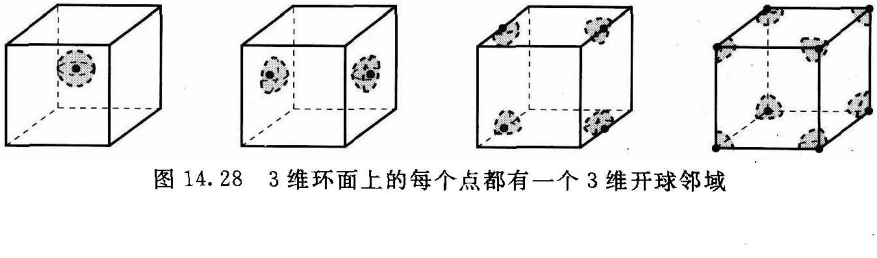


图 14.28　3 维环面上的每个点都有一个 3 维开球邻域

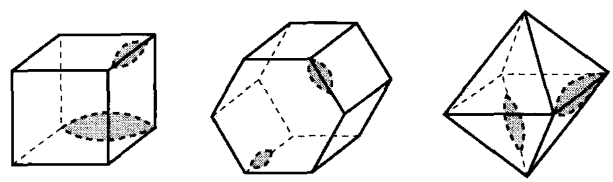
处的八个点有$\frac{1}{8}$球邻域也粘合在一起，就构成在此 3 维环面中所得到的点附近的一个 3 维开球邻域. 于是，在此 3 维环面上的每个点都有一个 3 维开球邻域.

按照这个例子，产生紧致、连通的 3 维流形看来并非难事. 只要取你认为合适的具有偶数个 n(n 为任意) 边形的面的多面体，并把这些面成对地粘合在一起，使边与边粘合，顶点与顶点粘合. 我们称这种构建商空间的过程为**多面体粘合**.

我们必须倍加小心，然而，由于一个多面体粘合的结果可能不是一个 3 维流形. 已知一个多面体粘合，在所得到的商空间中的一些点，与以 3 维开球为邻域的多面体的内点对应，这正如所需要的. 而与 3 维环面的情况一样，在此多面体的面内部中的一些粘合点所得到的点有 3 维开球邻域，此开球邻域是由两个半开球邻域粘合而成的. 然而我们不能确保，出自粘合此多面体一些边的那些点，或出自粘合此多面体一些顶点的那些点有 3 维开球邻域. 为了从多面体粘合得到一个 3 维流形，对边的粘合和顶点的粘合，需要满足一些附加条件. 下面，我们来讨论这些条件.

首先，我们考虑边. 已知一个多面体粘合，自然定义了一个等价关系，使得如果它们彼此粘合，这两条边是等价的. 在这些边的每个等价类中，所有的边是粘合在一起的. 假定我们有这些边的一个等价类 $\{e_1, \cdots, e_p\}$. 设 e^* 表示在此商空间中的由这些边的内部粘合而成的集合. 我们假定这些边的中点粘合在一起，并把所得到商空间的点称为 e^* 的中点.

在此多面体中一条边内部的每个点，如图 14.29 所示，有一个嵌入形如一瓣橘子的邻域. 通过此多面体粘合，橘子瓣状的邻域粘合在一起构成 e^* 中每个点的商空间邻域. 我们关注这些商空间邻域是否与 3 维开球同胚.


图 14.29 在多面体中每条边内部的点有橘子瓣状的邻域

假定在我们的等价类中一些边具有有序性，我们就可以构成一个**面 - 边序列**

$$F_{[1,1]}, e_1, F_{[1,2]}, F_{[2,1]}, e_2, F_{[2,2]}, \cdots, F_{[p,1]}, e_p, F_{[p,2]},$$

使得对于任一 $i=1, \cdots, p$，边 e_i 出现于面 $F_{[i,1]}$和 $F_{[i,2]}$上，而对于任一 $i=1, \cdots, p-1$，面 $F_{[p,2]}$与 $F_{[1,1]}$粘合. 对于我们的等价类中的每条边，取一个包含此边整个内部的橘子瓣状的邻域. 我们可以选取这些邻域，使得它们彼此粘合在一起构成此商空间中 e^* 的一个邻域. 上述面 - 边序列给出了一个有序的，在 e^* 周围的粘合的橘子瓣状的邻域，而由于在此序列最后一个面与第一个面粘合，橘子瓣状的邻域与 e^* 周围所有的通路粘合在一起.

如果我们在 e_1 上放一个箭头表示一个方向，于是，当我们把序列中一些面粘合在一起时，其他边传承来自 e_1 的方向. 在我们把 e_p 包括在内之后，所有的边有一个方向. 于是最后一面把 e_p 与 e_1 相粘合，使得这些箭头，要么一致，要么不一致. 在前一种情况，这些橘子瓣状的邻域粘合在一起，构成 e^* 上每一点的 3 维开球邻域. 在后一种情况，存在具有射影平面边界的 e^* 的中点的任意小的邻域. (见练习 14.21.) 在此我们不作证明，在后一种情况，e^* 的中点的邻域与此 3 维开球不同胚，则可以得到证明.

在 e_p 与 e_1 的方向一致时，我们称此面 - 边序列是**保持方向的**，否则称为是**方向逆转的**.

不难证明，对于边的一个等价类，如果一个面 - 边序列是保持方向的，那么此等价类的任一面 - 边序列也是保持方向的（因而如果一个面 - 边序列是方向逆转的，那么此等价类的任一面 - 边序列也是方向逆转的）. 这就导出以下的判别法：

边判别法 已知由一个多面体粘合得到的商空间，对于边的任一等价类，构成一个面 - 边序列，并确定它是否保持方向. 如果边的任一等价类有一个保持方向的面 - 边序列，那么此商空间通过此边判别法，否则，此商空间不是一个 3 维流形.

例如，考虑例 14.8 中 3 维环面的多面体粘合. 存在边的 3 个等价类，容易看出每一个等价类都有一个保持方向的面 - 边序列. 因此，这个商空间通过边判别法. 请注意，这与例 14.8 中所观察到的情况一致，在那里由粘合边的内部而得到的每个点，有一个由此立方体边上点的$\frac{1}{4}$球邻域粘合在一起而得到的 3 维开球邻域.

例 14.9 考虑在图 14.30 的左边所示的立方体上的粘合. 在此图的右边，标记数字 1～4 的边构成此粘合的一个等价类. 如果设 T，B，F，B'，L 和 R 分别表示此立方体的顶面、底面、前面、后面、左面和右面，那么 T，1，F，B'，2，L，R，3，B'，F，4，B 是此等价类的一个面 - 边序列. 如果我们按图选取边 1 的方向，那么边 2～4 传承所描述的方向. 底面翻一个筋斗与顶面相粘合，因此，这两个面粘合时，边 1 的方向与边 4 的方向不一致. 于是，这个商空间不能通过边判别法，它不是一个 3 维流形.

接下来考虑在多面体粘合中的顶点. 对于顶点的集合，我们定义一个等价类，使得如果两个顶点粘合在一起，它们就是等价的. 对于每一个等价类，在此多面体粘合下所有对应的顶点视为同一，在此商空间中产生一个单独的点.

假定我们有顶点的一个等价类 $\{v_1, \cdots, v_n\}$. 设 v^* 表示在商空间中由这些顶点粘合在一起而得到的点. 当我们如图 14.31 所示在接近一个顶点 v_i 处割此多面体时，每个 v_i 是一个棱锥的顶点，此棱锥的面位于此多面体的面上，而且此棱锥有一个多边形的底，此多边形的内部位于此多面体的内部.（说起棱锥，我们指的是，由与一个顶点和底面相连接的所有线段构成的一个多面体，此底面是一个多边形，不一定是正方形.）

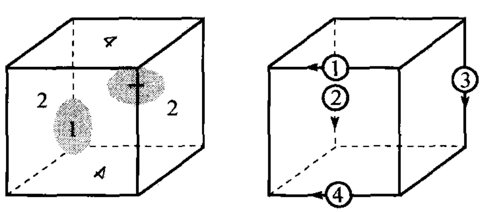
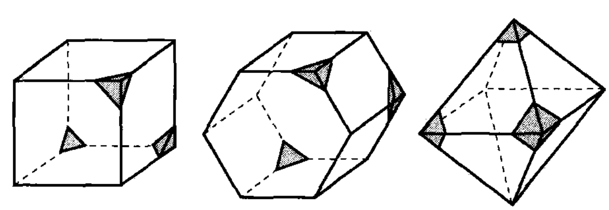


图 14.30 边 {1，2，3，4} 的等价类有一个方向逆转的面 - 边序列


图 14.31 多面体的每个顶点是通过在接近顶点处割多面体而得到的一个棱锥的顶点

再取一个棱锥族，一个 v_i 一个棱锥，使得当此多面体粘合在一起时，此棱锥的面、边和顶点适当地被安排，而且粘合在一起. 设 B 是由这些棱锥粘合在一起而得到的商空间的子集. 在此商空间中，点 v^* 位于 B 的内部. 我们关注的是，B 的内部是否与 3 维开球同胚.

上述步骤的结果是集合 B 被作出，B 的边界由粘合在一起的棱锥的底所组成，因此是

一个紧致曲面. 我们称这个曲面是 v^* 的一个**环绕曲面**. 如果这个曲面是一个球面，那么正如我们把这些棱锥收缩为一些顶点 v_i 一样，所得到的环绕曲面本质上产生一族束缚于 v^* 的同心球面. 于是可得出，B 与此 3 维球同胚，因而 v^* 有一个 3 维开球邻域. 如果环绕曲面不是一个球面，可以证明（但是我们在此不给出证明），v^* 的邻域与 3 维开球不同胚. 这就导致以下的判别法：

顶点判别法 已知一个由多面体粘合而得到的一个商空间，如果顶点的每个等价类有一个是球面的环绕曲面，那么，此商空间通过顶点判别法，否则，此商空间不是一个 3 维流形.

例如，考虑例 14.8 中 3 维环面的多面体粘合. 存在由立方体全部 8 个顶点所组成的顶点的一个等价类. 设 v^* 是由粘合在一起而得到的商空间中的点，并设 S 是一个环绕曲面. 请注意，S 当然被棱锥的底三角剖分，这是由于每个底是一个三角形.

我们根据此三角剖分来计算 S 的欧拉示性数. 在此等价类中的每个顶点，为构建 S 提供一个棱锥的底面，因而为此三角剖分提供一个三角形. 于是，对我们所计算的欧拉示性数，$F=8$. 在此环绕曲面的三角剖分中，有 $\frac{3\times 8}{2}$ 条边，这是由于每个棱锥的底面提供 3 条边，但是在构成 S 时这些边成对地粘合在一起. 因此，$E=12$. 最后，在此多面体粘合在一起之前，每个立方体的边包含此三角形的两个顶点，以粘合在一起构成 S. 粘合一旦实现，在每个由立方体的边粘合而成的集合 e^*，有两个三角剖分的顶点. 我们以前已经看到，存在边的 3 个等价类，因此 $V=6$. 因此，S 的欧拉示性数 $V-E+F$ 是 2.

按照我们在上一节对紧致曲面进行分类的结论，可得出 S 是一个球面. 因此，这个商空间通过顶点判别法. 当然，这与在例 14.8 中所看到的结果一致，在那里 v^* 有一个由此立方体的一些 $\frac{1}{8}$ 球邻域粘合在一起所得到的 3 维开球邻域.

例 14.10 考虑在图 14.32 的左边所示的八面体粘合. 此八面体最上面的顶点未与其他顶点粘合，因而是在它的等价类中唯一的一点. 设 v^* 是此商空间中对应的点. 如果我们在此顶点附近割此八面体，我们就得到此图中间所示的一个棱锥. 正如八面体粘合一样，此棱锥的前面、后面、左面和右面粘合在一起. 此棱锥的底面在它的边上被粘合在一起，构成 v^* 的一个环绕曲面. 正如此图所示，此粘合相当于按通常的，把一个正方形相对的两边视为同一而得到一个环面. 因此，这个商空间不能通过顶点判别法，且它不是一个 3 维流形.

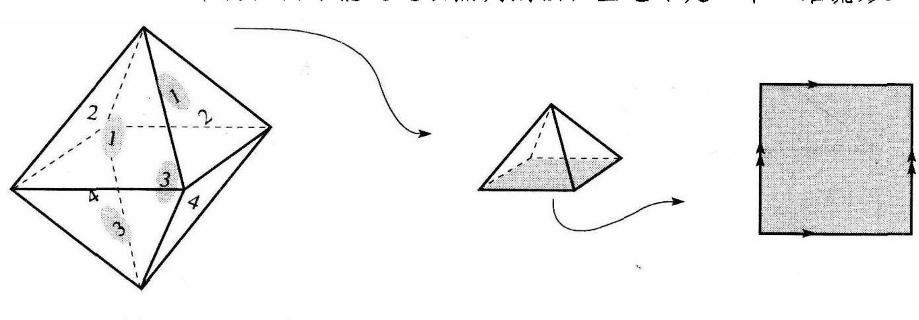


图 14.32 8 面体粘合导致一个点以及作为环绕曲面的一个环面

综合我们的流形 - 结构的判别法，我们就有以下关于多面体粘合的定理：

定理 14.27 设 M 是一个由多面体粘合所得到的商空间．那么，当且仅当 M 既满足边判别法，又满足顶点判别法时，M 是一个 3 维流形．

证明 正如我们已经讨论过的，如果此商空间不满足边判别法及顶点判别法之一，那么 M 不是一个 3 维流形．

于是假设，商空间既满足边判别法，又满足顶点判别法．M 是豪斯多夫的，且按照类似于把克莱因瓶作为一个正方形的商空间（见定理 14.5）的一种方式，具有可数基．小的 3 维开球邻域、粘合的半球邻域、粘合的橘子瓤状邻域和顶点的粘合邻域，都可以用来定义一组可数基，且把一些点分离，以证明 M 是豪斯多夫的．

正如我们已经讨论过的，M 中与多面体的内点相对应的点以及 M 中与一个面的内点相对应的点，有一些 3 维开球邻域．由于 M 满足边判别法，M 中的由边的内部粘合在一起而得到的一些点，有一个把橘子瓤状邻域粘合在一起而得到的 3 维开球邻域．又由于 M 满足顶点判别法，M 中的由边的一些顶点粘合在一起而得到的点，有 3 维球邻域，它们由对粘合在一起的棱锥取内部而得到．

因此，如果 M 满足边判别法和顶点判别法，那么 M 是一个 3 维流形． ■

让我们考虑更多的 3 维流形的例子．

例 14.11（$\frac{1}{4}$拧流形） 这个流形由一个立方体通过把两对正相对的两面粘合，且如图 14.33 所示，最后一对相对的两面拧了$\frac{1}{4}$周角后再粘合起来．存在边的 3 个等价类，正如 3 维环面所出现的一样，每个等价类包含 4 条边．每个这样的等价类，有一个保持方向的面 - 边序列．（见练习 14.22.）

在此立方体中的 8 个顶点，彼此视为同一，而且正如在 3 维环面的例子一样，欧拉示性数可用于证明：在此商空间中对应点的环绕空间是一个球面．于是可以得出，$\frac{1}{4}$拧流形是一个 3 维流形．

例 14.12（$\frac{1}{6}$拧流形） 这个商空间定义在图 14.34 所示的一个六角柱上．每个正方形面直接与它相对的正方形面粘合，而正面拧了$\frac{1}{6}$周角后，再与背面的六边形粘合在一起．此商空间满足边判别法与顶点判别法，因而是一个 3 维流形．

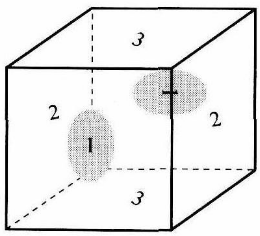


图 14.33 把立方体的一些面相粘合得到$\frac{1}{4}$拧的流形

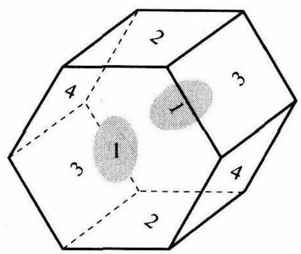


图 14.34 把六角柱的各个面相粘合得到$\frac{1}{6}$拧流形

例 14.13(庞加莱 12 面体空间) 我们确认一个 12 面体相对的每对面，如图 14.35 所示，按顺时针方向旋转了$\frac{1}{10}$周角后，再粘合在一起．请注意，确认从正面到背面顺时针拧$\frac{1}{10}$周角，与确认从背面到正面拧$\frac{1}{10}$周角是一样的．所得到的商空间，满足边判别法与顶点判别法，因而是一个 3 维流形．(见练习 14.24.) 30 条边被分为 10 个等价类，每类包含 3 条边．这与下一节有关．顶点被分为 5 个等价类，每类包含 4 个顶点．

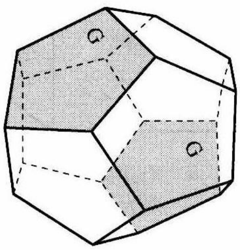


图 14.35 将 12 面体的各个面相粘合得到庞加莱 12 面体空间

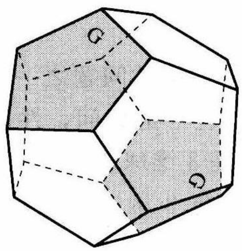


图 14.36 将 12 面体的各个面相粘合得到塞弗特－韦伯 12 面体空间

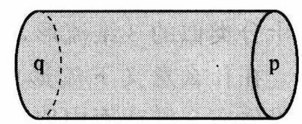


图 14.37 一个立体克莱因瓶

例 14.14(塞弗特－韦伯 12 面体空间) 在这种情况，我们确认一个 12 面体相对的每对面按顺时针方向旋转$\frac{3}{10}$周角后粘合在一起．(见图 14.36)．此时 30 条边被分为每类 5 条边的 6 个等价类．全部 20 个顶点彼此视为同一，因此，只有顶点的单独一个等价类．商空间是一个 3 维流形．(见练习 14.25.)

同 2 维流形一样，对于 3 维流形也有定向性的概念．在不可定向 2 维流形的情况下，默比乌斯带相应的不可定向性，被不可定向的 3 维流形所取代，如果它包含称为立体克莱因瓶的一个子空间的话．

定义 14.28 一个**立体克莱因瓶**是一个如图 14.37 所示，通过反射把一个圆柱体的底面上相对的两个圆盘视为同一而得到的商空间．

请注意，一个圆柱体内的每个同心圆柱面在粘合后成为一个克莱因瓶．所以一个立体克莱因瓶由收缩于一个中心圆的一组同心克莱因瓶所组成．

如果我们在一个立体克莱因瓶之内，且我们从它的一端走出来，再回到我们开始的地方，那会出现什么情况呢？

由于粘合采用的是把一切都从左边扭到右边的方式，我们就可能让我们的心脏回到我们身体的另一侧．我们手表的表面就会倒过来，而我们手表的表针就会逆时针转动．有趣的是，我们却说不出有什么差别．对我们来说，显然，我们的心脏还是在左边，而我们的手表还总是那样运行．但是，我们曾经被遗忘的每一个人，以与我们颠倒的状况出现，正如对他们来说我们以颠倒的状况出现一样．

宇宙包含这样的立体克莱因瓶吗？从数学的观点来说这是可能的．

定义 14.29 一个 3 维流形是**不可定向的**，如果它包一个立体克莱因瓶．否则，此 3 维流形是**可定向的**．

例 14.15 考虑一个如图 14.38 所示，通过反射把一个立方体相对的两个面视为同一而得到的商空间. 我们早先在例 3.27 中看到过这个空间. 前面和后面直接被视为同一的，而顶面和底面要扭一下才能视为同一的. 对于左面与右面也同样如此. 粘合的结果是一个 3 维流形，且与一个圆周和一个射影平面的乘积 $S^1\times P$ 同胚.（见练习 3.38.）

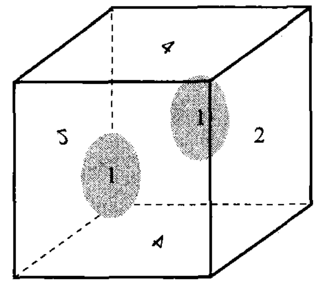


图 14.38 把立方体相对的两个面视为同一而得到一个与 $S^1\times P$ 同胚的空间

这是一个不可定向的流形，由于它包含一个把圆柱体的两个底面粘合在一起而得到的立体克莱因瓶，此圆柱体从立方体顶面的中心延伸到底面的中心.

3 维流形理论领域中最重要的未解决的问题之一，是庞加莱猜想. 1904 年首先由庞加莱提出，这个猜想问，性态与 3 维球面十分类似的 3 维流形，是否确实是 3 维球面？

在什么意义下流形的性态必定与 3 维球面类似？请注意，如果你在 3 维球面中取一个圈（一个连续函数 $f: S^1\to S^3$），那么它可能收缩于一个点. 由于 3 维球面是道路连通的，且 3 维球面中每一个圈都可能收缩于一个点，此 3 维球面称为是单连通的.（见 9.5 节.）相形之下，这就与 3 维环面的情况不同了. 在产生 3 维环面的多面体粘合下，在此立方体的竖直线段成为一个圈，它不能收缩于 3 维环面中的一个点.

庞加莱猜想说，如果一个无边的 3 维流形是紧致且单连通的，那么，它必定与 3 维球面同胚. 庞加莱打算证明这个猜想，但未能实现. 在整个上世纪，其他许多人都有这样的企图，所发表的许多证明，随后都被确认为是不正确的. 2002 年，俄国数学家 G. 佩雷尔曼发表了一个证明，在几年之后，经过全世界数学家们的仔细审核，这个证明被确认为是正确的. 佩雷尔曼不仅解决了著名的上百年的难题，而且他的方法的应用领域超出了庞加莱猜想的范围，并预示了在 3 维拓扑中将出现革命性的研究成果. 2006 年，佩雷尔曼由于他的研究成果获得菲尔兹奖（但他拒绝接受）.

14.3 节练习

14.19 证明 3 维球面是一个 3 维流形.

14.20 考虑例 14.7 中的空间 S^3_+ 与 S^3_-. 定义一个明确的，这两个空间中任一个与此 3 维球之间的同胚.

14.21 假设我们有一个多面体粘合，且 $\{e_1, \cdots, e_p\}$ 是一个具有方向逆转的面－边序列的，边的等价类. 设 p 是与 e_i 的中点粘合在一起所对应的商空间中的点. 证明在此商空间中存在 p 的其边缘是一个射影平面的任意小邻域.

14.22 (1) 证明：在例 14.11 中所作出的 $\frac{1}{4}$ 拧流形满足边判别法与顶点判别法.

(2) 立方体正面与背面的 $\frac{1}{4}$ 拧粘合由半拧粘合取代. 证明：所得到的粘合满足边判别法与顶点判别法.（所得到的流形称为 **$\frac{1}{4}$ 拧流形.**）

14.23 (1) 考虑例 14.12 中所作出的 $\frac{1}{6}$ 拧粘合. 在六角柱上，按照所描述的粘合，标记边类与顶点类. 证

明此粘合满足边判别法与顶点判别法.

(2) 六角柱的正面与背面的$\frac{1}{6}$拧粘合由$\frac{1}{3}$拧粘合取代. 对此六角柱面的这样规定的粘合，重复进行(1). $\left(\text{所得到的流形称为}\frac{1}{3}\text{拧流形.}\right)$

14.24 考虑例 14.13 中庞加莱 12 面体空间的粘合.

(1) 证明：此粘合导致边的 10 个等价类，每类包含 3 条边，以及顶点的 5 个等价类，每类包含 4 个顶点.

(2) 证明：这样规定的粘合满足边判别法与顶点判别法.

14.25 考虑例 14.14 中塞弗特 - 韦伯 12 面体空间的粘合.

(1) 证明：此粘合导致边的 6 个等价类，每类包含 5 条边，以及顶点的 1 个等价类，每类包含所有的顶点.

(2) 证明：这样规定的粘合满足边判别法与顶点判别法.

14.26 **四元流形**定义为，把一个立方体每一对相对的两个面，经$\frac{1}{4}$拧的顺时针旋转视为同一而得到的流形.

(1) 在一个立方体的示意图上，为它的各个面作标记，以描述此空间的粘合.

(2) 证明：这样规定的粘合满足边判别法与顶点判别法.

14.27 考虑例 14.15 中所描述的立方体的，产生一个与 $S^1 \times P$ 同胚的空间的各个面的粘合. 在此立方体上，按照所规定的粘合标记边类与顶点类. 证明此粘合满足边判别法与顶点判别法.

14.28 (1) 表示一个圆周与一个克莱因瓶的乘积 $S^1 \times K$，作为粘合立方体各边所得到的一个商空间.

(2) 在此立方体上，按照所规定的粘合标记边类与顶点类. 证明此粘合满足边判别法与顶点判别法.

(3) 证明 $S^1 \times K$ 是不可定向的.

14.29 粘合图 14.39 所示的四面体的各个面. 结果是一个 3 维流形吗?

14.30 考虑图 14.40 所示的 (1) 与 (2) 描述的八面体的粘合. 在这两种情况，确定是否粘合成一个 3 维流形.

(1) 在顶部和底部相对的两个面粘合在一起，在每种情况顺时针拧$\frac{1}{3}$圈.

(2) 在此八面体的关于中心相对的两个面粘合在一起，在每种情况顺时针拧$\frac{1}{6}$圈.

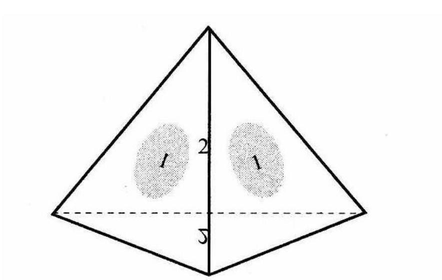


图 14.39 这个多面体粘合得到 3 维流形吗

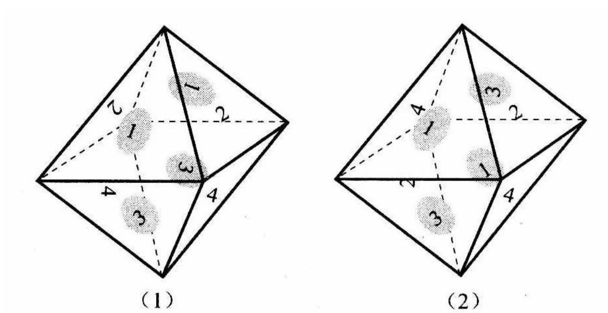


图 14.40 两种多面体粘合能得到 3 维流形吗

14.4 宇宙的几何结构

让我们再回到我们生活在其中的宇宙的空间部分. 正如我们已经注意到，在每一点的周围看来具有这样的性质，即存在一个与 $\mathbf{R}^3$ 中一个开球同胚的邻域. 我们假定这个宇宙的空间部分是豪斯多夫的，且以一组基为它的拓扑，因而是一个 3 维流形. 但是它究竟是哪一种 3 维流形呢?

我们可以通过几何结构对所有的可能性作出限制. 在一个流形上存在一种几何结构究竟具有什么含义，我们并不循规蹈矩地去指出，只要包含作为允许测量诸如距离、角度和曲率一类量的附加结构的含义就足够了. 我们都熟悉在直线上，平面上和 3 维空间上的欧氏几何学，同几何学中一样，这些空间分别记为 E，E^2 和 E^3.

宇宙的几何结构看来具有各向同性和齐次性的. 各向同性意味着，在任意的一点周围的任何方向，呈现出相同的几何结构. 在这里并不存在略胜一筹的可视为一致的方向. 这是 3 维欧氏空间所具有的一种性质. 然而，如果我们通过取 $S^2\times E$ 作为一种几何结构，这种几何结构在不同的方向就有不同的性态.

至于齐次性，那是指空间的几何结构在局部上是相同的. 在此空间中给定任意两点，存在一个从一点的邻域，到另一点的邻域的等距（保持距离的一个同胚）. 为了理解宇宙的全面整体的几何结构起见，我们忽略了在黑洞周围可能出现的问题，它们有一个我们假定不扰乱整体几何结构的孤立效应.

3 维的几何学只有 3 种：欧氏几何学、球面几何学和双曲几何学，它们都具有各向同性和齐次性. 正如 $\mathbf{R}^3$ 是 3 维流形的模型空间一样，3 维欧氏空间 E^3、3 维球面 S^3 及所谓的 3 维双曲空间，都是 3 维流形的几何模型. 说起 **3 维欧氏流形**，我们是指这样一种 3 维流形，在它的上面定义了一种几何学，它的局部性态与 3 维欧氏空间中的性态一样. **3 维球面流形**与 **3 维双曲流形**可类似地定义. 我们预料宇宙是这 3 种 3 维流形之一，所具有几何结构的局部性态恰好与对应模型空间中的几何结构相同.

每种 3 维几何结构的模型都有与它有关的曲率. 在 3 维欧氏几何学的情况，曲率是 0. 在球面几何学的情况，曲率是正的. 而在双曲几何学的情况，曲率是负的.

考察这 3 种几何学降 1 维的类推，我们有如图 14.41 所示的曲率为 0 的一个平面、曲率为正的一个球面和曲率为负的一个鞍面.

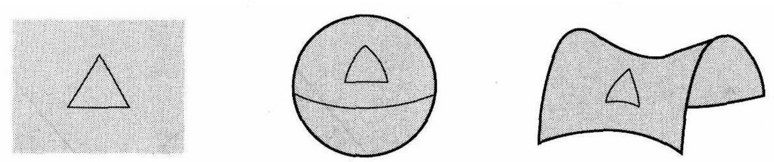


图 14.41 具有 0 曲率、正曲率和负曲率的几何结构

在具有曲率为 0 的平面上，三角形的内角之和正好是 180°. 在曲率为正的球面上，三角形的内角之和大于 180°. 在曲率为负的鞍面上，三角形的内角之和严格小于 180°.

假设我们有一个由欧氏空间中多面体的各个面粘合而成的一个 3 维流形 M. 为了使得 M 是一个 3 维欧氏流形，必须满足某些条件. 首先，各个面之间的粘合必须使这些面上的距离保持不变，所以在由两个面粘合在一起而得到的每个点处的局部几何结构是欧氏几何结构. 其次，已知一些在面粘合一起时保持距离的面，当我们把橘子瓤状邻域粘合在一起以得到 M 中一个点的邻域时，粘合在一起的橘子瓤状的面之间的角之和必定为 360°. 换句话说，在 M 中每个由一些边粘合在一起而得到的点，必定有环绕它的整个 360°的欧氏角. 最后，流形传承被粘合顶点周围的准确的几何结构，也必定是这种情况. 多面体顶点的彼此粘合在一起的

小邻域必定同时适合，使得在此流形中所得到的点的一个邻域中的局部几何结构是欧氏几何结构. 在以下各个例子中，一旦边条件得到满足，粘合在一起的顶点必定传承所需要的邻域.

我们还可以把在球面空间中多面体的类似物粘合在一起，而在双曲空间中可以同样进行. 在这两种环境，为了使此结果是具有相应几何结构的一个 3 维流形，我们需要满足一些条件，就同刚才对 3 维欧氏流形讨论过的一样.

例 14.16 设 M 是由欧氏空间中一个立方体的一些面粘合而得到的一个 3 维流形. 在一个立方体的每条边，两个面以 90°的夹角相交. 为了使得 M 是一个 3 维欧氏流形，在边的每个等价类中，必须有 4 条边，使得那时我们在 M 的点的邻域中，有必需的 360°，它们来自此立方体的一些边的粘合. 这出现于在练习 14.22 中所介绍过的 3 维环面、$\frac{1}{4}$拧流形和半拧流形. 因此，其中每一种都是 3 维欧氏流形.

例 14.17 考虑例 14.12 中的$\frac{1}{6}$拧流形. 它由 3 维欧氏空间中一个六角柱的一些面粘合而成. 设 e 是此六角柱的两个正方形面交线上的一条边. 这两个面之间的夹角是 120°，且 e 与另两条边粘合在一起，每条边在两个正方形面的交线上. 因此，在此流形中，环绕由这些边粘合而成的每个点，角度总共为 360°. 再设 e 是在六边形面与正方形面交线处的角. 在这种情况下，这些面之间的夹角是 90°，而 e 与另外 3 条边粘合在一起，其中每一条边在六边形面与正方形面的交线上. 此外，在此流形中，由这些边粘合而成的每个点，角度总共为 360°. 于是可以得出，$\frac{1}{6}$拧流形是一个 3 维欧氏流形.

例 14.18 一个欧氏 12 面体各个面之间的夹角为 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)\approx 116.6°$. 由 12 面体上的这个粘合产生庞加莱 12 面体空间，我们指出，它的边被分成 10 个等价类，每类 3 条边. 这意味着，在此流形中对应点的周围，所需丢弃的角度总共为 360°. 所得到的并不是一个 3 维欧氏流形.

为了解决这种情况，我们用球面几何学来理解 12 面体. 在球面几何中放置一个 12 面体，使它各边上的角度增加. 事实上，对于在 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$ 与 180°之间的任何角度，在 3 维球面中存在一个 12 面体，使得每对相截的面之间的角度为 θ. 特别地，在 3 维球面中存在一个正 12 面体，在每条棱处，各个面之间的角度为 120°. 我们可以把这样的 12 面体粘合在一起，以得到庞加莱 12 面体空间，而且如果这样做我们就满足以下要求，即在每个粘合在一起的边上，每个点周围有 360°角. 因此，庞加莱 12 面体空间是一个球面 3 维流形.

为了在 12 面体上粘合产生塞弗特 - 韦伯 12 面体空间，一些棱被分组为 5 条棱的 6 个等价类. 因此，我们需要让此 12 面体在每条棱处各个面之间有 72°的角. 在此我们仍然不能把所得到的流形，认为是一个 3 维欧氏流形. 然而给定在 60°与 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$ 之间的任何角，在双曲空间，可以构造一个 12 面体，使得每对相截的面之间的角度为 θ. 特别地，在双曲空间中，每个面之间角度为 72°的正 12 面体存在. 因此，塞弗特 - 韦伯 12 面体空间，是一个双曲 3 维流形.

2001 年，由来自美国航空航天总署（NASA）发射的威尔金森微波各向异性探测器的数据，

为宇宙学家提供了某些证据，宇宙的曲率与 0 十分接近. 这既意味着，我们生活在一个欧氏宇宙之中，也意味着，我们生活在曲率很小的一个球面或双曲宇宙之中. 如果我们生活在曲率为 0 的欧氏宇宙，即使处于最大的尺度范围，我们在此宇宙中所体验的几何结构是欧氏几何结构，即我们曾经广泛加以研究过的几何结构. 所以，具有由遥远星云所构成顶点的一个巨大的三角形，仍然具有它的内角之和为 180°的性质. 如果我们假定宇宙是欧氏的，这有助于我们来确定宇宙是哪一种流形吗？哪一种 3 维流形具有欧氏几何结构呢？引人注目的是，仅仅存在 18 种可能性，在 1934 年，数学结晶学家 *W*. 诺瓦斯基（1909—1988）首先在 [Now] 中证明了这个结论.

定理 14.30 恰好存在 18 种 3 维欧氏流形，在其中，6 个紧致且可定向的；4 个紧致且不可定向的；4 个非紧致且可定向的；以及 4 个非紧致且不可定向的.

这个定理是一个令人吃惊的结果，它告诉我们 3 维欧氏流形的可能情况是十分有限的. 与此对照，存在无限多个球面 3 维流形，以及无限多个双曲流形.

如果我们进一步假定宇宙是紧致的，可能情况的个数减少到 10. 在 10 个之中，4 个为不可定向的. 正如我们在上一节中已指出过的，存在某些不同寻常的结论，这些结论涉及，在一个不可定向的 3 维流形中，通过一个立体克莱因瓶而移动. 与这一可能性同样有魅力的是，存在使得它极不可能出现的物理学状况. 于是，留下来要考虑的是 6 个紧致且可定向的 3 维欧氏流形.

在这 6 个流形中，在 14.3 节的例子和练习中，我们已经看到 3 维环面、$\frac{1}{4}$扭流形、$\frac{1}{6}$扭流形、半扭流形及$\frac{1}{3}$扭流形. 其余可能的流形即亨茨舍尔一文特流形，在练习 14.32 中再作介绍.

14.4 节练习

14.31 证明：在练习 14.23 中的$\frac{1}{3}$扭流形可以认为是一个欧氏流形.

14.32 通过把一对立方体的一些面如图 14.42 那样粘合在一起，来定义**亨茨舍尔 - 文特流形**.

(1) 证明：所指出的粘合满足边判别法和顶点判别法，因而结果是一个 3 维流形.

(2) 证明：亨茨舍尔 - 文特流形是一个 3 维欧氏流形.

14.33 在练习 14.26 中所介绍的四元流形具有三种几何结构（欧氏几何结构、球面几何结构及双曲几何结构）之一，它是哪一种几何结构呢？

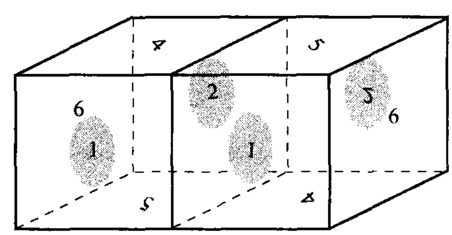


图 14.42 把一对立方体的一些面粘合在一起得到亨茨舍尔 - 文特流形

14.34 请说明为什么前 5 种紧致且可定向的 3 维欧氏流形是所谓的环面把柄. 这就是说，存在嵌入每个流形的一个环面，使得当我们挖去这个环面的一个邻域时，结果是同胚于一个环面同一个区间乘积 $T\times[0, 1]$.

14.35 一个平行六面体由 3 维空间中的 3 个线性无关的向量来定义. 而 3 个紧致且可定向的 3 维欧氏流形中的每一个，都可以通过把此六面体相对的面视为同一而得到. 请确定对一个平行六面体形状作怎样的限制，是使此流形由这个平行六面体相对的面视为同一而实现所必须的.

14.36 举 3 个不同的非紧致且连通的 3 维欧氏流形的例子.

14.37 (1) 证明：一个克莱因瓶与一个圆周的乘积 $K\times S^1$，可以认为是一个 3 维欧氏流形.

(2) 举另一个紧致、连通且不可定向的 3 维欧氏流形的例子.

14.5 宇宙是哪一种流形

我们再来为宇宙的空间部分某些可能的流形列出一张表，如何才能说哪一种流形是符合要求的呢？本节我们来讨论宇宙学家用于确定宇宙形状的两种方法.

宇宙晶体学

法国宇宙学家 M. 拉谢兹、R. 勒乌克和 J-P. 吕米内在他们 1996 年的论文 [Leh] 中提出了这种方法. 请设想，我们生活在一个 3 维环面，它由一个边长为 1000 万光年的立方体的面粘合在一起而构成. 而在目前，再设想我们在此瞬时能看到在宇宙中的任何事物（一会儿，我们将修正这个在物理上不可能的假设）. 当我们凝视如图 14.43 所示的，与此立方体的面垂直的各个方向，我们的星云位于我们的视线 1000 万光年的远处消失. 进一步延长我们的视线，我们就能看到，星云更进一步远在 2000 万光年之遥，3000 万光年之遥，等等. 因此当我们以各个方向注视宇宙时，我们的星云就构成一个格子状模式. 不仅这样，我们在粘合在一起的立体内的每个星云也是如此. 同时，在此立体内，这些星云可能会随机地消散，如果把我们所见到的每个星云的像考虑为我们凝视而得到的，存在许多对 1000 万光年之遥的像，并存在 2000 万光年之遥的像，等等.

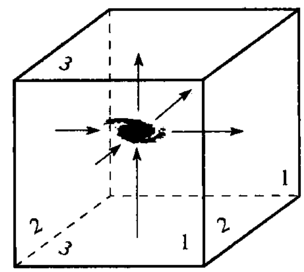


图 14.43 在一个 3 维环面宇宙，我们的视线把我们带回我们的星云

在这个 3 维环面宇宙，我们看到的星云，不仅位于 1000 万光年的整数倍之处. 如果沿与立体表面之一的一条对角线平行的方向观看的话，那么，我们所看到的星云在$\sqrt{2}\times1000$ 万光年之遥，以及这个距离的整数倍之遥. 而如果沿与立体对角线之一平行的方向观看的话，那么，我们所看到的星云在$\sqrt{3}\times1000$ 万光年之遥，以及这个距离的整数倍之遥. 还存在我们观看我们的星云的其他的距离，这取决于我们的观察方向.

按照这个推理，如果我们生活在一个 3 维环面宇宙，而要测量我们所见到的每对星云之间的距离，那么，我们预期距离的整体分布，会有如图 14.44 左面所示的一些倒立钉子的形状. 与此相对照，如果宇宙是 3 维欧氏空间，我们可能期望会看到如图 14.44 右面所示的，中心在某个平均距离附近的，距离的一个略具随机性的分布.

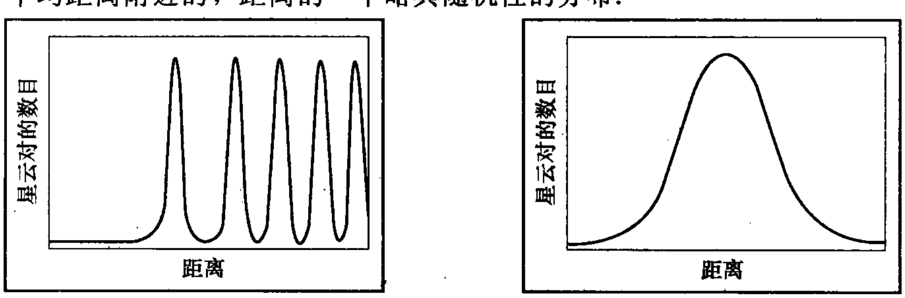


图 14.44 在 3 维环面和 3 维空间中每对星云之间距离的假想分布

在理论上，这听起来似乎很棒，然而，我们必须考虑物理的实际情况. 光线从星云到达我们要花费时间，而星云是在运动之中，所以一个特定的星云的两个不同的象，未必能使它们之间的距离刚好等于前面提到过的理论值（1000 万光年、$\sqrt{2}\times1000$ 万光年、$\sqrt{3}\times1000$ 万光年，等等）. 但是，我们仍然能期望看到，这些距离聚集在这些值的周围. 此外，当这些星云相距十分遥远时，它们就难以被发现，所以，它们并不是所观察到的最佳结构.

宇宙学家的一个替代方法，是用测量星云的超星系团之间的距离. 期望使用超星系团的目录，来确认各对超星系团之间的距离，然后再用此距离数据的模式，来试图辨认与宇宙形状相对应的流形. 用现有的超星系团目录，这样的模型至今还没有被发现. 但是，在不久的将来，就会有更复杂的目录可用，它可以提供有助于显示出我们生活在其中的流形的一些模型.

宇宙学微波背景辐射

在 1965 年，贝尔实验室的 A. 彭西和 R. 威尔逊在研究来自银河系的无线电辐射时，发现了一种意想不到的，不变的背景无线电噪声. 这些科学家最终认为，他们所接收到的噪声，本质上是来自太空各个方向的星云外部的波长不变的辐射. 这种辐射，现在称为宇宙微波背景（CMB）. 他们的发现，结果被证实为具有非常重要的含义，由于这种辐射被证明为是宇宙中最古老的光. CMB 的光，标志了在宇宙起源大爆炸后宇宙第一次变冷，使得足以让辐射从炽热的宇宙浓雾中逃逸. 在宇宙大爆炸后大约 30 万年之后，宇宙的温度冷得足以让电子和质子组合构成第一个原子. 这也意味着，原先一成不变地由自由带电粒子散播出的辐射，现在能以光速通过仍然在扩展中的宇宙. 这种逃逸的辐射现在看成是，在各个方向上具有相对固定温度（大约 2.73K）的无线电辐射源的宇宙微波背景. CMB 的温度改变为 1 万度的一部分. 在 CMB 中所存在的小的变化，为我们展示了密度的少许差别，这些差别由早期的宇宙提供，并借助重力最终导致物质结成星云、星星和行星.

看来，CMB 辐射发源于一个巨大的球面，称为最后散射的曲面. 利用美国航空航天总署于 1989 年发射的宇宙背景探测器（COBE）卫星的数据，就能够画出 CMB 的第一温度图. 2001 年，美国航空航天总署发射的威尔金森微波各向异性探测器（WMAP），提供了比 COBE 分辨率更高的 CMB 的温度数据. 在图 14.45 中，我们展示了源于 WMAP 数据的 CMB 的温度图. 深黑阴影区域较冷，而浅黑阴影区域较热，但是，正如我们已经指出过的，在平均值 2.73K 附近，无论哪一侧温度的差别，大约只有 0.0001K.

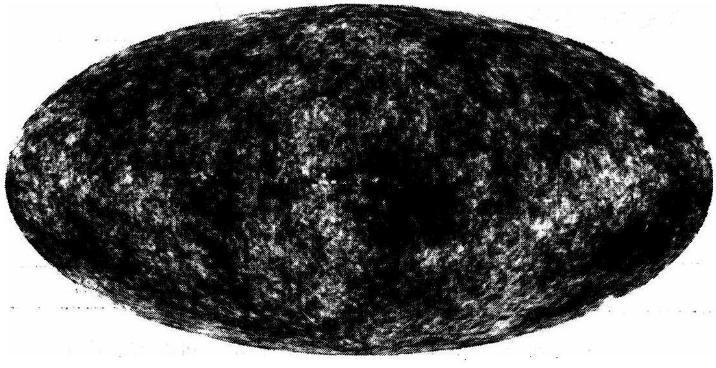


图 14.45　CMB 的温度图（得到美国航空航天总署/WMAP 科学团队的许可）

宇宙学家 N. 科尼什、D. 施佩格尔与 G. 施塔克曼以及数学家 J. 威克斯，曾经推荐过一种称为“太空中一些圆周”的方法，通过 CMB 的温度断面，来确定宇宙的拓扑结构.（见[Cor1]、[Cor2] 和 [Wee1].）请设想，宇宙是通过把一个立方体相对的面粘合在一起所构成的一个 3 维环面. 此外，请设想，最后散射的曲面扩展到这样的点，如图 14.46 所示，它的直径超出了此立方体的边长. 当此球面与此立方体相对的面相截时，它导致此球面与自身相截，这是由于立方体相对的面是粘合在一起的. 正如此图所表示的，这些自相交的截线，来自在此球面上的一些圆周，而当我们从内部来考察此球面时，每个截出的圆周，可以在此球面上的两个不同的位置看到.

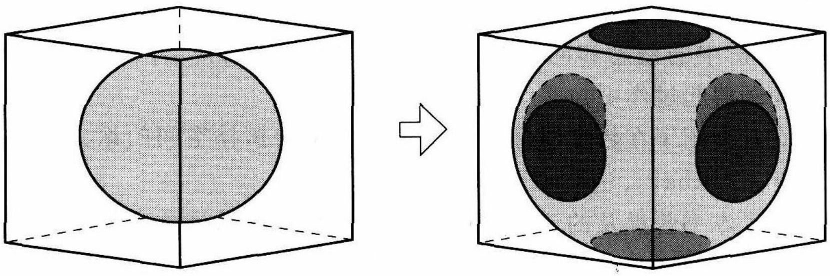


图 14.46　在太空中的圆周来自自身相截球面

“太空中一些圆周”的观念，是考察 CMB 温度图，以找到一对圆周，在它周围，温度分布是相同的. 每对这样的圆周，可能表示最后散射的曲面与自身的一条截线. 我们的希望是，在最后散射曲面上所截出圆周的配置，将揭示一些模式，它们也许仅出现在可能入选宇宙的拓扑形状的那些流形之一的内部. 按照这种方式，我们就能够确认，我们生活在其中的究竟是哪一种流形了.

14.5 节练习

14.38 如果我们处于作为一个环面的 2 维宇宙，此环面是由边长为 2 与 4 的矩形构成，在那里我们能看到星系际的超星系团距离分布的峰值吗？如果改为以矩形的长为 2 的边，与它的对边翻一个筋斗而粘合，使得所得到的空间是一个克莱因瓶，那么我们在那里能看到峰值吗？

14.39 在以下两种情况，如何对星系际的超星系团距离分布的峰值进行比较？一种情况是，我们把 $3\times3\times4$ 的长方体相对的面粘合在一起得到一个环面. 另一种情况是，把长方体的面粘合在一起得到一个半拧流形，其中被拧的面是尺寸为 3×3 的面. 此外，以上这两种情况如何与以下的情况相比较，这后一种情况是，把长方体的面粘合在一起得到一个 $\frac{1}{4}$ 拧流形，其中被拧的面是尺寸为 3×3 的面？

14.40 假设宇宙是一个立方体以相对的面粘合产生的 3 维环面、$\frac{1}{4}$ 拧流形或是半拧流形. 请说明，我们如何能用“太空中一些圆周”，来对这些可能性加以区别，请指出，在每种情况中所出现的圆周之间的区别.

进一步阅读材料

我们在以下所列出的某些附加阅读材料，与本书所介绍过的课题有关．所列出的论题，按它们在本书中首次出现时的次序来排列．其中许多课题有丰富的文献．在选择材料时，我们主要考虑起点合适或阐述精辟．

拓扑学的历史： [Jam] 由 40 篇论文组成，涉及拓扑学历史方面的不同论题．著作 [Man] 是对有关分析中的概念和问题的一个提示，在导致拓扑学的公理化基础的数学发展中，这些概念和问题曾起过作用．

数字拓扑： 直观介绍了在数字图像处理中供建模用的拓扑空间的论文，除了本书曾提及的 [Kon] 外，还有 [Kha1]、[Kha2] 和 [Kov]．

表型空间： 除了本书曾提及的论文 [Fon1] 外，其他涉及进化中的表型空间和连续性的论文，还有 [Cup1]、[Cup2]、[Fon2]、[Sta1] 和 [Sta2]．

地理信息系统中的空间关系： 涉及拓扑空间关系地理信息系统的文献很多．论文 [Sch]、[Sha] 和 [The] 是根据本书已讨论过，以及最初在 [Ege] 中曾提出过的模型所作研究工作的一个范本．[Ren] 提出了一个替代的拓扑空间关系模型．

拓扑学和物理学： 教材 [Mon]、[NasC2] 和 [Shv] 按三种不同数学素养水平，分别介绍和讨论了有关拓扑学在物理学中作用的课题．论文 [NasC1] 阐述了从 19 世纪中叶至今物理学与拓扑学相互关系的历史．

正向运动学映射： 论文 [Bak1] 是关于正向运动学映射拓扑性质的比较浅显的介绍．提供这方面前景介绍的，还有论文 [Bak2]、[Dem] 和 [Got]．

纠错码： 教材 [Bay] 和 [Ple] 提供了有关纠错码数学方法的基本介绍．

莱文斯坦度量： 著作 [San] 包含了有关莱文斯坦度量的一系列论文，它还包括了在 DNA 序列分析、语音识别、纠错和鸟声分析等方面的应用．

自动导向装置： 教材 [Lat] 提供了有关机器人运动设计数学方法的全面介绍．连同本书所提及的 [Abr2]，几篇最近的论文 [Abr1]、[Ghr1] 和 [Ghr2]，对自动导向装置构形空间的结构进行了考察．

动力系统和混沌： 教材 [DevR]、[All] 和 [Str] 对动力系统和混沌在理论和应用各方面作了介绍．教材 [Gil] 从拓扑学的观点，给出了处理动力系统理论更现代的一种方式．从 20 世纪 60 到 80 年代，混沌理论发展的入门性概述可以在 [Gle] 中找到．

经济学应用与博弈论： 冯．诺伊曼和 O．摩根斯顿的书 [Von] 是博弈论和经济模型数学理论的一本经典著作．卡库塔尼对布劳威尔不动点定理的推广，最初发表于 [Kak]，而纳什均衡存定理首先在 [NasJ] 上发表．涵盖不动点理论、经济学上的应用和博弈论的新书，还有 [Bor] 和 [Fra]．

纽结理论：在［Rei1］中，赖德迈斯特提出了赖德迈斯特运动，他后来出版了一本纽结理论方面的书［Rei2］. V. 琼斯在［Jon］中引入了他的多项式不变量.

著作［Ada1］、［Cro］和［Liv］对我们追踪纽结理论方面的资料是很有益的，它们扩展了我们在第 12 章中所提出的每一个课题，它们还介绍了纽结理论方面许多其他课题.

纽结理论的应用：教材［Sum］包含 6 篇单独的论文，涉及拓扑学和纽结理论在生物学、化学和物理学上的应用. 论文［Die］提供了有关一个纽结状分子合成的原始信息. 著作［Fla］涉及许多与纽结和一些图的嵌入有关的课题，重点是它们与一些分子结构的关系.

拓扑图论：［Gro］是拓扑图论的一本优秀的入门读物，从图论的基本概念出发，并包括了与一些图的拓扑结构有关的许多课题.

图在化学中的应用：教材［DevJ］是一本论文集，涉及拓扑描述符在化学中的使用. 教材［Tri］对化学图论作了全面的介绍，而教材［Bon］是关于这一课题不同方面的 9 篇单独论文的汇集. 此外还可参阅在“纽结理论的应用”中所提到的教材［Fla］.

图在电子线路设计中的应用：刊物［Roh］是 IEEE（电气与电子工程师协会）会刊在集成电路和系统的计算机辅助设计方面的一个专集. 它致力于微电子学中的线路设计，由 11 篇论文组成，其中大部分使用了拓扑学或图论的观念. 论文［Agg］、［Bha］和［Fou］都涉及交叉数或厚度在电子线路的设计或结构方面的应用.

流形与宇宙学：论文［Ada2］是对流形与它们在确定宇宙形状中应用的一个入门向导. 论文［Thu2］对流形研究中所使用的各种数学观念作了简要的介绍. 著作［Wee2］对曲面和 3 维流形的几何学与拓扑学进行了精妙绝伦的介绍，而［Thu1］是一本专注于 3 维流形更前卫的教材.

参考文献

[Abb] Abbott, E. A., *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, London: Seeley & Co., Ltd., 1884.

[Abr1] Abrams, A., "Configuration Spaces of Colored Graphs" *Geometriae Dedicata* **92**(2002), 185—194.

[Abr2] Abrams, A., and Ghrist, R., "Finding topology in a factory: configu-ration spaces" *American Mathematical Monthly* **109** (2002), no. 2, 140—150.

[Ada1] Adams, C., *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2004.

[Ada2] Adams, C., and Shapiro, J., "The Shape of the Universe: Ten Possibilities" *American Scientist* **89** (2001), no. 5, 443—453.

[Agg] Aggarwall, A., Klawe, M., and Shor, P., "Multilayer grid embeddings for VLSI" *Algorithmica* **6** (1991), no. 1, 129—151.

[Ale] Alexander, J. W., "Topological invariants of knots and links" *Transactions of the American Mathematical Society* **30** (1928), 275—306.

[All] Alligood, K. T., Sauer, T. D., and Yorke, J. A., *Chaos-An Introduction to Dynamical Systems*, New York: Springer-Verlag, 1996.

[Bak1] Baker, D. R., "Some Topological Problems in Robotics" *The Mathematical Intelligencer* **12** (1990), 66—76.

[Bak2] Baker, D. R., and Wampler, C. W., "On the inverse kinematics of redundant manipulators" *International Journal of Robotics Research* **7** (1988), no. 2, 3—21.

[Ban] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., and Stacey, P., "On Devaney's Definition of Chaos" *American Mathematical Monthly* **99** (1992), 332—334.

[Bay] Baylis, J., *Error-Correcting Codes: A Mathematical Introduction*, London: Chapman & Hall Ltd., 1998.

[Bha] Bhatt, S. N., and Leighton, ET., "A Framework for Solving VLSI Graph Layout Problems" *Journal of Computer and System Sciences* **28** (1984), 300—343.

[Blo] Bloch, E. D., *Proofs and Fundamentals: A First Course in Abstract Mathematics*, Boston: Birkhäiuser, 2000.

[Bon] Bonchev, D., and Rouvray, D. H., eds., *Chemical Graph Theory: Introduction and Fundamentals*, New York: Abacus Press, 1991.

[Boo] Boone, W. W., Haken, W., and Poenaru, V., "On recursively unsolvable problems in topology and their classification" In: Schmidt, H. A., Schütte, K., and Thiele, H. J., eds., *Contributions to Mathematical Logic*, Amsterdam: North-Holland, 1968.

[Bor] Border, K. C., *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[Chr] Christenson, C. O., and Voxman, W. L., *Aspects of Topology*, New York: Marcel Dekker Inc., 1977.

[Con] Connelly, R., and Demaine, E. D., "Geometry and Topology of Polygonal Linkages" In: Goodman, J.

E., and O'Rourke, J., eds., *CRC Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Second Edition, Boca Raton, Fl.: Chapman & Hall/CRC, 2004, 197—218.

[Cor1] Cornish, N. J., Spergel, D. N., and Starkman, G. D., "Circles in the sky: finding topology with the microwave background radiation" *Classical and Quantum Gravity* **15** (1998), 2657—2670.

[Cor2] Cornish, N. J., and Weeks, J. R., "Measuring the shape of the universe" *Notices of the American Mathematical Society* **45** (1998), no. 11, 1463—1471.

[Cro] Cromwell, P. R., *Knots and Links*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[Cup1] Cupal, J., Kopp, S., and Stadler, P. F., "RNA Shape Space Topology" *Alife* **6** (2000), 3—23.

[Cup2] Cupal, J., Schuster, P., and Stadler, P. F., "Topology in Phenotype Space" *Computer Science in Biology*, GCB'99 Proceedings, University Bielefeld, Hannover, 1999, 9—15.

[Dem] DeMers, D., and Kreutz-Delgado, K., "Learning Global Properties of Nonredundant Kinematic Mappings" *International Journal of Robotics Research* **17** (1998), no. 5, 547—560.

[DevR] Devaney, R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, *2nd Edition*, Boulder, Co.: Westview Press, 2003.

[DevJ] Devillers, J., and Balaban, A. T., eds., *Topological Indices and Related Descriptors in QSAR and QSPAR*, Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1999.

[Die] Dietrich-Buchecker, C. O., and Sauvage, J. P., "A synthetic molecular trefoil knot" *Angewandte Chemie International Edition* **28** (1989), no. 2, 189—192.

[Dug] Dugundji, J., *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[Ege] Egenhofer, E., and Franzosa, R., "Point-Set Topological Spatial Relations" *International Journal of Geographical Information Systems* **5** (1991), no. 2, 161—174.

[Far] Farber, M., "Collision Free Motion Planning on Graphs" In: Erdmann, M., Hsu, D., Overmars, M., and van der Stappen, A. F., eds., *Algorithmic Foundations of Robotics VI*, New York: Springer-Verlag, 2005.

[Fla] Flapan, E., *When Topology Meets Chemistry: A Topological Look at Molecular Chirality*, Washington D. C.: Mathematical Association of America, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[Fon1] Fontana, W., "The Topology of the Possible" In: Wimmer, A., and Kössler, R., eds., *Understanding Change: Models, Methodologies and Metaphors*, New York: Palgrave Macmillan, 2006.

[Fon2] Fontana, W., and Schuster, P., "Continuity in Evolution: On the Nature of Transitions" *Science* **280** (1998), 1451—1455.

[Fou] Foulds, L. R., Perara, S. M., and Robinson, D. F., "Network Layout Procedure for Printed Circuit Design" *Computer Aided Design* **10** (1978), 441—451.

[Fra] Franklin, J., *Methods of Mathematical Economics*, New York: Springer-Verlag, 1980.

[Ghr1] Ghrist, R., "Configuration spaces and braid groups on graphs in robotics" In: Gilman, J., Menasco, W. W., and Lin, X.-S., eds., *Knots, Braids, and Mapping Class Groups—Papers Dedicated to Joan S. Birman*, Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2001, 29—40.

[Ghr2] Ghrist, R., and Koditschek, D., "Safe, cooperative robot dynamics on graphs" *SIAM Journal of Control and Optimization* **40** (2002), no. 5, 1556—1575.

[Gil] Gilmore, R., and Lefranc, M., *The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[Gle] Gleick, J. ,*Chaos: Making a New Science*,New York: Viking Penguin Inc. , 1987.

[Got] Gottlieb, D. H. , "Topology and the Robot Arm" *Acta Applicandae Mathematicae* **11** (1988), 111—121.

[Gro] Gross, J. L. , and Tucker, T. W. ,*Topological Graph Theory*, New York: Wiley, 1987.

[Hau] Hausdorff, F. ,*Grundzüge der Mengenlehre*, Liepzig: Veit and Co. ,1914.

[Hil] Hill, T. P. , "Mathematical Devices for Getting a Fair Share" *American Scientist* **88** (2000), no. 4, 325—331.

[Hum] Hummel, K. E. ,*Introductory Concepts for Abstract Mathematics*, Boca Raton, Fl. : Chapman & Hall/CRC, 2000.

[Jam] James, I. M. , ed. ,*History of Topology*, Amsterdam: Elsevier Science B. V. , 1999.

[Jon] Jones, V. F. R. , "A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras" *Bulletin of the American Mathematical Society* **12** (1985), 103—112.

[Kak] Kakutani, S. , "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem" *Duke Mathematical Journal* **8** (1941), 457—459.

[Kha1] Khalimsky, E. , "Topological structures in computer science" *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis* **1** (1987), no. 1, 25—40.

[Kha2] Khalimsky, E. , Kopperman, R. , and Meyer, ER. , "Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets" *Topology and its Applications* **36** (1990), 1—17.

[Kha3] Khalimsky, E. , Kopperman, R. , and Meyer, P. R. , "Boundaries in Digital Planes" *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis* **3** (1990), no. 1, 27—55.

[Kis] Kiselman, C. O. , "Digital Jordan Curve Theorems" In: Borgefors, G. , Nyström, I. , and Sanniti di Baja, G. , eds. ,*Discrete Geometry for Computer Imagery*, DGCI2000 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science, Volume 1953, New York: Springer-Verlag, 2000, 46—56.

[Kon] Kong, TY. , Kopperman, R. , and Meyer, P. R. , "A topological approach to digital topology" *American Mathematical Monthly* **98** (1991), no. 10,901—917.

[Kov] Kovalevsky, V. A. , "Finite topology as applied to image analysis" *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **46** (1989), 141—161.

[Kur] Kuratowski, K. , "Sur le problème des courbes gauches en topologie" *Fundamenta Mathematicae* **15** (1930), 271—283.

[Lat] Latombe, J. -C. , *Robot Motion Planning*, Boston: Kluwer Academic Press, 1991.

[Leh] Lehoucq, R. , Lachièze-Rey, M. , and Luminet, J. P. , "Cosmic Crystallography" *Astronomy and Astrophysics* **313** (1996), 339—346.

[Lis] Listing, J. B. "Vorstudien zur Topologie" *Göttingen Studien* (1847), 811—875.

[Liv] Livingston, C. ,*Knot Theory*, Cams Mathematical Monographs 24, Washington D. C. : Mathematical Association of America, 1993.

[Lor] Lorenz, E. N. , "Deterministic nonperiodic flow" *Journal of Atmospheric Sciences* **20** (1963), 130—141.

[Mae] Maehara, R. , "The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem" *American Mathematical Monthly* **91** (1984), no. 10, 641—643.

[Mak] Makarychev, Y. , "A Short Proof Of Kuratowski's Graph Planarity Criterion" *Journal of Graph Theory* **25** (1997), 129—131.

[Man] Manheim, J. H. ,*The Genesis of Point Set Topology*, New York: The Macmillan Company, 1964.

[Mar] Markov, A. A. ,"Insolubility of the problem of homeomorphy" In: Todd, J. A. , ed. ,*Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Cambridge: Cambridge University Press, 1958, 300—306.

[Mas] Massey, W. S. ,*A Basic Course in Algebraic Topology*, New York: Springer-Verlag, 1991.

[May] May, R. M. ,"Simple mathematical models with very complicated dynamics" *Nature* **261** (1976), 459—467.

[Moi] Moise, E. E. ,*Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, New York: Springer-Verlag, 1977.

[Mon] Monastyrsky, M. ,*Riemann, Topology, and Physics*, translated by Cook, R. , King, J. , and King, V. , Boston: Birkhäuser, 1999.

[Mun] Munkres, J. R. ,*Topology*, Upper Saddle River, N. J. : Prentice Hall, Inc. ,2000.

[NasC1] Nash, C. , "Topology and physics—a historical essay" In: James, I. M. , ed. ,*History of Topology*, Amsterdam: Elsevier Science B. V. , 1999,359—416.

[NasC2] Nash, C. , and Sen, S. ,*Topology and Geometry for Physicists* New York: Academic Press, 1983.

[Nas J] Nash, J. F. ,"Equilibrium Points in n-Person Games" *Proceedings of the National Academy of Sciences* **36** (1950), 48—49.

[New] Newman, J. R. , ed. , "Leonhard Euler and the Koenigsberg Bridges" *Scientific American* **189** (1983), no. 1, 66—70. (This article primarily consists of a translation of Euler's original paper on the subject.)

[Now] Nowacki, W. , "Die euklidischen, driedimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen" *Commentarii Mathematici Helvetici* **7** (1934),81—93.

[Pet] Peterson, I. , *Newton's Clock: Chaos in the Solar System*, New York: W. H. Freeman and Company, 1993.

[Ple] Pless, V. ,*Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes*, New York: John Wiley & Sons, Inc. , 1998.

[Rad] Radó, T. , "Über den Begriff der Riemannsche Fläiche" *Acta Mathematica Szeged* **2** (1925), 101—121.

[Rei1] Reidemeister, K. , "Elementare Begründung der Knotentheorie" *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg* **5** (1927), 24—32.

[Rei2] Reidemeister, K. ,*Knotentheorie* Berlin: Springer, 1932; New York: Chelsea, 1948. (English translation:*Knot Theory* Moscow, Id. :BCS Associates, 1984.)

[Ren] Renz, J. ,*Qualitative Spatial Reasoning with Topological Information*, Lecture Notes in Computer Science, Volume 2293, New York: Springer-Verlag, 2002.

[Roh] Rohrer, R. A. , *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems: Special Issue on Routing in Microelectronics* **CAD-2** (1983), no. 4.

[Ros] Rosenfeld, A. , "Digital topology" *American Mathematical Monthly* **86** (1979), 621—630.

[Rou] Rouvray, D. H. , "Predicting Chemistry from Topology" *Scientific American* **255** (1986), 40—47.

[Ryd] Ryden, K. , ed. ,*Open GIS Implementation Specification for Geographic Information-Simple Feature Access-Part 1: Common Architecture*, Open Geospatial Consortium, Inc. , 2005.

[San] Sankoff, D. , and Kruskal, J. , eds. ,*Time Warps, String Edits, and Macromolecules: The Theory and Practice of Sequence Comparison*,Stanford,Ca: CSLI Publications, 1999.

[Sar] Sarkaria, K. S. , "The topological work of Henri Poincaré" In: James, I. M. , ed. ,*History of Topology*, Amsterdam: Elsevier Science B. V. , 1999,123—168.

[Sch] Schneider, M. , and Behr, T. , "Topological Relationships Between Complex Spatial Objects" *ACM Transactions on Database Systems* **31** (2006),no. 1, 39—81.

[Sha] Shariff, A. R. , Egenhofer, M. , and Mark, D. , "Natural-Language Spatial Relations Between Linear and Areal Objects: The Topology and Metric of English-Language Terms" *International Journal of Geographical Information Systems* **12** (1998), no. 3, 215—246.

[Shv] Shvarts, A. S. , *Topology for Physicists*, translated by Levy, S. , New York: Springer-Verlag, 1994.

[Sta1] Stadler, B. M. R. , and Stadler, P. F. , "The Topology of Evolutionary Biology" in Ciobanu, G. , and Rozenberg, G. , eds. , *Modeling in Molecular Biology*, Natural Computing Series, New York: Springer-Verlag, 2004, 267—286.

[Sta2] Stadler, B. M. R. , Stadler, P. F. , Wagner, G. , and Fontana, W. , "The topology of the possible: Formal spaces underlying patterns of evolutionary change" *Journal of Theoretical Biology* **213** (2001), 241—274.

[Str] Strogatz, S. H. , *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Boulder, Co. : Westview Press, 2001.

[Sum] Sumners, D. L. , ed. , *New Scientific Applications of Geometry and Topology*, Providence, R. I. : American Mathematical Society, 1992.

[The] Theobald, D. M. , "Topology revisited: representing spatial relations" *International Journal of Geographical Information Systems* **15** (2001), no. 8, 689—705.

[Tho] Thomassen, C. , "Kuratowski's Theorem" *Journal of Graph Theory* **5** (1981), 225—241.

[Thu1] Thurston, W. P. , and Levy, S. , ed. , *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1997.

[Thu2] Thurston, W. P. , and Weeks, J. R. , "The mathematics of threedimensional manifolds" *Scientific American* **251** (1984), no. 1, 108—120.

[Tou] Touhey, P. , "Yet another definition of chaos" *American Mathematical Monthly* **104** (1997), 411—413.

[Tri] Trinajstić, N. , *Chemical Graph Theory*, Boca Raton, Fl. : CRC Press, 1992.

[Tur] Turan, P. , "A Note of Welcome" *Journal of Graph Theory* **1** (1977), 7—9.

[Veb] Veblen, O. , "Theory on plane curves in non-metrical analysis situs" *Transactions of the American Mathematical Society* **6** (1905), 83—98.

[Vel] Vellekoop, M. , and Berglund, R. , "On Intervals, Transitivity=Chaos" *American Mathematical Monthly* **101** (1994), 353—355.

[Vic] Vick, J. W. , *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*, New York: Springer-Verlag, 1994.

[Von] Von Neumann, J. , and Morgenstern, O. , *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1944.

[Wee1] Weeks, J. R. , "Reconstructing the global topology of the universe from the cosmic microwave background" *Classical and Quantum Gravity* **15** (1998), 2599—2604.

[Wee2] Weeks, J. R. , *The Shape of Space*, New York: Marcel Dekker, Inc. , 2002.

[Wie] Wiener, H. , "Structural determination of paraffin boiling points" *Journal of the American Chemical Society* **69** (1947), 17—20.

[Win] Winfree, A. T. , "Sudden Cardiac Death: A Problem in Topology" *Scientific American* **248** (1983), no. 5, 144—161.

华章数学译丛

数学文化

数学简史（Katz，英）

微积分

高等微积分（Fitzpatrick，中、英）
微积分及其应用（Bittinger，中）
大学微积分（Hass，中）

数学分析

数学分析原理（Rudin，中、英）
数学分析（Apostol，中、英）
纯数学教程（Hardy，英）
泛函分析（Rudin，中、英）
实分析与复分析（Rudin，中、英）
实分析（Royden，中、英）
实分析和概率论（Dudley，中、英）
复分析（Ahlfors，中、英）
复变函数及应用（Brown，中、英）
复分析基础及工程应用（Saff，中、英）
三角级数（Zygmund，英）

调和分析

调和分析导论（Katznelson，英）
逼近论教程（Cheney，英）
小波基础及应用教程（Mix，中）
小波与小波变换导论（Burrus，中、英）
小波分析及其应用（孙延奎，编写）
傅里叶分析与小波分析导论（Pinsky，英）
时频变换与小波变换导论（钱世锷，英）

代数

线性代数（Jain，英）
线性代数（Leon，中、英）
线性代数及其应用（Lay，中）
代数（Isaacs，英）
代数（Artin，中、英）
抽象代数基础教程（Rotman，中、英）
高等近世代数（Rotman，中）
矩阵分析（Horn，中）
同调代数导论（Weibel，英）

几何、拓扑

曲线与曲面的微分几何（do Carmo，中、英）
微分几何及其应用（Oprea，中、英）
分形分析（Kigami，英）
拓扑学（Munkres，中、英）

数学建模

数学建模方法与分析（Meerschaert，中）
数学建模（Giordano，中、英）

微分方程

实用偏微分方程（Haberman，中、英）
偏微分方程教程（Asmar，中、英）
微分方程与边界值问题（Zill，中、英）
动力系统导论（Robinson，中、英）
流体动力学导论（Batchelor，英）

计算数学

数值方法和MATLAB实现与应用（Reckten-wald，中）
数值分析（Kincaid，中、英）
数值方法（金一庆，编写）
计算机数值计算方法及程序设计（周煦，编写）
科学计算导论：使用MATLAB的矩阵向量方法（Van Loan，英）
MATLAB数值计算（Moler，中）
具体数学：计算机科学基础（Graham，中、英）

概率统计

概率论与数理统计（陈方樱，编写）
概率论基础教程（Ross，中）
概率统计（Stone，英）
概率论及其在投资、保险、工程中的应用

(Bean，英)
概率与计算（Mitzenmacher，中）
贝叶斯方法（Leonard，英）
抽样理论与方法（Govindarajulu，英）
数理统计与数据分析（Rice，英）
应用回归分析和其他多元方法（Kleinbaum，英）
多元数据分析（Lattin，英）
预测与时间序列（Bowerman，英）
时间序列分析的小波方法（Percival，中、英）
随机过程导论（Kao，英）
试验者的统计学（Box，中）
理工科概率统计（Walpole，中）
统计学（Mendenhall，中）

离散数学

离散数学（陈国勋，编写）
离散数学导学（Simpson，中）
离散数学及其应用（Rosen，中、英）
离散数学（Dossey，中、英）
离散数学及其应用（徐凤生，编写）

组合数学

组合数学教程（van Lint，中、英）
组合数学（Brualdi，中、英）
应用组合数学（Roberts，中、英）
计数组合学：卷1、卷2（Stanley，英）
图论导引（West，中、英）
图论（Tutte，英）
网络流：理论、算法与应用（Ahuja，英）

数论

初等数论及其应用（Rosen，中、英）
数论概论（Silverman，中、英）

数理逻辑

应用逻辑（Nerode，中、英）

金融数学

金融数学（Stampfli，中、英）
数理金融初步（Ross，中、英）
金融时间序列分析（Tsay，中）

运筹学

数学规划导论（Walker，英）
线性规划导论（Vaserstein，中、英）

数学软件

LATEX实用教程（Kopka，英）
MATLAB 7及工程问题解决方案（Etter，中）
SAS统计分析及应用（黄燕，编写）